Speciális algebrai struktúrák kommutatív részstruktúrái

PhD tézisfüzet

Zubor Márton

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Algebra Tanszék

Témavezető: Prof. Nagy Attila

2019

1. Bevezetés

1.1. Az értekezés célkitűzései és szerkezete

A disszertációban három témával foglalkozunk, melyek mindegyike bizonyos algebrai struktúrák részstruktúráinak kommutativitását követelik meg. Az első téma vizsgálatainak célja, hogy meghatározzuk a Grassmann algebrák kommutatív részalgebráinak maximális dimenzióját. Ez a fejezet Domokos Mátyással közös eredményeinket ismerteti. A második téma vizsgálatai során felső korlátot adunk a véges félháló-felbonthatatlan félcsoportok részfélhálóinak rendjére. A harmadik téma olyan S félcsoportokhoz kapcsolódik melyek kongruenciáinak halmaza kommutatív részfélcsoportot alkot az S bináris relációinak félcsoportjában, ezen félcsoportok az úgynevezett permutálható félcsoportok. Ez a fejezet Nagy Attilával közös eredményeinket ismerteti.

A disszertáció egy számozatlan Bevezetőt és további négy fejezetet tartalmaz.

Az 1. Fejezet az Előzmények, melyben bemutatjuk a disszertációban használt jelöléseket, fogalmakat és alapvető eredményeket.

A 2. Fejezet fókuszában a Grassmann algebrák kommutatív részalgebráinak maximális dimenziója van. A maximális kommutatív részalgebrákkal kapcsolatos vizsgálatunk fő motivációja a [Mar15], ahol az $E^{(n)}$ Grassmann algebra $\mathbb{F}^{m\times m}$ mátrix algebrába való beágyazhatóságát cáfolták kis m-ekre az $E^{(n)}$ nagy méretű kommutatív részalgebráinak létezése alapján. A nem-kommutatív algebrák kommutatív részalgebráinak jelentős irodalma van. Most csak a Schur klasszikus tételét [Sch05] említenék, mely meghatározza a $\mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix algebra kommutatív részalgebráinak maximális dimenzióját, alternatív bizonyításokért lásd [Jac44] és [Gus76]. Legyen W egy $\mathbb{F}$ test feletti vektortér és $\pi_1,\dots,\pi_r \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(W)$ páronként felcserélhető projekciók, azaz $\pi_i^2 = \pi_i$ és $\pi_i\pi_j = \pi_j\pi_i$ minden $i,j \in [r] := \{1,\dots,r\}$ esetén. Tekintsük a következő direkt összeg felbontást, $W = \ker(\pi_j) \oplus \mathrm{im}(\pi_j)$. Minden $J \subseteq [r]$ részhalmaz esetén legyen

$$W_J := \bigcap_{j\in J} \ker(\pi_j) \cap \bigcap_{j\notin J} \mathrm{im}(\pi_j).$$

Jelölje $\mathrm{Gras}(W)$ a W összes altereinek halmazát,továbbá definiáljuk az alábbi leképezéseket minden $j = 1,\dots,r$ esetén

$$\gamma_j : \mathrm{Gras}(W) \to \mathrm{Gras}(W), \qquad D \mapsto \ker(\pi_j|_D) \oplus \mathrm{im}(\pi_j|_D) \tag{1}$$

ahol $\pi_j|_D : D \to W$ a π_j projekció $D \subseteq W$ altérre való megszorítását jelöli.

Minden $J \subseteq [n] := \{1,\dots,n\}$ részhalmazra jelölje $v_J := v_{i_1}\cdots v_{i_k}$, ahol $J = \{i_1,\dots,i_k\}$ és $i_1 < \cdots < i_k$. Világos, hogy $\{v_J \mid J \subseteq [n]\}$ egy bázisa E-nek mint vektortérnek. A későbbiekben a $v_J \in E$ elemeit az algebrának ***monomoknak*** nevezzük.

Bebizonyítottuk, hogy(2.4.3 Tétel; 1 Tézis): ha $D \subseteq E$ egy részalgebra (nem feltétlenül egységelemes), és $A := \gamma_1 \dots \gamma_n(D)$, akkor A egy olyan részalgebrája E-nek mint $\mathbb{F}$-vektortérnek van monomokból (v_J, $J \subseteq [n]$) álló bázisa, és $\dim(A) = \dim(D)$. Továbbá, ha D kommutatív akkor A is és ha $D^2 = \{0\}$ akkor $A^2 = \{0\}$.

A 2 Fejezet fő eredménye a 2.6.1 Tétel (2 Tézis) mely meghatározza az E Grassmann algebra kommutatív részalgebráinak maximális dimenzióját, részleges eredményeket fogalmaz meg ezek struktúrájáról is. Kiderült, hogy páros n estén az E algebra összes maximális (tartalmazásra nézve) részalgebrájának a dimenziója megegyezik. Viszont páratlan n-nek esetén a maximális részalgebrák dimenziója változó.

Mint azt a 2.4.3 Tételben megmutattuk az E minden kommutatív részalgebrája megfeleltethető egy vele megegyező dimenziós kommutatív részalgebrának melynek mint vektortérnek van monomokból (generátor elemek szorzata) álló bázisa. Ez az eredmény önmagában is érdekes, továbbá lehetőséget biztosít számunkra, hogy a kérdésünket megfeleltessük egy tisztán kombinatorikai kérdésnek és kapcsolatba hozzuk a metsző halmaz rendszerekkel és az Erdős-Ko-Rado Tétellel.

A 3 Fejezetben véges félháló felbonthatatlan félcsoportokkal foglalkozunk. Egy S félcsoport α kongruenciáját félháló kongruenciának nevezzük, ha az S/α faktorfélcsoport félháló. Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy az S félcsoport az α-osztályainak félhálója. Egy félcsoportról akkor mondjuk, hogy félháló felbonthatatlan, ha az egyetlen félháló kongruenciája az univerzális reláció. Tudjuk, hogy minden félcsoport előáll félháló felbonthatatlan félcsoportok félhálójaként. A 3 Fejezetben véges félháló felbonthatatlan félcsoportokra bizonyítunk egy újféle karakterizációt (): egy S véges félcsoport pontosan akkor félháló felbonthatatlan ha a $\mathbb{C}[S/K_S]/J(\mathbb{C}[S/K_S])$-nek (ahol K_S az S maját jelöli) pontosan egy 1 dimenziós ideálja van.

A félcsoportelméletben irodalmában sok publikáció foglalkozik a félháló felbonthatatlan félcsoportokkal (lásd [Chr69], [Nag84], [Nag85], [Nag92], [Nag92-2], [Nag93], [Nag98], [NJ04], [Nor88],[PuW71], [Tam82], [TK54], [Gri01] és [Nag01]). Egy részük idempotens elem nélküli félháló felbonthatatlan félcsoportokkal foglakozik, míg mások egynél több idempotens elemet tartalmazó félháló felbonthatatlan félcsoportokat vizsgálják. Ebben a fejezetben véges félháló felbonthatatlan félcsoportokkal foglalkozunk tekintettel arra, hogy mit mondhatunk a részfélhálóik maximális méretéről. Speciális félcsoport osztályok esetén ismert a válasz. Mivel teljesen egyszerű félcsoportokban ha e és f idempotens elemek akkor és $ef = fe$ akkor $e = f$ ezért a részfélhálók maximális elemszáma egy. A [Chr69], [Nag84], [Nag85], [Nag92], [Nag92-2], [Nag93], [Nag98], [NJ04], [Nor88] és [TK54] cikkekben vizsgált félcsoportosztályokban eső félcsoportok olyan véges félcsoportok melyek teljesen egyszerű félcsoportok nilpotens félcsoporttal történő ideálbővítéseiként állnak elő. Következésképpen az idempotens elemeik a teljesen egyszerű részben vannak, s így a részfélhálók maximális mérete ekkor is egy.

Általános félcsoportok esetén sokkal érdekesebb a kérdés. A 3.4.2 Tételben (4 Tézis) megmutatjuk, hogy ha Y egy S véges félháló felbonthatatlan félcsoport részfélhálója akkor $|Y| \leq 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$. Azt is megmutatjuk, hogy minden pozitív n esetén létezik S véges félháló felbonthatatlan félcsoport melynek van Y részfélhálója, hogy $|Y| = 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$. Ezeket a félcsoportokat karakterizáljuk is egy speciális esetben, amikor $|S| = 4k+1$, valamely k nem-negatív egész esetén (ezek a B_2-kombinatorikus félcsoportok). Bebizonyítjuk (3.5.5 Tétel; 5 Tézis), hogy S félcsoport pontosan akkor B_2-kombinatorikus ha nullelemes és minden a nem-nulla elemére a $J(a)/I(a)$ főfaktor B_2 félcsoporttal izomorf. A 4 Fejezetben a permutálható félcsoportok félcsoportalgebrája van a fókuszban. Egy félcsoportról akkor mondjuk, hogy kongruencia-permutálható ha $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ teljesül S minden α és β kongruenciájára, ahol $\circ$ a kongruenciák szokásos kompozíciója. Tudjuk, hogy egy S félcsoport pontosan akkor kongruencia-permutálható ha $Con(S)$ az S kongruenciáinak halmaza egy félcsoportot alkot a $\circ$ műveletre nézve. Ekkor a $(Con(S); \circ)$ félcsoport szükségszerűen kommutatív. Az általunk vizsgált probléma a következő. Legyen S egy félcsoport és $\mathbb{F}$ egy test. Az S félcsoport tetszőleges α kongruenciája esetén jelölje $\mathbb{F}[\alpha]$ a $\mathbb{F}[S] \to \mathbb{F}[S/\alpha]$ kanonikus homomorfizmus kiterjesztésének a magját. A [Okn91] Chapter 4-ben szereplő Lemma 5 szerint minden S félcsoport és $\mathbb{F}$ esetén a

$$\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : Con(\mathbb{F}[S]) \to Con(S)$$
$$J \mapsto \varrho_J$$

leképezés egy szürjektív $\wedge$-homomorfizmus úgy, hogy $\varrho_{\mathbb{F}[\alpha]} = \alpha$ teljesül az S minden α kongruenciájára. Mivel ez egy félcsoport homomorf képe is félcsoport és $\alpha \circ \beta = \alpha \vee \beta$ teljesül egy permutálható félcsoport összes α és β kongruenciájára, a következő észrevételek nyilvánvalóak.

Ha S egy félcsoport, hogy valamely $\mathbb{F}$ testre $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus, akkor S kongruencia-permutálható félcsoport. Továbbá, ha S kongruencia-permutálható félcsoport, akkor $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus akkor és csak akkor ha $\vee$-homomorfizmus, ekkor $ker_{\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}}$ $\vee$-kompatibilis. Megmutatjuk, hogy az első megállapítás megfordítása nem igaz általában; egy S kongruencia-permutálható félcsoport esetén az hogy $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ a $\circ$-homomorfizmus-e függ az $\mathbb{F}$ testtől. Megmutatjuk, hogy ha $S = C_4$ azaz a négyelemű ciklikus csoport, akkor $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ nem $\circ$-homomorfizmus, ahol $\mathbb{F}_3$ a 3-elemű test. Ugyanakkor $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_2\}}$ a $\circ$-homomorfizmus, ahol $\mathbb{F}_2$ a kételemű test.

A fentiek alapján, kézenfekvő ötlet, hogy keressük meg az összes $(S, \mathbb{F})$ párt, ahol S kongruencia-permutálható félcsoport és $\mathbb{F}$ olyan, hogy a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ leképezés a $\circ$-homomorfizmus. Bebizonyítjuk a következő eredményeket.

4.2.1 Tétel (6 Tézis): Legyen S egy kongruencia-permutálható félháló. Ekkor tetszőleges test esetén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus.

4.3.1 Tétel (7 Tézis): Legyen S egy kongruencia-permutálható derékszögű-köteg. Ekkor tetszőleges test esetén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus.

Tehát a félhálók és derékszögű-kötegek osztályában a kongruencia-permutálhatóság nem csak szükséges hanem elégséges feltétele is annak, hogy a

$$\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : Con(\mathbb{F}[S]) \mapsto Con(S)$$

leképezés egy $\circ$-homomorfizmus legyen.

1.2. Az értekezés tézisei

1 Tézis *(2.4.3 Tétel) Legyen $D \subseteq E$ egy részalgebra (nem feltétlenül egységelemes), és legyen $A := \gamma_1 \dots \gamma_n(D)$. Ekkor a következők igazak:*

(i) *A részalgebra E-ben,*

(ii) *mint $\mathbb{F}$-vektortér kifeszíthető v_J, $J \subseteq [n]$ alakú elemekkel,*

(iii) $\dim(A) = \dim(D)$,

(iv) *ha D is kommutatív akkor A is,*

(v) *ha $D^2 = \{0\}$ akkor $A^2 = \{0\}$.*

2 Tézis *(2.6.1 Tétel) Legyen k az $n/4$ alsó egészrésze.*

(i) *Legyen A az E egy maximális dimenziójú kommutatív részalgebrája. Ekkor*

$$\dim(A) = \dim(E_{\overline{0}}) + |\mathcal{F}|,$$

ahol $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy maximális méretű páratlan metsző halmaz rendszer, tehát:

$$\dim(A) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{n-2} & \textit{if } n \textit{ is even;} \\ 2^{n-1} + \sum_{l=k}^{2k} \binom{n}{2l+1} & \textit{if } n = 4k+1; \\ 2^{n-1} + \sum_{l=k}^{2k} \binom{n}{2l+3} + \binom{n-1}{2k} & \textit{if } n = 4k+3. \end{cases}$$

(ii) *Ha n páros akkor az E összes maximális kommutatív részalgebrájának a dimenziója megegyezik, de nem mind izomorfak ha $n > 2$.*

(iii) *Ha $n = 4k+1$ akkor*

$$E_{\overline{0}} \oplus \Big(\bigoplus_{n/2 < i \text{ páratlan}} E_i \Big)$$

az egyetlen maximális dimenziójú kommutatív részalgebrája E-nek.

(iv) *Ha $n = 4k+3$ akkor az E maximális dimenziójú kommutatív részalgebrái a következő alakban írhatóak fel:*

$$E_{\overline{0}} \oplus \Big(\bigoplus_{n/2 < i \text{ páratlan}} E_i \Big) \oplus C,$$

ahol $C \subset E_{2k+1}$ egy $\binom{n-1}{2k}$-dimenziós nulla-négyzetű altér.

(v) *Ha n páratlan, E-nek léteznek maximális kommutatív részalgebrái, melyek nem maximális dimenziójú kommutatív részalgebrák.*

3 Tézis *(3.2.1 Tétel) Egy S véges félcsoport pontosan akkor félháló felbonthatatlan, ha $\mathbb{C}[S/K_S]/J(\mathbb{C}[S/K_S])$-nek pontosan egy 1-dimenziós ideálja van.*

4 Tézis *(3.4.2 Tétel)*

- *Ha Y az S félháló felbonthatatlan félcsoport részfélhálója, akkor*

$$|Y| \leq 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$$

- *Minden n pozitív egész n esetén létezik olyan félháló felbonthatatlan félcsoport melynek van olyan Y részfélhálója, hogy $|Y| = 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$.*

1.2.1 Definíció *Egy véges félcsoportról azt mondjuk, hogy B_2-*kombinatorikus *ha félháló felbonthatatlan, $|S| = 4k+1$ és van olyan Y részfélhálója melynek elemszáma $2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1 = 2k+1$.*

5 Tézis *(3.5.5 Tétel) Egy S véges félcsoport pontosan akkor B_2-kombinatorikus ha nullelemes és minden a nem-nulla elemére teljesül, hogy a $J(a)/I(a)$ főfaktor izomorf B_2-vel.*

6 Tézis *(4.2.1 Tétel) Legyen S egy kongruencia-permutálható félháló. Ekkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus.*

7 Tézis *(4.3.1 Tétel) Legyen $S = L \times R$ egy kongruencia-permutálható derékszögű-köteg (L bal zéró félcsoport R pedig jobb zéró félcsoport). Ekkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus.*

2. A kutatási eredmények összefoglalása

Ennek a résznek az egyes alfejezeteiben az értekezés azonos című fejezeteinek eredményeit foglaljuk össze. Az egyes tételek itteni számozása megegyezik az értekezésbeli számozással.

2.1. A Grassmann algebra kommutatív részalgebrái

A disszertáció 2 Fejezetében meghatározzuk a Grassman algebra kommutatív részalgebráinak maximális dimenzióját. Megmutattuk, hogy egy E Grassmann algebra bármely A kommutatív részalgebrája esetén létezik az E-nek olyan, monomok által kifeszített kommutatív részalgebrája, melynek a dimenziója megegyezik az A dimenziójával. Ezek alapján a kommutatív részalgebrák maximális dimenzióija kifejezhető a páratlan elemszámú részhalmazok metsző rendszerének maximális méretével. Jelölje n az E generátorelemeinek számát.

2.2. Nulla négyzetű alterek

Az $[n] := \{1, \ldots, n\}$ minden J részhalmazára legyen $v_J := v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, ahol $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ és $i_1 < \cdots < i_k$. Világos, hogy $\{v_J \mid J \subseteq [n]\}$ az E-nek mint $\mathbb{F}$-vektortérnek egy bázisa. A későbbiekben ezeket a $v_J \in E$ elemeket ***monomok***nak fogjuk nevezni. Tekintsük a Grassmann algebra következő fokszámozását:

$$E = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_k \qquad \text{ahol} \qquad E_k = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_J \mid I \subseteq [n], \quad |J| = k\}$$

($k > n$ esetén $E_k = \{0\}$). A vizsgálatok során az előbbi $\mathbb{Z}$-fokszámozáson túl felhasználjuk az általa indukált $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-fokszámozást is:

$$E = E_{\overline{0}} \oplus E_{\overline{1}}$$

ahol

$$E_{\overline{0}} := \bigoplus_{k \text{ páros}} E_k, \qquad E_{\overline{1}} := \bigoplus_{k \text{ páratlan}} E_k$$

Az E definiáló relációi a következő szorzási szabályokat implikálják:

$$v_J v_K = (-1)^{|J|\cdot|K|} v_K v_J$$

és ha $J \cap K \neq \emptyset$, akkor $v_J v_K = 0$. Ebből következik, hogy $E_{\overline{0}}$-t tartalmazza az E centruma, és az $E_{\overline{1}}$ elemei antikommutálnak: $ab = -ba$ minden $a, b \in E_{\overline{1}}$ párra. Következésképp $a, b \in E_{\overline{1}}$ elemek akkor és csak akkor kommutálnak, ha $ab = 0$. Tehát az E kommutatív részalgebrái és nulla négyzetű alterei között van egy természetes kapcsolat. Bármely $C, D \subseteq E$ alterek esetén jelöljük CD-vel a $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{cd \mid c \in C, d \in D\}$ alteret, továbbá nevezzünk ***nulla négyzetűnek*** egy $D \subseteq E$ alteret ha $D^2 = 0$, azaz $cd = 0$ minden $c, d \in D$ elemekre. Az E egy A kommutatív részalgebráját ***maximálisnak*** nevezzük, ha az E-nek az A-n kívül, nincs olyan kommutatív részalgebrája mely A-t tartalmazza. Hasonlóan, a $E_{\overline{1}}$ nulla négyzetű alterét ***maximálisnak*** nevezzük, ha $E_{\overline{1}}$-nek önmagán kívül nincs őt tartalmazó nulla négyzetű altere.

2.2.1 Állítás *([DZ15])*

(i) Ha $D \subseteq E_{\overline{1}}$ egy nulla négyzetű altér, akkor $K := E_{\overline{0}} D \subseteq E_{\overline{1}}$ is nulla négyzetű altér továbbá $E_{\overline{0}} \oplus K$ az E kommutatív részalgebrája.

(ii) A $D \mapsto E_{\overline{0}} \oplus D$ leképezés egy bijekciót az $E_{\overline{1}}$ maximális nulla négyzetű alterei és az E kommutatív részalgebrái között.

2.2.2 Megjegyzés *Érdekes összevetni a fenti "struktúra tételt" az $\mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix algebrák esetével, amelyek a Schur Tétel [Sch05] szerint, a maximális méretű kommutatív részalgebrái szintén a következő formában írhatóak,*

$$Z(\mathbb{F}^{n\times n}) \oplus D = \mathbb{F} I_n \oplus D,$$

ahol D olyan altér, hogy $D^2 = 0$ és I_n az egységmátrix. Viszont az $\mathbb{F}^{n\times n}$ algebrának nem az összes maximális kommutatív részalgebrája ilyen szerkezetű.

A $E_{\overline{1}}$ maximális nulla négyzetű alterei karakterizálhatóak a $E_{\overline{1}}$ egy megfelelő bilineáris leképezésének segítségével, mely a $E_{\overline{1}} \times E_{\overline{1}} \to E_{\overline{0}}$ az algebra szorzás művelete mint leképezés és a $E_{\overline{0}}$ egy homogén komponensére vett projekciójának kompozíciójaként áll elő. Bármely $x \in E^{(n)}$ egyértelműen írható a következő alakban

$$x = \sum_{J \subseteq [n]} x_J v_J. \tag{2}$$

Legyen Φ a következő bilineáris leképezés:

- ha n páros akkor $\Phi : E_{\overline{1}} \times E_{\overline{1}} \to E_n$, $\Phi(a,b) = (ab)_{[n]} v_{[n]}$;
- ha n páratlan akkor $\Phi : E_{\overline{1}} \times E_{\overline{1}} \to E_{n-1}$, $\Phi(a,b) = \sum_{J \in \binom{[n]}{n-1}} (ab)_J v_J$.

Az $\binom{[n]}{k}$-vel az $[n]$ összes k-elemű részhalmazainak halmazát jelöljük. Mivel a szorzás, mint leképezés a $E_{\overline{1}}$-n ferdén-szimmetrikus, ezért a Φ leképezés is ferdén-szimmetrikus bilineáris leképezés. Továbbá, ha n páros akkor $E_{[n]}$ azonosítható az $\mathbb{F}$ testtel, tehát ekkor Φ egy ferdén-szimmetrikus bilineáris funkcionál. Egy nem elfajuló funkcionál, mivel ha $x_J \neq 0$ valamely $J \subseteq [n]$ esetén és $x \in E_{\overline{1}}$, akkor $v_{[n]\setminus J} \in E_{\overline{1}}$ és $\Phi(x, v_{[n]\setminus J}) = x_J \neq 0$. Tehát ha n páros akkor $(E_{\overline{1}}, \Phi)$ egy szimplektikus vektortér.

Legyen $D \subseteq E_{\overline{1}}$ ekkor jelölje

$$D^{\perp} := \{x \in E_{\overline{1}} : \Phi(x, w) = 0 \ \forall w \in D\}.$$

2.2.3 Állítás *([DZ15]) Egy $D \subseteq E_{\overline{1}}$ altér maximális nulla négyzetű altér $E_{\overline{1}}$-ben akkor éss csak akkor, ha D egy $E_{\overline{0}}$-részmodulus és $D = D^{\perp}$.*

2.2.4 Következmény *([DZ15]) Ha $n \geq 2$ és páros, akkor az $E^{(n)}$ összes maximális kommutatív részalgebrájának a dimenziója $3 \cdot 2^{n-2}$.*

2.3. Kommutáló projekciók

Legyen W egy $\mathbb{F}$-vektortér és $\pi_1, \ldots, \pi_r \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(W)$ páronként kommutáló projekciók, azaz $\pi_i^2 = \pi_i$ and $\pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i$ minden $i, j \in [r]$-re. Tekintsük a következő direkt összeg felbontást $W = \ker(\pi_j) \oplus \mathrm{im}(\pi_j)$. Adott $J \subseteq [r]$ részhalmaz esetén legyen

$$W_J := \bigcap_{j \in J} \ker(\pi_j) \cap \bigcap_{j \notin J} \mathrm{im}(\pi_j).$$

Jelölje $\mathrm{Gras}(W)$ a W összes altereinek halmazát és minden $j = 1, \ldots, r$-re definiáljunk egy leképezést a következőképp:

$$\gamma_j : \mathrm{Gras}(W) \to \mathrm{Gras}(W), \qquad D \mapsto \ker(\pi_j|_D) \oplus \mathrm{im}(\pi_j|_D) \tag{3}$$

ahol $\pi_j|_D : D \to W$ a π_j $D \subseteq W$ altérre való megszorítását jelöli. Megjegyezzük, hogy $A, D \in \mathrm{Gras}(E^{(n)})$ alterek esetén $\gamma_j(A) + \gamma_j(D) \subseteq \gamma_j(A + D)$ (általában ez valódi tartalmazás). Az is nyilvánvaló, hogy ha $A \subseteq D$ akkor $\gamma_j(A) \subseteq \gamma_j(D)$.

2.3.1 Lemma *([DZ15]) Legyen $D \in \mathrm{Gras}(W)$ és $A := \gamma_1 \dots \gamma_r(D)$ ekkor a következő egyenlőségeket kapjuk*

(i) $\dim(A) = \dim(D)$*;*

(ii) $A = \bigoplus_{J \subseteq [r]} (A \cap W_J)$*.*

2.3.2 Megjegyzés *([DZ15])* Abból, hogy $\pi_1, \dots, \pi_r$-k kommutálnak nem következik, hogy $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ leképezések is kommutálnának, azaz $\gamma_i \gamma_j(D)$ és $\gamma_j \gamma_i(D)$ nem feltétlenül egyezik meg.

2.4. A Grassmann algebra néhány projekciója

Alkalmazzuk, a 2.3.1 Lemmát $W = E^{(n)}$ Grassmann algebra esetén. Minden $i = 1, \dots n$-re tekintsük a következő lineáris leképezést $\pi_i : E^{(n)} \to E^{(n)}$, hogy $\pi_i(x) := \sum_{i \notin J \subseteq [n]} x_J v_J$ (lásd v_J jelölés bevezetése (2)). Ekkor $\pi_i^2 = \pi_i$ és $\pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i$, tehát a 2.3 szakasz következtetései alkalmazhatóak ezekre a projekciókra is. Megtartva a 2.3 szakasz jelöléseit, legyenek $\gamma_i : \mathrm{Gras}(E^{(n)}) \to \mathrm{Gras}(E^{(n)})$ mint (3)-ben. Vegyük észere, hogy $E_J^{(n)} = W_J$ a v_J által kifeszített 1-dimenziós altér. Ráadásul π_i algebra homomorfizmus is, továbbá,

$$\ker(\pi_i)^2 = \{0\} \tag{4}$$

mivel $\ker(\pi_i) = v_i E^{(n)} = E^{(n)} v_i$ és $v_i^2 = 0$.

2.4.1 Állítás *([DZ15]) Legyenek $D, A \in \mathrm{Gras}(E^{(n)})$ alterek. Ekkor minden γ_i leképezésre teljesülnek a következők:*

(i) $\gamma_i(A)\gamma_i(D) \subseteq \gamma_i(AD)$ *mindig teljesül.*

(ii) Ha D egy részalgebrája $E^{(n)}$-nek, akkor $\gamma_i(D)$ is részalgebrája.

(iii) Ha $D^2 = \{0\}$, akkor $\gamma_i(D)^2 = \{0\}$.

(iv) Ha D az $E^{(n)}$ jobb/bal ideálja akkor $\gamma_i(D)$ is jobb/bal ideálja $E^{(n)}$-nek.

(v) Ha D az $E^{(n)}$kommutatív részalgebrája, akkor $\gamma_i(D)$ is kommutatív részalgebrája $E^{(n)}$-nek.

2.4.2 Megjegyzés *([DZ15])* A 2.4.1 Állítás (ii) részében szereplő $\gamma_i(D)$ algebra nem feltétlenül izomorf a D algebrával.

A 2.3.1 Lemma, 2.4.1 Állítás és az a tény alapján, hogy $E_J^{(n)} = \mathbb{F} v_J$ a következőt kapjuk:

2.4.3 Tétel *([DZ15]) Legyen $D \subseteq E^{(n)}$ egy részalgebra (nem feltétlenül egységelemes), és legyen $A := \gamma_1 \dots \gamma_n(D)$. Ekkor a következők igazak:*

(i) A részalgebra E-ben,

(ii) mint $\mathbb{F}$-vektortér kifeszíthető v_J, $J \subseteq [n]$ alakú elemekkel,

(iii) $\dim(A) = \dim(D)$,

(iv) ha D is kommutatív akkor A is,

(v) ha $D^2 = \{0\}$ akkor $A^2 = \{0\}$.

2.4.4 Megjegyzés *([DZ15])* A $v_1, \ldots, v_n$ generátorelemek szerepe szimmetrikus, tehát a 2.4.3 Tétel következtetései $A = \gamma_{\sigma(1)} \ldots \gamma_{\sigma(n)}(D)$-ről teljesülnek a $1, \ldots, n$ tetszőleges σ permutációja esetén. Azonban különböző σ permutációk általában különböző $\gamma_{\sigma(1)} \ldots \gamma_{\sigma(n)}(D)$ altereket eredményeznek.

A π_i projekciók megőrzik a fokszámokat, ezért a γ_i leképezések is kompatibilisek az E fokszámozásával:

2.4.5 Állítás *([DZ15])*

(i) Ha $D \subseteq \bigoplus_{k \in I} E_k$ valamely $I \subseteq [n]$-re, akkor $\gamma_i(D) \subseteq \bigoplus_{k \in I} E_k$.

(ii) Ha $D \subseteq \bigoplus_{k \in I} E_k$ és $A \subseteq \bigoplus_{k \in J} E_k$ ahol $I, J \subseteq [n]$ diszjunkt részhalmazok, akkor $\gamma_i(A \oplus D) = \gamma_i(A) \oplus \gamma_i(D)$.

(iii) Ha $D = \bigoplus_{k=0}^{n}(D \cap E_k)$ a homogán komponensei által van kifeszítve, akkor $\gamma_i(D) = \bigoplus_{k=0}^{n} \gamma_i(D \cap E_k)$ (és $\gamma_i(D \cap E_k) \subseteq E_k$ minden k-ra).

Jelöljük $b^{\min}$-nel egy nem nulla $b \in E$ minimális fokszámú nem nulla komponensét. Az E minden A részalgebrájához hozzá tudunk rendelni egy a homogén elemei által kifeszíthető $A^{\min}$ alteret a következőképp:

$$A^{\min} := \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{a \in E \mid a = b^{\min} \text{ valamely nem nulla } b \in A\text{-re}\}.$$

Ezek alapján egyszerűen bizonyíthatóak a következők:

2.4.6 Állítás *([DZ15])*

(i) $\dim(A^{\min}) = \dim(A)$;

(ii) Ha A az E egy részalgebrája akkor $A^{\min}$ is részalgebrája E-nek. Továbbá, ha A kommutatív akkor $A^{\min}$ is kommutatív és ha A nulla négyzetű akkor $A^{\min}$ is nulla négyzetű.

Vegyük észre hogy az E bármely A fokszámozott részalgebrája estén a monomok által kifeszített $B := \gamma_1 \ldots \gamma_n(A)$ Hilbert sorozata megegyezik az A Hilbert sorozatával: 2.4.5 Állítás alapján $\dim(A \cap E_k) = \dim(B \cap E_k)$ minden $k = 0, 1, \ldots, n$-ra.

2.4.7 Megjegyzés *([DZ15])* Az $E^{(n)}$ nem minden részalgebrája izomorf a $E^{(n)}$ valamely fokszámozott részalgebrájával és az $E^{(n)}$ nem minden fokszámozott részalgebrája izomorf az $E^{(n)}$ valamely momomok által kifeszített részalgebrájával.

2.5. Páratlan metszőrendszerek

A 2.4.3 Tétel lehetőséget nyújt számunkra, hogy a $E_{\overline{1}}$ nulla négyzetű altereivel kapcsolatos kérdésünket leegyszerűsítsük egy a metszőrendszerekkel kapcsolatos kérdésre. Egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazcsaládról azt mondjuk, hogy ***metszőrendszer*** ha $A \cap B \neq \emptyset$ minden $A, B \in \mathcal{F}$-re, és azt mondjuk, hogy v ***páratlan metszőrendszer*** ha metszőrendszer és minden $A \in \mathcal{F}$-re $|A|$ páratlan.

2.5.1 Állítás *([DZ15]) Legyen egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ páratlan metszőrendszer.*

(i) Ha n páros akkor $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-2}$.

(ii) Ha n páratlan, $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{i} \cup \binom{[n]}{n-i-1}$ valamely páratlan i-re, hogy $i < n/2-1$ és $\mathcal{F}$ maximális méretű, akkor $\mathcal{F} = \binom{[n]}{n-i-1}$.

(iii) Ha $n = 4k+1$ (ahol k nem-negatív egész) és $|\mathcal{F}|$ maximális, akkor

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n/2<i \text{ páratlan}} \binom{[n]}{i}.$$

(iv) Ha $n = 4k+3$ (ahol k nem-negatív egész) és $|\mathcal{F}|$ maximális, akkor

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n/2<i \text{ odd}} \binom{[n]}{i} \cup \left\{ X \in \binom{[n]}{2k+1} \,\middle|\, l \in X \right\},$$

valamely $l \in [n]$-re.

2.6. Maximális dimenziójú kommutatív részalgebrák

2.6.1 Tétel *([DZ15]) Legyen k az $n/4$ alsó egészrésze.*

(i) Legyen A az E egy maximális dimenziójú kommutatív részalgebrája. Ekkor

$$\dim(A) = \dim(E_{\overline{0}}) + |\mathcal{F}|,$$

ahol $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy maximális méretű páratlan metsző halmaz rendszer, tehát:

$$\dim(A) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{n-2} & \text{if } n \text{ is even;} \\ 2^{n-1} + \sum_{l=k}^{2k} \binom{n}{2l+1} & \text{if } n = 4k+1; \\ 2^{n-1} + \sum_{l=k}^{2k} \binom{n}{2l+3} + \binom{n-1}{2k} & \text{if } n = 4k+3. \end{cases}$$

(ii) Ha n páros akkor az $E^{(n)}$ összes maximális kommutatív részalgebrájának a dimenziója megegyezik, de nem mind izomorfak ha $n > 2$.

(iii) Ha $n = 4k+1$ akkor

$$E_{\overline{0}} \oplus \Big(\bigoplus_{n/2<i \text{ odd}} E_i \Big)$$

az egyetlen maximális dimenziójú kommutatív részalgebrája E-nek.

(iv) *Ha $n = 4k+3$ akkor az E maximális dimenziójú kommutatív részalgebrái a következő alakban írhatóak fel:*

$$E_{\overline{0}} \oplus (\bigoplus_{n/2<i\ odd} E_i) \oplus C,$$

ahol $C \subset E_{2k+1}$ egy $\binom{n-1}{2k}$-dimenziós nulla-négyzetű altér.

(v) *Ha n páratlan, E-nek léteznek maximális kommutatív részalgebrái, melyek nem maximális dimenziójú kommutatív részalgebrák.*

3. Véges félháló felbonthatatlan félcsoportok nagy részfélhálókkal

A félcsoportelméletben irodalmában sok publikáció foglalkozik a félháló felbonthatatlan félcsoportokkal (lásd [Chr69], [Nag84], [Nag85], [Nag92], [Nag92-2], [Nag93], [Nag98], [NJ04], [Nor88],[PuW71], [Tam82], [TK54], [Gri01] és [Nag01]). Egy részük idempotens elem nélküli félháló felbonthatatlan félcsoportokkal foglakozik, míg mások egynél több idempotens elemet tartalmazó félháló felbonthatatlan félcsoportokat vizsgálják. Ebben a fejezetben véges félháló felbonthatatlan félcsoportokkal foglalkozunk tekintettel arra, hogy mit mondhatunk a részfélhálóik maximális méretéről. Speciális félcsoport osztályok esetén ismert a válasz. Mivel teljesen egyszerű félcsoportokban ha e és f idempotens elemek akkor és $ef = fe$ akkor $e = f$ ezért a részfélhálók maximális elemszáma egy. A [Chr69], [Nag84], [Nag85], [Nag92], [Nag92-2], [Nag93], [Nag98], [NJ04], [Nor88] és [TK54] cikkekben vizsgált félcsoportosztályokban eső félcsoportok olyan véges félcsoportok melyek teljesen egyszerű félcsoportok nilpotens félcsoporttal történő ideálbővítéseiként állnak elő. Következésképpen az idempotens elemeik a teljesen egyszerű részben vannak, s így a részfélhálók maximális mérete ekkor is egy.

Általános félcsoportok esetén sokkal érdekesebb a kérdés. Megmutatjuk, hogy ha Y egy S véges félháló felbonthatatlan félcsoport részfélhálója akkor $|Y| \leq 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$. Azt is megmutatjuk, hogy minden pozitív n esetén létezik S véges félháló felbonthatatlan félcsoport melynek van Y részfélhálója, hogy $|Y| = 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$. Továbbá, karakterizáljuk is ezeket a félcsoportokat, abban az esetben, ha $|S| = 4k+1$.

3.1. A fejezetben használt jelölések

Legyen S egy félcsoport. Ekkor $\mathbb{C}[S]$ jelölje az S-nek a $\mathbb{C}$ komplex számtest feletti félcsoport algebráját. Egy S nullelemes félcsoport $\mathbb{C}$ feletti ***összehúzott félcsoport algebráját*** $\mathbb{C}_0[S]$-sel jelöljükv(lásd "contracted semigroup algebra" [Okn91, p.35]-ben).

Egy $\mathbb{C}$ feletti véges dimenziós A algebra Jacobson radikálját jelöljük $J(A)$-val. Tudjuk, hogy $J(A)$ az A teljesen nilpotens elemeiből áll. Használni fogjuk a következő jól ismert eredményt: a $A/J(A)$ faktoralgebra féligegyszerű (és így, minden S véges félcsoport esetén $\mathbb{C}[S]/J(\mathbb{C}[S])$ féligegyszerű), továbbá egy A $\mathbb{C}$-feletti véges dimenziós algebra pontosan akkor féligegyszerű, ha A izomorf $\bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$-vel, ahol $M_n(\mathbb{C})$ a komplex $n \times n$-es mátrixok asszociatív algebráját jelöli.

Ha egy félcsoportnak van egy K_S minimális ideálja, akkor azt az S ***magjának*** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden véges félcsoportnak van magja. Ha egy S félcsoportnak van magja, akkor K_S egy egyszerű részfélcsoportja S-nek [CP61, Cor. 2.30. p.69]. Minden véges egyszerű [0-egyszerű] félcsoport teljesen egyszerű [teljesen 0-egyszerű] ([CP61, Cor. 2.56. p.83]).

Tudjuk, hogy egy félcsoport pontosan akkor teljesen 0-egyszerű félcsoport, ha izomorf egy reguláris Rees mátrix félcsoporttal valamely nullelemes csoport felett. Ha egy teljesen 0-egyszerű félcsoport inverz félcsoport akkor az Brandt félcsoport. A vizsgálataink során központi szerepet kap egy speciális Brandt félcsoport. Ez a félcsoport a $\mathcal{M}^0(1;2,2;I)$ ahol 1 az egyelemű csoportot I pedig a 2×2-es egység mátrixot jelöli. Ezt a Brandt félcsoportot B_2-vel fogjuk jelölni.

3.2. Félháló felbonthatatlan félcsoportok

Egy S félcsoportról azt mondjuk, hogy ***félháló felbonthatatlan*** ha az S minden félháló homomorf képe triviális (azaz az egy elemű félcsoport). Egy S félcsoport I ideáljáról akkor mondjuk, hogy teljesen prím ideál, ha $S \setminus I$ az S részfélcsoportja. Tudjuk ([Pet77, I.8.3. Prop. p.15]), hogy egy félcsoport pontosan akkor félháló felbonthatatlan, ha nem tartalmaz teljesen prím ideált. A [Tam72] cikk a félháló felbonthatatlan félcsoportok egy másik karakterizációját írja le. Mely szerint egy félcsoport pontosan akkor félháló felbonthatatlan, ha minden $a, b \in S$ elemére létezik egy olyan $a = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$, melyben a_{i-1} osztja a_i valamely hatványát ($i = 1, \ldots, n$).

A 3.2.1 Tételben egy S véges félháló felbonthatatlan félcsoportok új karakterizációját írjuk le pusztán a $\mathbb{C}[S/K_S]$ tulajdonságaival.

3.2.1 Tétel *([Zub16]) Egy S véges félcsoport pontosan akkor félháló felbonthatatlan, ha a $\mathbb{C}[S/K_S]/J(\mathbb{C}[S/K_S])$ algebrának pontosan egy 1-dimenziós ideálja van.*

3.2.2 Megjegyzés *([Zub16]) A nullelemes véges félcsoportok esetén a félháló felbonthatatlanság leírható pusztán a félcsoport algebra tulajdonságaival (lásd 3.2.1 Tétel). Ez az állítás nem igaz általában véges félcsoportok esetén. Például ha G egy Abel-csoport és Y egy félháló, úgy hogy $|G| = |Y|$ akkor $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i\in G} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[Y]$. Így, ha $1 < |G| = |Y|$, akkor G félháló felbonthatatlan míg Y nem, de félcsoport algebráik mégis izomorfak $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}[Y]$.*

3.3. Félháló felbonthatatlan félcsoportokba való beágyazások

Az A és B nullelemes félcsoportoknak a nullelemeit jelöljük z_A-val és z_B-vel. Ekkor a $A \times B$ félcsoportnak $I = (\{z_A\} \times B) \cup (A \times \{z_B\})$ egy ideálja. Jelöljük $A \times_0 B$-vel a $(A \times B)/I$ Rees faktor félcsoportot.

3.3.1 Állítás *([Zub16]) Tetszőleges A és B nullelemes félcsoportok esetén a $A \times_0 B$ pontosan akkor félháló felbonthatatlan ha az A és B közül legalább az egyik félháló felbonthatatlan.*

Megmutatjuk, hogy a legkisebb félháló felbonthatatlan félcsoportnak mely tartalmaz kételemű részfélhálót az elemszáma 5. Továbbá azt is megmutatjuk, a legkisebb félháló felbonthatatlan félcsoport mely tartalmaz 3-elemű részfélhálót izomorf a B_2 félcsoporttal (3.4.2 Tétel, 3.5.5 Tétel). Először bebizonyítjuk, hogy izomorfia erejéig csak három 5-elemű félháló felbonthatatlan félcsoportnak van 2-elemű részfélhálója (ezek közül kettő antiizomorf).

3.3.2 Következmény *([Zub16]) Legyen S egy félháló felbonthatatlan félcsoport, úgy hogy $|S| \leq 5$ és S-nek legalább két kommutáló idempotense. Ekkor $S \cong \mathcal{M}^0(1; 2, 2; P)$, ahol $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ or $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ha P az egységmátrix akkor $S \cong B_2$*

3.3.3 Következmény *([Zub16]) Minden S véges félcsoport beágyazható egy $4|S| + 1$ elemszámú félháló felbonthatatlan félcsoportba.*

3.3.4 Állítás *([Zub16]) Minden S véges nullelemes félháló felbonthatatlan félcsoport beágyazható egy $|S| + 1$-elemű nullelemes félháló felbonthatatlan félcsoportba.*

3.4. Véges félháló felbonthatatlan félcsoportok részfélhálóinak elemszámáról

Ebben a szakaszban a következő kérdésre adunk választ: Mi a maximális számossága egy n-elemű félháló felbonthatatlan félcsoport részfélhálójának. Először nullelemes félcsoportok esetén vizsgáljuk meg a kérdést (3.4.1 Állítás). Majd pedig tetszőleges véges félcsoport esetén (3.4.2 Tétel).

3.4.1 Állítás *([Zub16]) Legyen S egy véges nullelemes félháló felbonthatatlan félcsoport. Ha Y az S részfélhálója akkor $|Y| \leq 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$.*

3.4.2 Tétel *([Zub16])*

(i) Legyen S egy véges félháló felbonthatatlan félcsoport. Ha Y az S részfélhálója akkor $|Y| \leq 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$.

(ii) Minden n pozitív egész estén létezik olyan S n-elemű félháló felbonthatatlan félcsoport melynek van olyan Y részfélhálója melynek elemszáma $|Y| = 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1$.

3.5. B_2-kombinatorikus félcsoportok

3.5.1 Definíció *([Zub16]) Egy S félcsoportról azt mondjuk, hogy B_2**-kombinatorikus** ha félháló felbonthatatlan, $|S| = 4k+1$ (k nem negatív egész) és van olyan Y részfélhálója, hogy $|Y| = 2\left\lfloor \frac{|S|-1}{4} \right\rfloor + 1 = \frac{|S|+1}{2} = 2k+1$.*

Az elnevezés a 3.5.5 Tételre utal. Először, vegyük észre, hogy a B_2 félcsoport B_2-kombinatorikus.

3.5.2 Állítás *([Zub16]) Legyen S egy B_2-kombinatorikus félcsoport. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

(i) S-nek van nulleleme.

(ii) A $\mathbb{C}[S]$ félcsoportalgebra izomorf $\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} M_2(\mathbb{C})$-vel.

(iii) Az S összes ideálja B_2-kombinatorikus.

(iv) Az S minden homomorf képe is B_2-kombinatorikus.

3.5.3 Lemma *([Zub16]) Legyen S tlejesen 0-egyszerű félcsoport és Y az S egy részfélhálója. Ekkor $|Y| \leq \sqrt{|S|-1} + 1$. Ha $|Y| = \sqrt{|S|-1} + 1$ akkor $S \cong \mathcal{M}^0(1; n, n; I)$, ahol $n = \sqrt{|S|-1}$.*

3.5.4 Állítás *([Zub16]) Ha S egy B_2-kombinatorikus 0-egyszerű félcsoport akkor $S \cong B_2$.*

Egy S félcsoport esetén jelöljük $J(a)$-val az S a eleme által generált főideálját, ekkor a $I(a) = \{b | b \in J(a); J(a) \neq J(b)\}$ halmaz vagy üres vagy az S egy ideálja. Tudjuk, hogy minden félcsoport minden főfaktora 0-egyszerű, egyszerű vagy null ([CP61, Lemma 2.39. p.73]).

3.5.5 Tétel *([Zub16]) Legyen S véges félcsoport. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) S egy B_2-kombinatorikus félcsoport,

(ii) S nullelemes, és minden a nem nulla eleme esetén a $J(a)/I(a)$ főfaktora izomorf B_2-vel.

4. Kongruencia permutálható félcsoportok

Ebben a fejezetben a kongruencia permutálható félcsoportok félcsoport algebrájával kapcsolatos kérdést vizsgálunk meg. Legyen J az $\mathbb{F}[S]$ félcsoport algebra egy ideálja, ekkor jelöljük ϱ_J-vel az S félcsoport azon kongruenciáját melyet a $\mathbb{F}[S]$-nek a J által meghatározott kongruenciájának S-re való megszorításával kapunk. Megmutatjuk, hogy ha S félháló vagy derékszögű köteg, akkor a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : J \mapsto \varrho_J$ leképezés $\circ$-homomorfizmus akkor és csak akkor ha S kongruencia permutálható.

4.1. Általános est

Legyen S egy félcsoport és $\mathbb{F}$ egy test. Az S tetszőleges α kongruenciája esetén jelöljük $\mathbb{F}[\alpha]$-vel az $S \to S/\alpha$ kanonikus homomorfizmus $\mathbb{F}[S] \to \mathbb{F}[S/\alpha]$ -ra való kiterjesztésének a magját. A [Okn91] Chapter 4-ben szereplő Lemma 5-ből tudjuk, hogy minden S félcsoport és $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : J \mapsto \varrho_J$ leképezés egy szürjektív $\wedge$-homomorfizmus, úgy hogy $\varrho_{\mathbb{F}[\alpha]} = \alpha$ az S minden α kongruenciájára. Félcsoportok homomorf képe is félcsoport és $\alpha \circ \beta = \alpha \vee \beta$ teljesül minden α és β kongruenciájára egy permutálható félcsoportnak, így a következő észrevételt tehetjük.

4.1.1 Lemma *([NZ16]) Ha S egy félcsoport úgy, hogy valamely $\mathbb{F}$ test estén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : Con(\mathbb{F}[S]) \to \mathcal{B}_S;\ J \mapsto \varrho_J$ egy $\circ$-homomorfizmus akkor S kongruencia permutálható félcsoport. Továbbá, ha S kongruencia permutálható félcsoport, akkor $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ pontosa akkor $\circ$-homomorfizmus ha $\vee$-homomorfizmus is, azaz $ker_{\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}}$ leképezés $\vee$-kompatibilis.*

A következő Példa alapján levonhatjuk az a következtetést, hogy a 4.1.1 Lemma első állításának a megfordítása nem teljesül általában, azaz kongruencia permutálható félcsoport esetén a feltétel, az hogy $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ egy $\circ$-homomorfizmus-e függ az $\mathbb{F}$ testtől is.

Példa Legyen C_4 a 4 elemű ciklikus csoport $\mathbb{F}_2$ és $\mathbb{F}_3$ a 2 illetve 3 elemű test. Tudjuk, hogy minden csoport kongruencia permutálható félcsoport. Így $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}$ nem $\circ$-homomorfizmus miközben $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_2\}}$ pedig $\circ$-homomorfizmus.

A 4.1.1 Lemma és a fenti Példa alapján, természetesen felvetődő kérdés, hogy keressük meg az összes olyan $(S, \mathbb{F})$ párt melyre S kongruencia permutálható és a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ leképezés $\circ$-homomorfizmus. Ezt a kérdést válaszoljuk meg bizonyos speciális félcsoport osztályokban, nevezetesen a félhálók és derékszögű kötegek esetén.

4.2. Félhálók

4.2.1 Tétel *([NZ16]) Legyen S egy kongruencia permutálható félháló. Ekkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ leképezés egy $\circ$-homomorfizmus.*

4.2.2 Következmény *([NZ16]) Legyen S egy félháló. Ekkor, pontosan akkor lesz tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ leképezés egy $\circ$-homomorfizmus ha kongruencia-permutálható.*

4.3. Derékszögű kötegek

4.3.1 Tétel *([NZ16]) Legyen $S = L \times R$ egy kongruencia permutálható derékszögű köteg (L bal zéró, R pedig jobb zéró félcsoport). Ekkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ leképezés egy $\circ$-homomorfizmusa.*

4.3.2 Következmény *([NZ16]) Legyen $S = L \times R$ egy kongruencia permutálható derékszögű köteg (L bal zéró, R pedig jobb zéró félcsoport). Ekkor, pontosan akkor lesz tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ leképezés egy $\circ$-homomorfizmus, ha S kongruencia permutálható.*

Hivatkozások

[Bav10] V. V. Bavula, The Jacobian map, the Jacobian group and the group of automorphisms of the Grassmann algebra, Bull. Soc. Math. France 138 (2010), no. 1, 39-117.

[BC80] Bonzini, C. and A. Cherubini, *Sui Δ-semigrouppi di Putcha*, Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend. A. 114(1980), 179-194

[BC81] Bonzini, C. and A. Cherubini, *Medial permutable semigroups*, Proc. Coll. Math. Soc. János Bolyai, 39. Semigroups, Szeged (Hungary), 1981, 21-39

[Bon83] Bonzini, C., *Una classe di semigruppi permutabili*, Atta della Accademia delle Scienze di Torino, I-Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Vol. 117 (1983), 355-368

[Bon84] Bonzini, C., *The structure of permutable medial semigroups*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A118(1984), 57-66 (1987)

[CV84] Cherubini Spoletini, A and A. Varisco *Permutable duo semigroups*, Semigroup Forum, 28(1984), 155-172

[Chr69] Chrislock, J.L., *On medial semigroups*, Journal of Algebra, 12(1969), 1-9

[CP61] Clifford, A.H. and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., I(1961)

[CP67] Clifford, A.H. and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., II(1967)

[Col68] Coleman D.B., *Semigroup algebras that are group algebras* Pacific J. Math., 24(1968), 247–256

[Dea06] Deák, A., *On a problem of A. Nagy concerning permutable semigroups satisfying a non-trivial permutation identity*, Acta Sci. Math. (Szeged), 72(2006), 537-541

[DN10] Deák, A. and A. Nagy, *Finite permutable Putcha semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged), 76(2010), 397-410

[DZ15] Domokos, M. and M. Zubor *Commutative subalgebras of the Grassmann algebra* Journal of Algebra and Its Applications 14(2015), No. 08, paper 1550125

[Erd61] P. Erdős, C. Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, Quart. J. Math. Oxford, ser. (2) 12 (1961), 313-318.

[Gri01] Grillet, P.A., *Commutative Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[Gus76] W. H. Gustafson, On maximal commutative algebras of linear transformations, J. Algebra 42 (1976), 557-563.

[Ham75] Hamilton, H., Permutability of congruences on commutative semigroups, Semigroup Forum, 10(1975), 55-66

[How76] Howie, J. M., *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London, 1976

[Jac44] N. Jacobson, Schur's theorems on commutative matrices, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 431-436.

[JN03] Jiang Z., and A. Nagy, *$\mathcal{RGC}_n$-commutative Δ-semigroups (corrigendum)*, Semigroup Forum, 67(2003), 468-470

[Jia95] Jiang, Z., *LC-commutative permutable semigroups*, Semigroup Forum, 52(1995), 191-196

[JC04] Jiang, Z. and L. Chen, *$RDGC_n$-commutative permutable semigroups*, Periodica Mathematica Hungarica, 49(2004), 91-98

[Jon06] Jones, P. R., *Solution to a problem of Nagy*, 2006 (personal communication)

[Mar15] L. Márki, J. Meyer, J. Szigeti, L. van Wyk, *Matrix representations of finitely generated Grassmann algebras and some consequences*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 208(2015), Issue 1, 373-384 (arXiv:1307.0292)

[Nag84] Nagy, A., *Weakly exponential semigroups*, Semigroup Forum, 28(1984), 291-302

[Nag85] Nagy, A., *WE-m semigroups*, Semigroup Forum, Vol. 32(1985), 241-250

[Nag90] Nagy A., *Weakly exponential Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 40(1990), 297-313

[Nag92] Nagy A., *RC-commutative Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 44(1992), 332-340

[Nag92-2] Nagy, A., *On the structure of (m,n)-commutative semigroups*, Semigroup Forum, 45(1992), 183-190

[Nag93] Nagy A., *Semilattice decomposition of $n_{(2)}$-permutative semigroups*, Semigroup Forum, 46 (1993), 16-20

[Nag98] Nagy, A., *$\mathcal{RGC}_n$-commutative Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 57(1998), 92-100

[Nag00] Nagy, A., *Right commutative Δ-semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 66(2000), 33-45

[Nag01] Nagy, A., *Special Classes of Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001

[NJ04] Nagy, A. and P.R. Jones, *Permutative semigroups whose congruences form a chain*, Semigroup Forum, 69(2004), 446-456

[Nag05] Nagy, A., *Permutable semigroups satisfying a non-trivial permutation identity*, Acta Sci. Math. (Szeged), 71(2005), 37-43

[Nag08] Nagy, A., *Medial permutable semigroups of the first type*, Semigroup Forum, 76(2008), 297-308

[Nag13] Nagy, A., *Notes on a problem on weakly exponential* Δ*-semigroups*, International Journal of Algebra, 7(2013), 901-907

[NZ16] Nagy, A. and Zubor, M., *A Note on Semigroup Algebras of Permutable Semigroups*, Communications in Algebra, 44(2016), 4865-4873

[Nor88] Nordahl, T.E., *On permutative semigroup algebras*, Algebra Universalis, 25(1988), 322-333

[Okn91] Okniński, J., *Semigroup Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991

[Pet64] Petrich, M., *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math. Zeitschrift, 85(1964), 68-82

[Pet73] Pertich, M., *Introductions to semigroups*, Merrill Books, Columbus, Ohio, (1973)

[Pet77] Petrich, M., *Lectures in Semigroups*, Akademie-Verlag Berlin, (1977)

[PuW71] Putcha M.S., Weissglass J., *A semilattice decomposition into semigroups having at most one idempotent*, Pacific J. Math., 39(1971), 225–228

[Put73] Putcha, M. S., *Semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 6(1973), 12-34

[PY71] Putcha, M.S. and A. Yaqub, *Semigroups satisfying permutation properties*, Semigroup Forum, 3(1971), 68-73

[Sch69] Schein, B. M., *Commutative semigroups where congruences form a chain*, Semigroup Forum, 17(1969), 523-527

[Sch05] I. Schur, Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen, J. Reine Angew. Math. 130 (1905), 66-76.

[Stu93] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag, Wien, 1993.

[TK54] Tamura, T. and N. Kimura, *On decompositions of a commutative semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep., 1954(1954), 109-112

[Tam64] Tamura, T., *Another proof of a theorem concerning the greatest semilattice decomposition of a semigroup*, Proc. Japan Acad., 40(1964), 777-780

[Tam67] Tamura, T., *Decomposability of extension and its application to finite semigroups*, Proc. Japan Acad., 43(1967), 93-97

[Tam68] Tamura T., *Notes on medial archimedean semigroups without idempotent*, Proc. Japan Acad., 44(1968), 776-778

[Tam69] Tamura T., *Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain*, Bull. Soc. Math. France, 97(1969), 369-380

[Tam72] Tamura T., *Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 4(1972), 255 - 261

[TS72] Tamura, T. and J. Shafer, *On exponential semigroups I*, Proc. Japan Acad., 48(1972), 77-80

[TN72] Tamura, T. and T. Nordahl, *On exponential semigroups II*, Proc. Japan Acad., 48(1972), 474-478

[Tam82] Tamura, T., *Semilattice indecomposable semigroups with a unique idempotent*, Semigroup Forum, 24(1982), 77–82

[Tro76] Trotter, P.G., *Exponential* Δ*-semigroups*, Semigroup Forum, 12(1976), 313-331

[Yam55] Yamada, M., *On the greatest semilattice decomposition of a semigroup*, Kodai Mat. Sem. Rep., 7(1955), 59-62

[Zub16] Zubor, M., *Semilattice indecomposable finite semigroups with large subsemilattices*, Acta Mathematica Hungarica, 150(2016), No. 2, 512-523