

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI  
EGYETEM



TÉZISFÜZET

---

**Átlagtér jellegű csatolt leképezések  
aszimptotikus viselkedése**

---

*Szerző:*  
MINCSOVICSNÉ SÉLLEY Fanni

*Témavezető:*  
BÁLINT Péter

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola  
Természettudományi Kar

2019. március 7.

## 1. Bevezetés

A csatolt leképezések témaköre intenzíven kutatott területe a dinamikai rendszerek modern elméletének. Nagy vonalakban megfogalmazva, csatolt leképezés alatt egy olyan összetett rendszert értünk, amelyet egymással kölcsönható diszkrét dinamikai rendszerek alkotnak.

A modellek sokfélesége alapvetően a kölcsönhatás szerkezetének változatosságából fakad. A legkorábbi példát a *csatolt háló* alkotják, amelyek vizsgálatát a statisztikus fizika Ising modellje motiválta. A csatolt hálóban a kölcsönható egységek egy rács (tipikusan  $\mathbf{Z}$  vagy  $\mathbf{Z}^d$ ) pontjaiban helyezkednek el, és kölcsönhatás a modelltől függő rácsávolságú egységek között jön létre.

Az *átlagtér modell*, amely a jelen disszertációban tanulmányozott rendszer hátterét biztosítja, szintén rendelkezik statisztikus fizikai motivációval (lásd a Curie-Weiss modellt). Az átlagtér (vagy globálisan csatolt) rendszert szemléletesen úgy lehet elképzelni, hogy a kölcsönható rendszerek egy *átlagteret* generálnak, amely közös környezetet teremt és azonos módon perturbálja az egyes egységeket. Így egy teljesen szimmetrikus rendszert kapunk amelyben minden egység szerepe azonos.

Az ilyen típusú modellek esetében a legérdekesebb kutatási téma a *bifurkációk* vizsgálata, azaz annak megértése, hogy hogyan módosulnak a rendszer tulajdonságai a csatolási erősség változtatásával. Csatlós hóján az egyes egységek egymástól függetlenül fejlődnek, viszont erős csatolás esetében szinkronizációt természetes remélni. Erre a jelenségre úgy is gondolhatunk, mint az Ising modell fázisátmenetének determinisztikus megfelelőjére [27, 47]. A matematikailag precíz eredmények a dinamikai rendszerek elméletének kifinomult eszközeit alkalmazzák, és általában kis csatolási erősségre a fázisátmenet hiányát bizonyítják (pontosabban az SRB mérték egyértelműségét) [16, 18, 25, 32, 33, 39, 41].

Kevesebb eredmény áll rendelkezésre erős csatolás esetében. Koiller és Young [42] szolgáltatott az első matematikailag precíz eredmények egyikét. A szerzőpáros egyszerű csatolt rendszereket vizsgált a hiperbolikus dinamikák elméletének eszközeivel. Megmutatták, hogy a csatolási erősség növelésével szűkítő irányok jönnek létre és hogy ez a jelenség esetenként könnyen értelmezhető mint a csatolt rendszer részleges szinkronizációja.

A disszertáció első felében  $N$  globálisan csatolt  $2x \bmod 1$  leképezést tekintünk Fernandez definícióját követve [24] (aki modelljét Koiller és Young [42] munkájából kiindulva definiálta). Ez a modell tekinthető a Kuramoto-féle csatolt oszcillátor modell diszkrét idejű, kaotikus megfelelőjének [45, 46]. Először a rendszer statisztikus tulajdonságait vizsgáljuk meg gyenge csatolás esetében (például az abszolút folytonos invariáns mérték létezését, ergodicitást, keverést, stb.) majd a szinkronizációt tanulmányozzuk erős csatolás esetében. A disszertáció második felében definiáljuk a modell kontinuum verzióját. Ebben az esetben lehetőségünk nyílik a  $2x \bmod 1$  leképezésnél általánosabb egyéni dinamikákat is tekinteni. Gyenge csatolás mellett az invariáns eloszlás létezését és tulajdonságait vizsgáljuk, erős csatolás esetében pedig a szinkronizáció írjuk le.

A fejezet hátralevő részében röviden bemutatjuk az alapmodellt és a korábbi eredményeket vele kapcsolatban.

### 1.1. Az alapmodell és korábbi eredmények

Az itt definiált modell a *Kuramoto modell* diszkrét idejű változata kaotikus lokális dinamikákkal. A Kuramoto-féle csatolt oszcillátor modellt eredetileg kémiai instabilitások modellezésére tervezték [45, 46], de napjainkra nagy népszerűségre tett szert

a legváltozatosabb kölcsönható ható rendszerek leírásában [1, 49, 54].

A Kuramoto modellt  $N \in \mathbb{N}$  oszcillátor alkotja. Az oszcillátorokat a  $\theta_i$ -vel jelölt fázisukkal reprezentáljuk, amely a  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  egységkör egy eleme. A rendszer fejlődését a:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer írja le, ahol a  $K \in \mathbb{R}^+$  paramétert *csatolási erősségnek* nevezzük, az  $\omega_i \in \mathbb{R}$  szimbólumok pedig az oszcillátorok véletlenül választott frekvenciáját jelölik (ezek időfüggetlen mennyiségek). A páronkénti fáziskülönbségek szinuszfüggvénye pedig egy egyszerű és természetes interakciót reprezentál az oszcillátor-párok között.

Gyenge csatolás, azaz kis  $K$  esetében a dinamika hasonló a  $K = 0$  esethez: *rendezetlen* abban az értelemben, hogy a rendszer végtelen sokszor visszatér a kezdeti állapot egy tetszőlegesen kis környezetébe. Viszont amennyiben  $K$  elegendően nagy, fázisszinkronizáció következik be: az egyes fáziskülönbségek aszimptotikusan meg egyezővé válnak, tehát *rendezett* viselkedést tapasztalunk [7, 22, 31].

Fernandez modellje, amely a disszertáció kiindulópontját szolgáltatta, a következő: legyen  $N \in \mathbb{N}$  valamint  $\mathbb{T}^N = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^N$  az  $N$ -dimenziós (lapos) tórusz.  $\mathbb{T}^N$  tóruszt az  $[0, 1]^N \subset \mathbb{R}^N$  egységkockával reprezentáljuk, amelynek a szemközti lapjait azonosítjuk. Legyen  $F_{\varepsilon, N} : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  a

$$F_{\varepsilon, N} = F_{0, N} \circ \Phi_{\varepsilon, N}$$

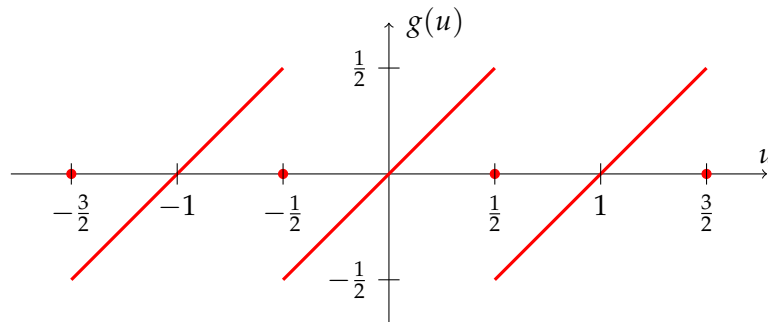
leképezés, ahol

$$\begin{aligned} (F_{0, N}(x))_i &= 2x_i \pmod{1} \\ (\Phi_{\varepsilon, N}(x))_i &= x_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N g(x_j - x_i) \pmod{1} \quad i = 1, \dots, N, \quad x = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{T}^N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

A  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést

$$\hat{g}(u) = \begin{cases} 0 & \text{ha } u = \pm \frac{1}{2}, \\ u & \text{ha } u \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

periodikus kiterjesztéseként definiáljuk. Lásd az 1 Ábrán a  $g$  függvény grafikonját. Könnyen meggyőzhetjük magunkat arról, hogy ez a függvény tekinthető a szinusz-



1. ÁBRA. A  $g$  függvény.

függvény durva egyszerűsítésének.

$F_{\varepsilon,N}$  szakaszonként affin leképezése az egységkockának (a szakadások  $g(\cdot)$  szakadásaiból adódnak), a folytonossági tartományok pedig  $N$  dimenziós poliéderek. A leképezés lineáris részének két különböző sajátértéke van, az 1 multiplicitású  $\lambda_1 = 2$  és az  $N - 1$  multiplicitású  $\lambda_2 = 2(1 - \varepsilon)$ . A sajátvektorok szintén függetlenek a folytonossági tartománytól, így van értelme *szűkítő* és *tágító* irányokról beszélni. Könnyen látszik, hogy minden irány tágító ha  $\varepsilon \in [0, 1/2)$  és egy irányt kivéve mind szűkítő ha  $\varepsilon$  nagyobb mint  $1/2$ . Ezért az  $\varepsilon \in [0, 1/2)$  tartományt *tágító tartománynak* fogjuk nevezni, az  $\varepsilon \in (1/2, 1)$  tartományt pedig *szűkítő tartománynak*. Az  $\varepsilon = 1/2$  és  $\varepsilon = 1$  esetek elfajultak, ezekkel nem foglalkozunk.

Koiller és Young munkájának az volt a célja, hogy meghatározza a szűkítő irányok megjelenéséhez kapcsolódó kritikus paraméterértékeket különböző struktúrájú csatolt rendszerek esetében. A disszertációban tanulmányozott rendszer esetében is az ő cikkükben lett először meghatározva az  $\varepsilon_2^* = 1/2$  érték, ezen felül karakterizálták az összes szinkronizációs jelenséget az  $N = 3$  esetben. Fernandez alaposabban tanulmányozta ezt a rendszert, és megmutatta hogy a szinkronizációt megelőzően egy kritikus paraméterértéktől kezdve egy másik jelenség is tapasztalható, az *ergodicitásvesztés*. Ismert, hogy a  $(\mathbb{T}^N, F_{0,N})$  csatolatlan rendszer (ahol  $F_{0,N}$  pusztán  $N$  darab  $2x \bmod 1$  leképezés direktszorzata) egyértelmű Lebesgue-abszolút folytonos invariáns mértékkel rendelkezik. Klasszikus eredményekből levezethető, (lásd például: [41]), hogy ez szintén igaz gyenge csatolás esetében, azaz kis  $\varepsilon$  mellett a  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon,N})$  rendszernek egyértelmű az abszolút folytonos invariáns mértéke. Ellenben könnyű megmutatni, hogy  $\varepsilon > 1/2$  esetében nincs abszolút folytonos invariáns mérték. Fernandez az  $N = 3$  esetben megmutatta, hogy létezik egy  $0 < \varepsilon_1^* < 1/2 = \varepsilon_2^*$  kritikus érték, hogy  $\varepsilon \geq \varepsilon_1^*$  csatolási erősség esetén *több abszolút folytonos invariáns mérték van*. (Azt is megmutatta, hogy  $N = 2$  esetében nincs ilyen kritikus érték.) Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a maximális tartójú invariáns mérték többé nem ergodikus, innen az ergodicitásvesztés elnevezés. Fernandez megfogalmazta a sejtést, hogy minden  $N \geq 4$  méretű rendszer esetében előfordul ergodicitásvesztés.

Ez a sejtés szolgáltatta a disszertációban lejegyzett kutatás kezdőpontját. Ezen túlmenően a rendszer további jellegzetességeit és egy kontinuum általánosítását is vizsgáltuk. A következő fejezetekben bemutatjuk a fő eredményeinket és tárgyaljuk a hasonlóságokat a Kuramoto modellről ismert tételekkel.

## 2. $N$ csatolt rendszer

Ebben a fejezetben az (1.2) egyenletek által definiált rendszert vizsgáljuk. Új koordinátákat vezetünk be, amelyek segítségével egy faktorrendszert definiálunk. Legyen

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{s=1}^N x_s \bmod 1, \\ u_{i+1} &= x_i - x_{i+1} \bmod 1, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Legyen  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a következő függvény:

$$h(v) = \begin{cases} 0 & v = (2k+1) \cdot \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -\lfloor v + 1/2 \rfloor & \text{egyébként,} \end{cases}$$

valamint  $c_i : [0, 1]^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 2, \dots, N$  a következő:

$$\begin{aligned} c_i(u_2, \dots, u_N) = & -2h(u_i) + \sum_{k=2}^{i-1} h\left(\sum_{j=k}^{i-1} u_j\right) - \sum_{k=i+1}^N h\left(\sum_{j=i}^k u_j\right) \\ & - \sum_{k=2}^{i-1} h\left(\sum_{j=k}^i u_j\right) + \sum_{k=i+1}^N h\left(\sum_{j=i+1}^k u_j\right) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Elemi számolások segítségével megmutatható, hogy a (2.1) koordinátákban a  $F_{\varepsilon, N}$  leképezés a következő alakú:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= 2u_1 \pmod{1}, \\ (G_{\varepsilon, N}(u_2, \dots, u_N))_i &= 2(1 - \varepsilon)u_i + \frac{2\varepsilon}{N}c_i(u_2, \dots, u_N) \pmod{1}, \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Látható, hogy  $G_{\varepsilon, N}$  folytonossági tartományonként egy  $2(1 - \varepsilon)$  arányú hasonlóság a tartománytól függő eltolással. A  $G_{\varepsilon, N}$  leképezés szakadási helyei a

$$u_i + u_{i+1} \cdots + u_{i+j} = (2k + 1) \cdot \frac{1}{2}, \quad i = 2, \dots, N, j = 0, \dots, N - i, k = 0, 1, \dots, j$$

síkok metszetei a  $\mathbb{T}^{N-1}$  tóruszal, tehát a folytonossági tartományok poliéderek.

Vegyük észre, hogy a  $(\mathbb{T}^N, T \times G_{\varepsilon, N})$  rendszer a  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  rendszer faktora, mert  $x = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{T}^N$  esetében a

$$(x_i)_{i=1}^N, \left(x_i + \frac{1}{N}\right)_{i=1}^N, \dots, \left(x_i + \frac{N-1}{N}\right)_{i=1}^N \quad (2.4)$$

pontoknak megegyeznek az  $u$ -koordinátái. (Az összeadást mod 1 értjük.) Ennek ellenére, a  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  rendszer ergodikus tulajdonságai ekvivalensek a  $(\mathbb{T}^{N-1}, G_{\varepsilon, N})$  rendszer megegyező ergodikus tulajdonságaival.

**2.1. Állítás.** *A  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  rendszer abszolút folytonos invariáns mértéke pontosan akkor egyértelmű mint a  $(\mathbb{T}^{N-1}, G_{\varepsilon, N})$  rendszeré. Továbbá,  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  abszolút folytonos invariáns mértéke pontosan akkor keverő mint a  $(\mathbb{T}^{N-1}, G_{\varepsilon, N})$  rendszeré.*

A következő két fejezetben bemutatjuk az ergodicitást és ergodicitásvesztést tárgyaló eredményeinket kis  $\varepsilon$  esetében, valamint a szinkronizációt tárgyaló eredményeinket elegendően nagy  $\varepsilon$  esetében. Az  $N = 2$  és  $N = 3$  méretű rendszerrel kapcsolatos eredményeink a [2] cikkben találhatóak, az  $N = 4$  méretű rendszert érintőek pedig a [57] cikkben.

## 2.1. Ergodicitás és ergodicitásvesztés

### N=2

Két csatolt rendszer esetében a következők az eredményeink:

**2.2. Tétel.** *Tekintsük a  $(\mathbb{T}^2, F_{\varepsilon, 2})$  rendszert.*

1. Legyen  $0 \leq \varepsilon < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . A rendszernek egyértelmű az abszolút folytonos invariáns mértéke, amely továbbá keverő.

2. Legyen  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ . A rendszer abszolút folytonos invariáns mértéke egyértelmű, de nem keverő.  $1 - \frac{2^n \sqrt{2}}{2} \leq \varepsilon < 1 - \frac{2^{n+1} \sqrt{2}}{2}$  esetén az attraktor  $2^n$  keverési komponens uniója.

*Keverési komponens* alatt az attraktor egy olyan részhalmazát értjük, amelyre a rendszer egy megfelelő hatványát megszorítva keverő rendszert kapunk. Tehát azt állítjuk, hogy  $1 - \frac{2^n \sqrt{2}}{2} \leq \varepsilon < 1 - \frac{2^{n+1} \sqrt{2}}{2}$  esetén az attraktor  $2^n$  halmaz uniója, amelyekre a rendszer  $2^n$ -edik hatványa egyenként megszorítva keverő.

Attraktor alatt a rendszer *Milnor attraktorát* értjük. Ez a legkisebb zárt halmaz, amely nullmértékű halmazt kivéve minden pont pályáját bevonzza. További részletekért lásd a [17, 48] hivatkozásokat.

A 2.1 Állítás alapján elég a tétel állításait a  $(\mathbb{T}, G_{\varepsilon,2})$  rendszerre bebizonyítani. A

$$G_{\varepsilon,2}(u) = \begin{cases} 2(1 - \varepsilon)u & \text{ha } 0 \leq u < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{ha } u = \frac{1}{2}, \\ 2(1 - \varepsilon)u + 2\varepsilon - 1 & \text{ha } \frac{1}{2} < u \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

egy Lorenz-féle intervallumleképezés, amelyet W. Parry [51] alaposan tanulmányozott. Így a bizonyítás számos fontos lépése a [51] cikk eredményein alapul, némi kiegészítéssel Glendinning és Sparrow [28] munkájából.

### N=3

Három csatolt rendszer esetében a következők az eredményeink:

**2.3. Tétel.** Tekintsük a  $(\mathbb{T}^3, F_{\varepsilon,3})$  rendszert és legyen  $\varepsilon^*(3) = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$ .

1. Legyen  $0 \leq \varepsilon < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . A rendszernek egyértelmű az abszolút folytonos invariáns mértéke.
2. Ha  $\varepsilon^*(3) \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ , a rendszernek legalább hat ergodikus abszolút folytonos invariáns mértéke van.

A 2.1 Állítás alapján elég a tétel állításait a  $(\mathbb{T}^2, G_{\varepsilon,3})$  rendszerre bizonyítani.

A tétel 1. állítását úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk a  $G_{\varepsilon,3}$  rendszerről, hogy  $\varepsilon$  elég kis értékeire lokálisan egy megfelelő iteráltja ráképező. A továbbiakban a 2. állítás bizonyításának stratégiáját ismertetjük. Ebben a dolgozatban egy  $F$  leképezés szimmetriája alatt egy olyan  $S$  lineáris transzformációt értünk amelyre az teljesül hogy

$$S \circ F = F \circ S.$$

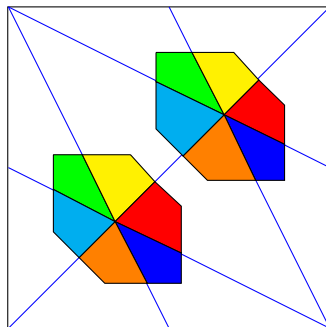
Az  $F_{\varepsilon,N}$  leképezés szimmetriái két forrásból származnak:

- A  $g$  függvény és a  $T(x) = 2x \pmod{1}$  leképezés inverziós szimmetriájából (tehát hogy  $g(1 - s) = 1 - g(s)$  és  $T(1 - s) = 1 - T(s)$  teljesül) következik  $F_{\varepsilon,N}$  inverziós szimmetriája. Azaz

$$F_{\varepsilon,N} \circ I = I \circ F_{\varepsilon,N},$$

ahol

$$I : (x_1, \dots, x_N) \rightarrow (1 - x_1, \dots, 1 - x_N).$$



2. ÁBRA.  $\mathcal{A}$  aszimmetrikus invariáns halmaz (zöld).  $\mathcal{A}$  szimmetrikus képei hat aszimmetrikus invariáns halmazt alkotnak. Színmagyarázat:  $S_3S_0(\mathcal{A})$  (sárga),  $S_1(\mathcal{A})$  (vörös),  $S_0(\mathcal{A})$  (kék),  $S_3(\mathcal{A})$  (narancs),  $S_1S_0(\mathcal{A})$  (világoskék).

- Az  $x_1, \dots, x_N$  koordináták minden permutációja szimmetriája az  $F_{\varepsilon, N}$  leképezésnek:

$$F_{\varepsilon, N} \circ \pi = \pi \circ F_{\varepsilon, N},$$

ahol  $\pi$  egy koordináta-permutációt jelöl.

Ezen leképezések által alkotott csoportot  $F_{\varepsilon, N}$  szimmetriacsoportjának fogjuk nevezni. Ez a szimmetriacsoport indukálja  $G_{\varepsilon, N}$  szimmetriacsoportját, amelyet  $S_{G, N}$ -el jelölünk. Az  $N = 3$  esetben a következő jelöléseket alkalmazzuk a szimmetriákra:  $S_0$  az  $I$  által indukált inverziós szimmetria,  $S_1$  a  $\pi_{12}$  által indukált szimmetria,  $S_2$  a  $\pi_{13}$  által és  $S_3$  a  $\pi_{23}$  által indukált szimmetria.

A következőkben definiáljuk hogy mit értünk *aszimmetrikus* és *invariáns* halmaz alatt.

**2.4. Definíció.** A  $\mathcal{B} \subset \mathbb{T}^{N-1}$  halmaz szimmetrikus az  $S \in S_{G, N}$  szimmetriára nézve, ha  $\mathcal{B} = S(\mathcal{B})$ , és aszimmetrikus az  $S \in S_{G, N}$  szimmetriára nézve, ha  $\mathcal{B}$  és  $S\mathcal{B}$  diszjunktak.

A  $\mathcal{B}$  halmaz szimmetrikus, ha  $S_{G, N}$  minden elemére szimmetrikus, és aszimmetrikus, ha  $S_{G, N}$ -nek van olyan eleme, amelyre nézve  $\mathcal{B}$  aszimmetrikus.

A továbbiakban röviden csak azt fogjuk mondani, hogy  $\mathcal{B}$  sérti az  $S$  szimmetriát, ha  $\mathcal{B}$  aszimmetrikus  $S$ -re nézve.

**2.5. Definíció.** A  $\mathcal{B} \subset \mathbb{T}^{N-1}$  halmaz (előre) invariáns ha  $G_{\varepsilon, N}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$  teljesül.

Vegyük észre, hogy ha  $\mathcal{B}$  invariáns a dinamikára nézve, akkor  $S\mathcal{B}$  is, hiszen

$$G_{\varepsilon, N}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow G_{\varepsilon, N}(S(\mathcal{B})) = SG_{\varepsilon, N}(\mathcal{B}) \subseteq S(\mathcal{B}).$$

Tegyük fel, hogy  $\mathcal{B}$  egy (nem feltétlenül összefüggő, de pozitív Lebesgue mértékű) poliéder vagy poliéderekből álló halmaz  $\mathbb{T}^{N-1}$ -ben. Továbbá tegyük fel, hogy sérti valamely  $S \in S_{G, N}$  szimmetriát. Így  $\mathcal{B}$   $S$  általi szimmetrikus képe is hasonló geometriájú tartomány, valamint diszjunkt  $\mathcal{B}$ -től. Mivel a leképezés egyenletesen tágító (hiszen  $\varepsilon < 1/2$ ), a [58, 1.7 Tétel] alapján  $S$  és  $S(\mathcal{B})$  is egy abszolút folytonos invariáns mérték tartója. Tehát egy aszimmetrikus invariáns halmaz több abszolút folytonos invariáns mérték létezését jelenti. Vagy egy másik nézőpontból úgy is tekinthetünk erre, hogy a maximális tartójú invariáns mérték ebben az esetben nem ergodik.

Tehát ha belátjuk egy aszimmetrikus invariáns halmaz létezését, bebizonyítjuk az ergodicitásvesztést. E célból konstruálunk egy  $\mathcal{A}$  halmazt, amely sért hat szimmetriát, és az ezen szimmetriákra tekintett szimmetrikus képei páronként diszjunktak. Ezután megmutatjuk, hogy  $\mathcal{A}$  invariáns a dinamikára nézve amennyiben  $\varepsilon \geq \frac{4-\sqrt{10}}{2}$ . A konstrukció első lépése az az észrevétel, hogy az attraktor az 1 Táblázatban leírt két hatszög uniójának részhalma. Azt vehetjük észre  $\varepsilon$  értékének a

	$H_1$	$H_2$
$\mathbf{u}$	$\varepsilon/3 < u < 1 - \sigma$	$\sigma < u < 1 - \varepsilon/3$
$\mathbf{v}$	$\varepsilon/3 < v < 1 - \sigma$	$\sigma < v < 1 - \varepsilon/3$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$	$\sigma < u + v < 1 - \varepsilon/3$	$1 + \varepsilon/3 < u + v < 2 - \sigma$

1. TÁBLÁZAT. Az attraktort tartalmazó hatszögek.  $[0, 1]^2$ -en a koordinátákat  $u, v$  jelöli, valamint  $\frac{2\varepsilon}{3}(2 - \varepsilon) = \sigma$ .

növekedése esetén, hogy egy kritikus érték alatt a két hatszög egy szimmetrikus invariáns halmazt tartalmaz. De amint átlép egy küszöbértéket a csatolási erősség, ez a szimmetrikus halmaz a 2 Ábrán kék vonalakkal jelölt szimmetriatengelyek mentén felbomlik hat invariáns halmazzra.  $\mathcal{A}$  pontos konstrukciója a 2 Ábráról leolvasható.

#### N=4

Négy csatolt rendszer esetében a következő az eredményünk:

**2.6. Tétel.** *Tekintsük a  $(\mathbb{T}^4, F_{\varepsilon,4})$  rendszert. Létezik egy  $\varepsilon^*(4) < 1/2$  érték, hogy  $\varepsilon^*(4) \leq \varepsilon < 1/2$  esetén a rendszernek legalább hat ergodikus abszolút folytonos invariáns mértéke van.*

Ahogy az  $N = 3$  esetben láttuk, elég megmutatni hogy a  $(\mathbb{T}^3, G_{\varepsilon,4})$  rendszernek van egy pozitív Lebesgue mértékű aszimmetrikus invariáns halmaza amely sért legalább hat szimmetriát.

A halmaz konstrukciójához először tekintsük a következő leképezést:

$$L_{\varepsilon/2}(s) = \begin{cases} 2(1 - \varepsilon)s + \frac{\varepsilon}{2} & \text{ha } \frac{\varepsilon}{2} < s < \frac{1}{2}, \\ 2(1 - \varepsilon)s + \frac{3\varepsilon}{2} - 1 & \text{ha } \frac{1}{2} < s < 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Ez egy középpontosan szimmetrikus Lorenz-leképezés, amelynek

$$p^* = \frac{(1 - \varepsilon)\varepsilon + 3\varepsilon/2 - 1}{1 - 4(1 - \varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon - 2}{4\varepsilon - 6} \quad (2.7)$$

kettő periódusú pontja. Jelöljük  $[0, 1]^3$ -en a koordinátákat az  $u, v$  és  $w$  betűkkel. Defináljuk a  $P_1$  és  $P_2$  poliédereket a 2 Táblázatban található egyenlőtlenségekkel.

Rögzítsük a következő jelöléseket a szimmetriákra:  $S_0$  az  $I$  által indukált szimmetria,  $S_1$  a  $\pi_{12}$  által,  $S_2$  a  $\pi_{13}$  által,  $S_3$  a  $\pi_{14}$  által,  $S_4$  a  $\pi_{23}$  által,  $S_5$  a  $\pi_{24}$  által és  $S_6$  a  $\pi_{34}$  által indukált szimmetria.

A bizonyítás során megmutatjuk, hogy amennyiben  $\varepsilon^*(4)$  az egyértelmű valós megoldása a

$$p^* = (1 - \varepsilon)^2, \quad \text{vagy explicitebben a } 4\varepsilon^3 - 14\varepsilon^2 + 15\varepsilon - 4 = 0$$

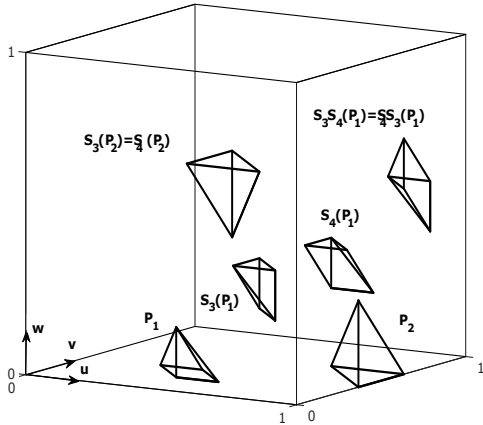
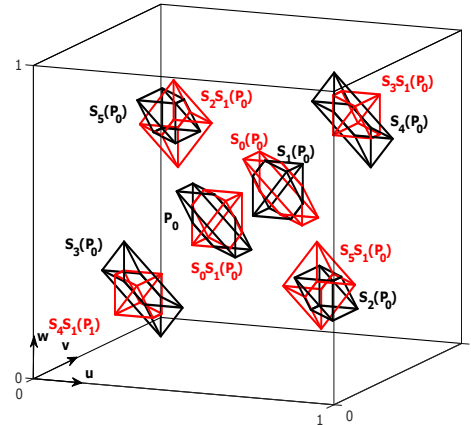
egyenletnek, akkor a

$$\mathcal{A} = P_1 \cup P_2 \cup S_3(P_1) \cup S_4(P_1) \cup S_3S_4(P_1) \cup S_3(P_2)$$



	$P_1$	$P_2$
$\mathbf{u}$		$u < 1$
$\mathbf{v}$	$v > \varepsilon/2$	
$\mathbf{w}$	$w > 0$	$w > 0$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$	$u + v > 1 - p^*$	$u + v > 1 + p^*$
$\mathbf{v} + \mathbf{w}$	$v + w < p^*$	$v + w < 1 - p^*$
$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$	$u + v + w < 1 - \varepsilon/2$	

2. TÁBLÁZAT

(a) Az aszimmetrikus  $\mathcal{A}$  halmaz.(b) A szimmetrikus  $\mathcal{S}$  halmaz.

halmaz szimmetrikus az  $S_3$  és  $S_4$  szimmetriákra nézve, de sérti a

$$S_0, S_1, S_2, S_5, \text{ és } S_6$$

szimmetriákat. Továbbá a  $\mathcal{A}$ ,  $S_0(\mathcal{A})$ ,  $S_1(\mathcal{A})$ ,  $S_2(\mathcal{A})$ ,  $S_5(\mathcal{A})$  és  $S_6(\mathcal{A})$  halmazok páronként diszjunktak. Végül belátjuk, hogy  $\mathcal{A}$  invariáns a  $G_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  dinamikára pontosan akkor ha

$$0.397 \approx \varepsilon^*(4) \leq \varepsilon.$$

A 2.6 Tételen felül van még egy eredményünk. Konstruálunk egy olyan szimmetrikus  $\mathcal{S}$  halmazt, amely szimulációs eredmények alapján tartalmazza az attraktort ha  $\varepsilon$  elég nagy, de még kisebb mint  $\varepsilon^*(4)$ . Ha  $\varepsilon$  nagyobb mint  $\varepsilon^*(4)$ , azt vesszük észre, hogy az előzőekben megszerkesztett aszimmetrikus invariáns halmazok  $\mathcal{S}$  halmazon kívül találhatóak. Ez újdonság az  $N = 3$  esethez képest, ahol az aszimmetrikus halmazok a szimmetrikus attraktor dekompozíciójaként jelentek meg.

Legyen  $P_0$  az alábbi poliéder:

	$P_0$
$\mathbf{u}$	$L_{\varepsilon/2}(\varepsilon/2) < u < L_{\varepsilon/2}(1 - \varepsilon/2)$
$\mathbf{v}$	$\varepsilon/2 < v < L_{\varepsilon/2}^2(1 - \varepsilon/2)$
$\mathbf{w}$	$L_{\varepsilon/2}(\varepsilon/2) < w < L_{\varepsilon/2}(1 - \varepsilon/2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$	$1 + \varepsilon/2 < u + v + w < 1 + L_{\varepsilon/2}^2(1 - \varepsilon/2)$

A következőt állítjuk:

## 2.7. Állítás. A

$$\mathcal{S} = P_0 \cup S_0(P_0) \cup S_1(P_0) \cup S_2(P_0) \cup S_3(P_0) \cup S_4(P_0) \cup S_5(P_0) \\ S_0S_1(P_0) \cup S_2S_1(P_0) \cup S_3S_1(P_0) \cup S_4S_1(P_0) \cup S_5S_1(P_0)$$

halmaz szimmetrikus és invariáns a  $G_{\varepsilon, A}$  leképezésre nézve pontosan akkor ha

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \varepsilon.$$

## 2.2. Szinkronizáció

Ebben a fejezetben a  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  rendszert a csatolási erősség szűkítő tartományában vizsgáljuk, tehát amikor  $\varepsilon \in (1/2, 1)$ . Így a a faktorrendsszer második komponense,  $(\mathbb{T}^{N-1}, G_{\varepsilon, N})$ , egy szakaszonként szűkítő hasonlóság, tehát abszolút folytonos invariáns mérték létezése nem remélhető. Ennek ellenére érdemes az attraktort tanulmányozni, mert bizonyos tulajdonságai értelmezhetőek az  $N$ -részcsekés rendszer különböző típusú szinkronizációjaiként. Ezen jelenségek teljes leírása túlmutat a lehetőségeinken, a célunk pár érdekes példa felsorolása  $N$  különböző értékei esetén.

Ezek az eredmények nem lettek korábban publikálva, kivéve az  $N = 2$  és  $N = 3$  speciális esetekre vonatkozóakat.

### Teljes szinkronizáció

Legyen

$$\Delta_N = \{x \in \mathbb{T}^N : x_1 = \dots = x_N\}.$$

Ez a halmaz olyan állapotoknak felel meg az  $N$  részcsekés rendszerben, ahol a részcsekék egyetlen klasztert alkotnak. Ezt hívjuk *teljesen szinkronizált* állapotnak. Azt állítjuk, hogy ez az állapot aszimptotikusan stabil a szűkítő tartományban.

**2.8. Állítás.** *Legyen  $N > 1$  és tekintsük a  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  rendszert  $\varepsilon \in (1/2, 1)$  esetén. Ekkor  $\Delta_N$  kezdeti állapotok egy nyílt halmazának trajektóriáját vonzza. Az  $N = 2$  esetben  $\Delta_2$  minden trajektóriát vonz.*

### Részleges szinkronizáció

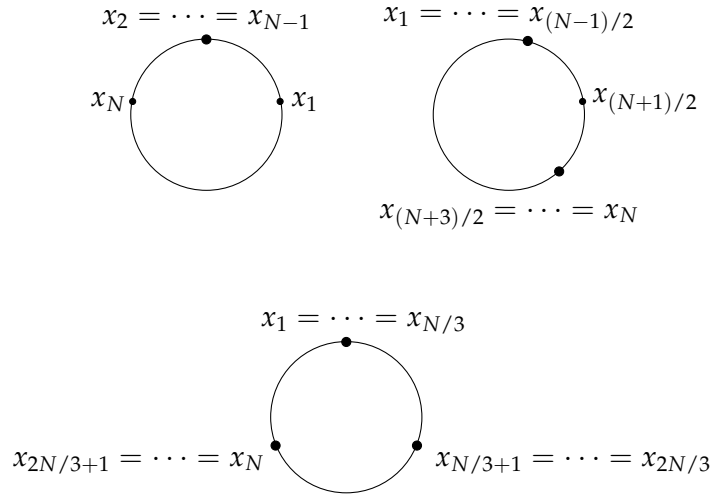
*Egyenletes eloszlású formáció.* Legyen  $N \geq 3$  páratlan. Tekintsük az alábbi halmazt:

$$\Sigma_N = \{(x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{T}^N : x_i - x_j = \frac{k}{N}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \ell N, \ell \in \mathbb{Z}, \quad \forall i \neq j = 1, \dots, N\}.$$

Vegyük észre, hogy  $\Sigma_N$  elemei olyan állapotoknak felelnek meg, ahol az  $N$  részecske egyenletesen oszlik el a körön. A következőt állítjuk:

**2.9. Állítás.** *Legyen  $N \geq 3$  páratlan, és tekintsük a  $(\mathbb{T}^N, F_{\varepsilon, N})$  rendszert  $\varepsilon \in (1/2, 1)$  esetén. A  $\Sigma_N$  halmaz invariáns és kezdeti állapotok egy nyílt halmazának trajektóriáit vonzza. Az  $N = 3$  esetben  $\Delta_3 \cup \Sigma_3$  vonz majdnem minden trajektóriát.*

*Egy klaszter.* Legyen  $N \geq 4$ . Tekintsünk egy olyan formációt ahol van egy  $N - 2$  részecske által alkotott klaszter, a másik két részecske pedig egyenlő távolságra van a klaszter egy-egy oldalán. Azt állítjuk, hogy egy ilyen formáció aszimptotikusan stabil abban az értelemben, ahogy ezt a teljes szinkronizáció és az egyenletes eloszlás esetében definiáltuk.



4. ÁBRA. Klaszterek típusai: egy klaszter, két klaszter és azonos méretű klaszterek.

**2.10. Állítás.** Legyen  $\varepsilon \in (1/2, 1)$  és  $N < \frac{4\varepsilon}{2\varepsilon-1}$ . Tekintsük azt a formációt ahol  $x_i$  egyenlő minden  $i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j, k\}$  esetében, valamint  $g(x_j - x_i) = g(x_i - x_k) = d_1$  ( $i \neq j, k$ ). Ha

$$d_1 = \pm \frac{2\varepsilon - N}{2\varepsilon N - 3N},$$

akkor egy ilyen formáció invariáns és aszimptotikusan stabil.

*Két klaszter.* Legyen  $N \geq 5$ . Tekintsünk egy olyan formációt, ahol két egyenlő méretű klaszter van egyenlő távolságra egy központi részecskétől, lásd a 4 Ábra jobb felső részét. Azt állítjuk, hogy egy ilyen formáció aszimptotikusan stabil.

**2.11. Állítás.** Legyen  $\varepsilon \in (1/2, 1)$  és  $N < \frac{4\varepsilon}{2\varepsilon-1}$ . Tekintsük azt a formációt, ahol  $x_1 = \dots = x_{(N-1)/2}$ ,  $x_{(N+3)/2} = \dots = x_N$  és  $g(x_{(N+1)/2} - x_1) = g(x_N - x_{(N+1)/2}) = d_2$ . Ha

$$d_2 = \pm \frac{2\varepsilon(N-1) - N}{2\varepsilon N - 3N},$$

akkor egy ilyen formáció invariáns és aszimptotikusan stabil.

*Egyenlő méretű klaszterek.* Legyen  $N \geq 6$ , és tegyük fel, hogy nem kettő hatványa. Ez azt jelenti, hogy  $N$  egy páratlan szám többszöröse, azaz  $N = kM$ , ahol  $M$  páratlan. Tekintsünk egy olyan formációt, ami  $M$  egyenletesen elhelyezkedő klaszterből áll, és mindegyik  $k$  részecskét tartalmaz, lásd a 4 Ábra alján az  $M = 3$  esetet. Azt állítjuk, hogy egy ilyen formáció aszimptotikusan stabil.

**2.12. Állítás.** Legyen  $\varepsilon \in (1/2, 1)$  és  $N = kM$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M$  páratlan. Ekkor egy  $M$  darab  $k$  méretű, egyenletesen elhelyezkedő klaszterből álló formáció invariáns és aszimptotikusan stabil.

Ezek a jelenségek a Kuramoto modellben tapasztalható szinkronizációra emlékeztetnek [7, 22, 31]: ismert, hogy teljes fázisszinkronizáció tapasztalható ha  $\omega_i$  független  $i$ -től. Azaz a fázisok aszimptotikusan egyenlővé válnak, pont mint a mi teljes szinkronizációs esetünkben. Ha általánosabb feltételeket teszünk a Kuramoto oszcillátorokra, az látható be hogy a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta_i - \theta_j|$$

határérték minden  $(i, j)$  pár esetében létezik, amennyiben a csatolás elég erős. Ez hasonlít a részleges szinkronizációs eredményeinkre.

### 3. A kontinuum rendszer

Ebben a fejezetben az  $N$  részecskés rendszerünk általánosítását definiáljuk kontinuum sok kölcsönható egység esetére.

Legyen  $\mu_0$  egy Borel valószínűségi mérték a  $\mathbb{T}$  tóruszon. Ez a mérték jelképezi a kontinuum sok részecske eloszlását. A dinamika definíciója legyen az alábbi:

$$F_{\varepsilon, \mu_0} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad F_{\varepsilon, \mu_0} = T \circ \Phi_{\varepsilon, \mu_0},$$

ahol  $T$  egy tágító körvonal leképezés (amelynek tulajdonságait a későbbiekben pontosítjuk) és  $\Phi_{\varepsilon, \mu_0}$  az alábbi csatolási függvény:

$$\Phi_{\varepsilon, \mu_0} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \Phi_{\varepsilon, \mu_0}(x) = x + \varepsilon \int_{\mathbb{T}} g(y - x) d\mu_0(y).$$

Itt  $g(\cdot)$  az a távolságfüggvény amit a 1 Fejezetben definiáltunk. A csatolási erősségről az egész fejezetben feltesszük, hogy  $0 \leq \varepsilon < 1$ .

Mostantól feltesszük, hogy  $\mu_0$  abszolút folytonos a  $\lambda$  Lebesgue mértékre nézve, a sűrűségfüggvényére a

$$\frac{d\mu_0}{d\lambda} = f_0 \in L^1(\mathbb{T})$$

jelölést használjuk. A  $\mu_0$  mértéket előretolva a  $F_{\varepsilon, \mu_0}$  dinamikával megkapjuk a részecskék eloszlását a csatolt dinamika egy iterációja után. Folytatva ezt, a

$$\mu_{n+1} = (F_{\varepsilon, \mu_n})_* \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

mértékek sorozatát kapjuk, amelyek leírják a részecskék állapotát az egyes időpontokban. A  $T$ -re vonatkozó (monotonitási) feltevéseink amelyeket később részletezünk, biztosítani fogják, hogy az előretolt mértékek mind abszolút folytonosak legyenek. A továbbiakban a  $F_{\varepsilon, f_0} = T \circ \Phi_{\varepsilon, f_0}$  jelölést fogjuk használni, ahol

$$\Phi_{\varepsilon, f_0}(x) = x + \varepsilon \int_{\mathbb{T}} g(y - x) f_0(y) dy. \quad (3.1)$$

Tehát a fenti mértékek sorozata helyett dolgozhatunk a sűrűségfüggvények

$$f_{n+1} = P_{F_{\varepsilon, f_n}} f_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

sorozatával is, ahol  $P_{F_{\varepsilon, f_n}}$  az  $F_{\varepsilon, f_n}$  dinamikához asszociált Perron-Frobenius (vagy transzfer) operátort jelöli. Ennek az operátornak a következő a definíciója:  $h \in L^1(\mathbb{T})$  esetén  $P_{F_{\varepsilon, f}} h$  az az egyértelmű eleme  $L^1(\mathbb{T})$ -nek, amelyre

$$\int_A P_{F_{\varepsilon, f}} h d\lambda = \int_{F_{\varepsilon, f}^{-1}(A)} h d\lambda$$

teljesül minden  $A$  Borel halmazra. Explicit formula is adható, amennyiben a  $h$  sűrűség és az  $F_{\varepsilon, f}$  dinamika elég sima (ez az estünkben fenn fog állni):

$$(P_{F_{\varepsilon, f}} h)(y) = \sum_{x \in F_{\varepsilon, f}^{-1}(y)} \frac{h(x)}{|F'_{\varepsilon, f}(x)|} \quad y \in \mathbb{T}.$$

Mivel a dinamika az adott lépésben függ a részecskék adott lépésbeli állapotától,

látható a (3.2) egyenletből, hogy a transzfer operátor *önkonzisztens* abban az értelemben, hogy függ attól az  $f_n$  függvénytől amelyre alkalmazzuk. Vegyük észre, hogy mivel  $F_{\varepsilon,f} = T \circ \Phi_{\varepsilon,f}$ , fennáll hogy  $P_{F_{\varepsilon,f}} = P_T P_{\Phi_{\varepsilon,f}}$ . Vezessük be a kényelmesebb

$$\mathcal{F}_\varepsilon(f) = P_{F_{\varepsilon,f}} f \quad f \in L^1(\mathbb{T})$$

jelölést.

Azt állítjuk, hogy a  $\mu_n$   $n$  időpontbeli mérték Lipschitz folytonosan függ a  $\mu_0$  kezdeti mértéktől a gyenge topológiában.

Emlékeztetjük az olvasót, hogy a gyenge topológia metrizálható a *korlátos Lipschitz távolsággal* (lásd például [11, 8.3.2 Tétel]), amely definíció szerint

$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{T}} \varphi d\nu \right|, \text{Lip}(\varphi) \leq 1 \right\},$$

a  $\mu, \nu$   $\mathbb{T}$ -n értelmezett valószínűségi mértékekre, ahol  $\text{Lip}(\varphi)$  a  $\varphi$  függvény Lipschitz konstansát jelöli. Emlékezzünk, hogy az  $n$  időpontbeli mérték sűrűségfüggvényét  $f_n$ -el jelöltük.

**3.1. Állítás.** *Legyen  $T \in C^1(\mathbb{T})$ . Tegyük fel továbbá, hogy  $f_n, \tilde{f}_n \in C(\mathbb{T})$  és  $|f_n|, |\tilde{f}_n| \leq M$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Ekkor létezik egy  $K = K(T', M) > 0$  konstans, hogy*

$$d_{BL}(\mu_n, \tilde{\mu}_n) \leq K^n \cdot d_{BL}(\mu_0, \tilde{\mu}_0).$$

A sűrűségfüggvények folytonossága és egyenletes korlátossága erős megszorításnak tűnhet, de a továbbiakban vizsgált esetekben fenn fog állni. Megjegyezzük továbbá, hogy ez az eredmény ezelőtt nem lett publikálva.

A Kuramoto modell esetében jól ismert, hogy a  $t$  időpontbeli mérték Lipschitz folytonosan függ a kezdeti mértéktől a korlátos Lipschitz távolság szerint [19]. A bizonyítás természetesen erősen kihasználja a csatolás definíciójában lévő szinusz függvény Lipschitz folytonosságát. A mi esetünkben  $g(\cdot)$  még csak nem is folytonos, de az derült ki, hogy ez nem akadályozza hogy az  $n$  időpontbeli mérték Lipschitz folytonos függését belássuk.

A következő fejezetekben bemutatjuk az eredményeinket a kontinuum rendszer aszimptotikus viselkedéséről. A 3.1 Fejezetben kis  $\varepsilon$  esetével foglalkozunk, a 3.2 Fejezetben pedig  $\varepsilon \gg 0$  feltevessel élünk. Mindkét fejezetben először azzal az egyszerű esettel motiváljuk a további eredményeinket, amikor  $T(x) = 2x \pmod{1}$ . Ezeket az eredményeket a [2] cikkben publikáltuk. Ezután tárgyaljuk azt az esetet, amikor  $T$  egy általánosabb egyenletesen tágító leképezés. Ezeket az eredményeket a [3] cikkben publikáltuk.

### 3.1. Az invariáns eloszlás stabilitása

Ebben a fejezetben a gyenge csatolás esetén érvényes eredményeinket mutatjuk be, tehát amikor  $\varepsilon$  közel van a nullához. A fejezet során végig feltesszük, hogy  $T$  egy legalább  $C^2$  sima leképezése a  $\mathbb{T}$  tórusznak és tágító (később további feltevéseket is megfogalmazunk). Jól ismert eredmények alapján ebből következik, hogy  $T$  rendelkezik egy egyértelmű  $h = P_T h$  invariáns sűrűségfüggvénnyel amely folytonosan differenciálható [43] (vagy pedig lásd [4, 2.2 Fejezet]). Továbbá,

$$P_T^n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$$

exponenciális sebességgel minden  $f \in L^1(\mathbb{T})$ -re. Erre a rendszerre gondolhatunk úgy is, mint a csatolt rendszerünk csatolatlan ( $\varepsilon = 0$ ) esetére hiszen  $T = F_{0,f}$ . Amint viszont létezik csatolás, a dinamika (és így az asszociált transzfer operátor is) lépésről lépésre változik a részecskék eloszlásának változását követve. Ez nagyban megnehezíti a számolásokat, de a jelenség szintjén a csatolatlan esethez hasonló dolgokra számítunk elég kis  $\varepsilon$  mellett.

A fejezet első részében azzal az esettel foglalkozunk amikor  $T(x) = 2x \pmod{1}$ . Ez a modell a 2 Fejezetben leírt véges modell egyenes általánosítása, és lehetőséget ad arra, hogy bemutassuk az érdekes jelenségeket egy egyszerű esetben. Ezután megmutatjuk, hogy az állításink kissé gyengébb formában átvihetők az általánosabb sima, tágító  $T$  leképezések esetére is.

### Csatolt $2x \pmod{1}$ leképezések.

Tekintsük a

$$F_{\varepsilon,f} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad F_{\varepsilon,f}(x) = 2 \left( x + \varepsilon \int_0^1 g(y-x)f(y)dy \right) \pmod{1} \quad (3.3)$$

rendszert, ahol  $f \in C^1(\mathbb{T})$  sűrűségfüggvény, ami azt jelenti hogy  $\int_{\mathbb{T}} f \, d\lambda = 1$  és  $f \geq 0$ .

Jelölje  $\text{var}(f)$  az  $f$  függvény teljes megváltozását, és legyen  $\|f\|_{BV} = \text{var}(f) + \int_{\mathbb{T}} |f| \, d\lambda$  a BV-norma.

Könnyű látni, hogy az egyenletes sűrűség invariáns ebben a csatolt rendszerben  $\varepsilon$  tetszőleges értéke mellett. Azt állítjuk, hogy megfelelően kis csatolás esetén az elég egyenletes kezdeti sűrűségek exponenciális sebességgel kisimulnak.

**3.2. Tétel.** *Legyen  $f \in C^1(\mathbb{T})$  olyan, hogy  $\text{var}(f) \leq \delta$  egy  $\delta > 0$  értékre. Tegyük fel, hogy  $\varepsilon > 0$  olyan, hogy*

$$\varepsilon < \frac{1}{1+4\delta}.$$

*Ekkor létezik egy  $q = q(\varepsilon, \delta) < 1$  konstans, hogy*

$$\text{var}(\mathcal{F}_\varepsilon^{n+1}(f)) \leq q \cdot \text{var}(\mathcal{F}_\varepsilon^n(f)) \quad n = 0, 1, \dots$$

*amelyből következik, hogy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_\varepsilon^n(f) - \mathbf{1}\|_{BV} = 0.$$

### Csatolt tágító körvonal leképezések.

Ebben a fejezetben a következőket tesszük fel az  $f$  sűrűségekről és a  $T$  dinamikáról:

(F)  $f \in C^1(\mathbb{T})$ ,  $f'$  Lipschitz folytonos,  $f$  sűrűségfüggvény,

(T)  $T \in C^2(\mathbb{T})$ ,  $T''$  Lipschitz folytonos és  $T$  szigorúan tágító: azaz  $\min |T'| = \omega > 1$ . Továbbá feltesszük, hogy  $T$  egy  $N$ -szeres fedőleképezése a  $\mathbb{T}$  tórusznak, amely  $N$  egész számra fennáll, hogy

$$N < \omega^2.$$

Tekintsük a

$$\mathcal{C}_{R,S}^c = \{f \text{ rendelkezik (F) tulajdonsággal, } \text{var}(f) \leq R, |f'| \leq S, \text{Lip}(f') \leq c\},$$

halmazt, ahol  $R, S, c > 0$  és  $\text{Lip}(f)$ -el jelöljük  $f$  Lipschitz konstansát.

**3.3. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $T$  rendelkezik a (T) tulajdonsággal. Ekkor léteznek  $R^*, S^*$  és  $c^* > 0$  konstansok, hogy minden  $R > R^*, S > S^*$  és  $c > c^*$  esetén létezik egy  $\varepsilon^* = \varepsilon^*(R, S, c) > 0$  küszöbérték, amelyre az alábbi teljesül: Bármely  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon^*$  esetén létezik egy  $f_*^\varepsilon \in C_{R^*, S^*}^c$  sűrűségfüggvény amelyre  $\mathcal{F}_\varepsilon(f_*^\varepsilon) = f_*^\varepsilon$ . Továbbá*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\varepsilon^n(f) = f_*^\varepsilon \quad \text{exponenciálisan minden } f \in C_{R, S}^c \text{ esetén,}$$

abban az értelemben hogy létezik egy  $C = C(\varepsilon, R, S, c) > 0$  és egy  $\gamma = \gamma(\varepsilon) \in (0, 1)$  konstans hogy

$$\|\mathcal{F}_\varepsilon^n(f) - f_*^\varepsilon\|_{BV} \leq C\gamma^n \|f - f_*^\varepsilon\|_{BV} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ és } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon^* \text{ esetén.}$$

A  $2x \bmod 1$  leképezés esetével ellentétben most nem állítható, hogy  $\mathcal{F}_\varepsilon$  invariáns sűrűsége ugyanaz minden  $\varepsilon$  értékre. Viszont azt állítjuk, hogy ha nem is konstans, de Lipschitz folytonos függvénye  $\varepsilon$ -nak az invariáns sűrűség.

**3.4. Tétel.** *Tegyük fel hogy  $T$  rendelkezik a (T) tulajdonsággal. Legyen  $R, S, c$  és  $\varepsilon^*$  a 3.3 Tétel alapján választva. Ekkor létezik egy  $K(R, S, c) = K > 0$  konstans, hogy bármely  $0 \leq \varepsilon, \varepsilon' < \varepsilon^*$  esetén*

$$\|f_*^\varepsilon - f_*^{\varepsilon'}\|_{BV} \leq K|\varepsilon - \varepsilon'|$$

teljesül az  $f_*^\varepsilon, f_*^{\varepsilon'} \in C_{R, S}^c$  sűrűségekre, amelyekre  $\mathcal{F}_\varepsilon(f_*^\varepsilon) = f_*^\varepsilon$  és  $\mathcal{F}_{\varepsilon'}(f_*^{\varepsilon'}) = f_*^{\varepsilon'}$  fennáll.

## 3.2. Szinkronizáció

A 2.2 Fejezetben különböző szinkronizációs jelenségeket mutattunk be az  $N$  darab erősen csatolt részecskéből álló modell esetén. Hasonló jelenségekre számíthatunk a jelenleg tanulmányozott kontinuum modell esetén. Ebben a fejezetben a véges rendszer teljes szinkronizációjának a kontinuum megfelelőjét mutatjuk be.

Azt mondjuk hogy egy sűrűségfüggvény *lokalizált*, ha rendelkezik az alábbi (F') tulajdonsággal:

(F')  $f$  sűrűségfüggvény, és létezik egy  $I \subset \mathbb{T}, \lambda(I) \geq \frac{1}{2}$  intervallum, hogy  $\text{supp}(f) \cap I = \emptyset$ .

Jelöljük  $\text{supp}^*(f)$ -el a legkisebb zárt intervallumot  $\mathbb{T}$ -n, amely tartalmazza  $f$  tartóját. Ez jóldefiniált fogalom abban az esetben, ha  $f$  lokalizált.

A fejezet szerkezet hasonló a 3.1 Fejezetéhez. Először bemutatjuk a  $2x \bmod 1$  leképezést illető eredményeinket, majd megmutatjuk, hogy ezek általánosíthatók körvonal leképezések egy tágabb osztályára.

### Csatolt $2x \bmod 1$ leképezések szinkronizációja.

Tekintsük a (3.3) egyenlet alapján definiált csatolt leképezést, azaz legyen

$$F_{\varepsilon, f} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad F_{\varepsilon, f}(x) = 2 \left( x + \varepsilon \int_0^1 g(y-x)f(y) dy \right) \bmod 1,$$

ahol  $f$  rendelkezik az (F') tulajdonsággal. Így  $\text{supp}^*(f)$  reprezentálható egy  $[a_1, a_2] \subset [0, 1]$  intervallummal, amelyre  $a_2 - a_1 \leq \frac{1}{2}$ , vagy pedig két intervallum  $[0, b_2] \cup [b_1, 1] \subset [0, 1]$  uniójával, amelyekre  $1 - (b_1 - b_2) \leq \frac{1}{2}$  teljesül.

A  $\text{supp}(f) \subseteq [a_1, a_2]$  esetben legyen a tömegközéppont definíciója

$$M(f) = \int_{a_1}^{a_2} yf(y) dy, \quad (3.4)$$

a  $\text{supp}(f) \subseteq [0, b_2] \cup [b_1, 1]$  esetben pedig

$$M(f) = \int_0^{b_2} (y+1)f(y) dy + \int_{b_1}^1 yf(y) dy \quad \text{mod } 1. \quad (3.5)$$

Azt állítjuk, hogy lokalizált sűrűségfüggvény esetében  $\mathcal{F}_\varepsilon(f)$  az  $f$  egy  $2(1-\varepsilon)$  arányú lineáris átskalázása (ez kontrakció  $\varepsilon > 1/2$  esetén) és egy olyan mértékű eltolása, hogy a tömegközéppont  $2x \text{ mod } 1$  szerint mozduljon el. Ez alapján az abszolút folytonos mértékek sorozata egy olyan mozgó pontmértéksorozathoz közeledik, amely tartója az eredeti sűrűség tömegközéppontjának  $2x \text{ mod } 1$  szerinti pályája.

**3.5. Tétel.** *Legyen  $\varepsilon \in (1/2, 1)$ . Ha  $f$  rendelkezik az  $(F')$  tulajdonsággal, akkor  $\mathcal{F}_\varepsilon(f)$  is. Továbbá*

- $|\text{supp}^*(\mathcal{F}_\varepsilon(f))| = 2(1-\varepsilon)|\text{supp}^*(f)|,$
- $\sup \mathcal{F}_\varepsilon(f) = \frac{\sup f}{2(1-\varepsilon)},$
- $M(\mathcal{F}_\varepsilon(f)) = 2M(f) \text{ mod } 1.$

Ebből következik, hogy  $\frac{d\mu_n}{d\lambda} = \mathcal{F}_\varepsilon^n(f)$  és  $T(x) = 2x \text{ mod } 1$  jelöléseket használva

$$d_{BL}(\mu_n, \delta_{T^n(M(f))}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{exponenciálisan}$$

abban az értelemben, hogy

$$d_{BL}(\mu_n, \delta_{T^n(M(f))}) \leq [2(1-\varepsilon)]^n \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Vegyük észre, hogy az  $\varepsilon > 1/2$  tartományban eléggé egyenletes kezdeti eloszlásokra érvényes a 3.2 Tétel, tehát az eloszlás aszimptotikusan egyenletes lesz  $\mathbb{T}$ -n. Viszont az eléggé koncentrált kezdeti eloszlásokra a 3.5 Tétel érvényes, azaz aszimptotikusan minden részecske egy pontba koncentrálnak. Ez hasonló ahhoz, amit a véges rendszerben tapasztaltunk a szűkítő esetben: az eléggé koncentrált kezdeti eloszlások teljesen szinkronizálódnak (2.8 Állítás) míg az eléggé kiterjedt kezdeti eloszlások egyenletes formációvá rendeződnek (2.9 Állítás). Ez a jelenség azért érdekes, mert ehhez hasonló nem tapasztalható a Kuramoto modellben.

### Folytonos körvonal leképezések szinkronizációja.

Ebben a fejezetben általánosítjuk a  $2x \text{ mod } 1$  leképezésre vonatkozó eredményeinket körvonal leképezések egy általánosabb családjára. Tegyük fel az alábbiakat:

$$(T') \quad T \in C^1(\mathbb{T}), |T'| > \omega > 0.$$

A továbbiakban használjuk az  $\Omega = \max |T'|$  jelölést. Vegyük észre, hogy nem tettünk fel tágítást, mert ennek nincsen szerepe a szinkronizáció létrejöttében. Épp ellenkezőleg, azt fogjuk látni, hogy nagyobb  $\Omega$  esetében lassabb a konvergencia a szinkronizált állapothoz.



**3.6. Tétel.** Tegyük fel, hogy  $f$  rendelkezik az  $(F')$ , valamint  $T$  a  $(T')$  tulajdonsággal. Legyen  $1 - \frac{1}{\Omega} < \varepsilon < 1$ . Ekkor

$$|\text{supp}^*(\mathcal{F}_\varepsilon^n(f))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{exponenciálisan}$$

abban az értelemben, hogy

$$|\text{supp}^*(\mathcal{F}_\varepsilon^n(f))| \leq [\Omega(1 - \varepsilon)]^n |\text{supp}^*(f)| \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Továbbá a  $\frac{d\mu_n}{d\lambda} = \mathcal{F}_\varepsilon^n(f)$  jelölést használva azt állítjuk, hogy létezik egy  $x^* \in \text{supp}^*(f)$  pont hogy

$$d_{BL}(\mu_n, \delta_{T^n(x^*)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{exponenciálisan}$$

abban az értelemben, hogy

$$d_{BL}(\mu_n, \delta_{T^n(x^*)}) \leq [\Omega(1 - \varepsilon)]^n \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Megjegyezzük, hogy az  $\varepsilon > 1 - 1/\max|T'|$  tartományban bizonyos abszolút folytonos eloszlások a 3.3 Tétel alapján a tételben megfogalmazott invariáns eloszláshoz konvergálnak, míg egyéb, lokalizált eloszlások pontmértékhez tartanak a 3.6 Tétel állítása szerint.

## 4. Összefoglalás és kitekintés

A disszertációban globálisan csatolt körvonal leképezések különböző aszimptotikus tulajdonságait tanulmányoztuk.

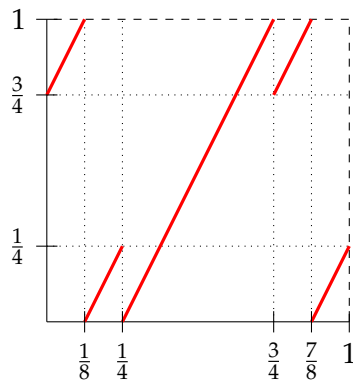
A disszertáció első részében véges sok csatolt  $2x \pmod{1}$  leképezést tekintettünk. Ez a csatolt rendszer  $N$  darab, a körvonalon mozgó kölcsönható részecskét modellezett. A 2.1 Fejezetben megmutattuk, hogy  $N = 3$  és  $N = 4$  esetében elég erős csatolás mellett a rendszernek létezik egy inverziószimmetriát sértő invariáns halmaza. Ebből az következik, hogy a rendszer  $\varepsilon \approx 0$  esetben jól ismert ergodicitása nincs jelen a tágító tartomány egészében. A 2.2 Fejezetben megmutattuk, hogy a szűkítő tartományban, azaz kellően erős csatolás mellett, a Kuramoto modell csatolt oszcillátorainak szinkronizációjához hasonló jelenségeket tapasztalhatunk.

A disszertáció második részében definiáltuk a kontinuum verzióját a csatolt rendszerünknek. Itt a részecskék eloszlását egy sűrűségfüggvény reprezentálta és a kezdeti sűrűség önkonzisztens Perron-Frobenius operátor általi fejlődését tanulmányoztuk. A 3.1 fejezetben megmutattuk, hogy ha a  $T$  egyéni dinamika elég *simá*, egyértelmű invariáns sűrűség létezik (amely Lipschitz folytonos függvénye a csatolási erősségnek). Továbbá egy megfelelő függvényosztályból a sűrűségek exponenciális sebességgel konvergálnak ehhez az invariáns elemhez. A 3.2 Fejezetben megmutattuk, hogy a lokalizált kezdeti eloszlások egy kaotikusan mozgó pontmértékhez tartanak. Ez a jelenség jelenség értelmezhető a csatolt rendszer teljes szinkronizációjaként.

A fejezet hátralevő részében további lehetséges kutatási irányokat mutatunk be. Az eredmények amiket közölni fogunk korábban még nem lettek publikálva.

### 4.1. Szakadósos dinamika

Ebben a fejezetben példát mutatunk egy olyan csatolt leképezésre, ahol  $T$  nem folytonos és az  $f_*^\varepsilon$  invariáns sűrűség nem Lipschitz folytonos függvénye  $\varepsilon$ -nak abban az

5. ÁBRA. A szakadós  $T$  leképezés.

értelemben, hogy  $\|f_*^\varepsilon - f_*^0\|_{BV}$  nem tart nullába  $\varepsilon \rightarrow 0$  mellett. Tehát ebből látszik, hogy a 3.4 Tétel nem érvényes szakadós  $T$  esetében.

Legyen  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  az alábbi leképezés:

$$T(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{4} & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{8}, \\ 2x - \frac{1}{4} & \text{ha } \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{ha } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ 2x - \frac{3}{4} & \text{ha } \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}, \\ 2x - \frac{7}{4} & \text{ha } \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

A grafikonját lásd az 5 Ábrán. Legyen  $I = [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$ . Ebben a fejezetben az alábbi típusú sűrűségekkel fogunk dolgozni:

(F'')  $f$  sűrűségfüggvény,  $\text{supp}(f) \subseteq I$  és  $f(x) = f(1-x)$  minden  $x \in [0, 1]$  esetén.

**4.1. Állítás.** Minden  $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$  esetén létezik az  $\mathcal{F}_\varepsilon$  operátornak egy egyértelmű  $f_*^\varepsilon$ -al jelölt invariáns eleme. Továbbá

$$\|f_*^\varepsilon - f_*^0\|_{BV} \geq 1 - \frac{1}{4(1-\varepsilon) - 1}$$

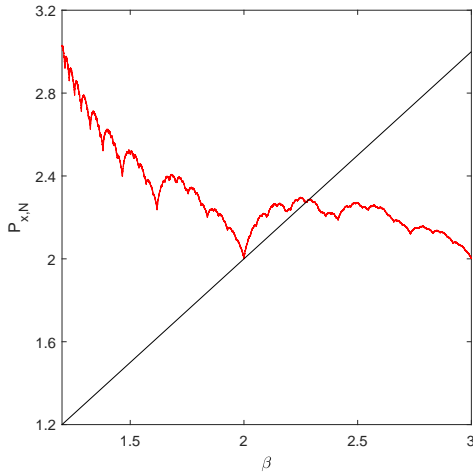
teljesül minden  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  esetén.

## 4.2. Egy hasonló önkonzisztens dinamikai rendszer

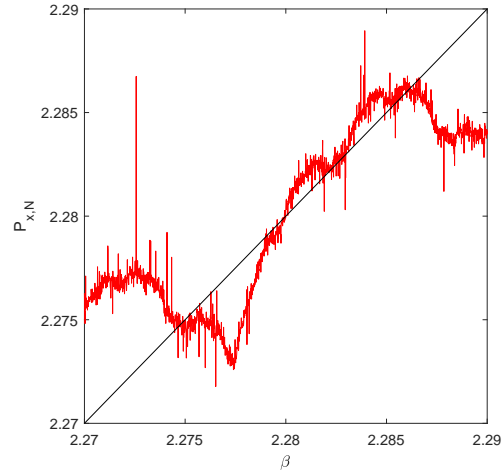
Legyen  $X$  egy kompakt metrikus tér és  $\mathcal{M}(X)$  a Borel valószínűségi mértékek halmaza  $X$ -en. Önkonzisztens dinamikai rendszer alatt a

$$\mathcal{T} : X \times \mathcal{M}(X) \rightarrow X \times \mathcal{M}(X), \quad \mathcal{T}(x, \mu) = (T_\mu(x), (T_\mu)_*\mu),$$

szabály által meghatározott rendszert értjük [8]. Ez egy természetes általánosítása a disszertációban tárgyalt csatolt leképezéseknek: legyen  $T_\mu = T \circ \Phi_{\varepsilon, \mu}$ , ahol  $T$  egy körvonal leképezés és  $\Phi_{\varepsilon, \mu}$ -t a (3.1) egyenlet definiálja. Ekkor  $\mathcal{T}$  második koordinátájában a 3 Fejezetben definiált leképezés a mérték csatolt dinamika általi fejlődésére. A 3 Fejezetbeli számolásaink alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy az invariáns mértékek létezése, egyértelműsége és stabilitása lényegében csak a  $(\mu, x) \mapsto T_\mu(x)$  leképezés regularitásán múlik. Így egy egyszerűbb, kevésbé regularis önkonzisztens rendszert tanulmányozva képet kaphatunk arról, hogy milyen



(a)  $\beta \in [1.2, 3]$ , rácsméret:  $10^{-4}$ ,  
 $N = 10^7$ .



(b)  $\beta \in [2.27, 2.29]$ , rácsméret:  $10^{-5}$ ,  
 $N = 10^9$ .

6. ÁBRA. A  $\psi$  approximációja ergodikus átlagokkal.

$$P_{x,N}(\beta) = \frac{N}{\sum_{n=0}^{N-1} T_{\beta}^n(x)}$$

ábrázolva  $\beta$  különböző értékeire,  $x$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$  intervallumon.

jelenségekre számíthatunk kevésbé reguláris csatolt leképezések esetén. Ebben a fejezetben egy olyan önkonzisztens rendszert fogunk tekinteni, ahol a dinamika minden lépésben *szakadós* és több abszolút folytonos invariáns mértékkel rendelkezik. Ez alapján úgy gondoljuk, hogy valószínűsíthető, hogy egy csatolt dinamikai rendszernek szakadós  $T$  esetében létezhet több abszolút folytonos invariáns mértéke.

Legyen

$$T_{\mu}(x) = \frac{1}{E_{\mu}} \cdot x \pmod{1}. \quad (4.1)$$

A következőt állítjuk:

**4.2. Állítás.** A (4.1) egyenlet által definiált önkonzisztens rendszernek legalább négy abszolút folytonos invariáns mértéke van. Az egyikük a Lebesgue mérték, a másik három pedig ekvivalens a Lebesgue mértékkel.

A bizonyításnak két eredményre épít: legyen  $\beta_{\mu} = \frac{1}{E_{\mu}}$ . Rényi [55] megmutatta, hogy a  $T_{\beta}(x) = \beta x \pmod{1}$ ,  $\beta > 1$  leképezésnek egyértelmű az abszolút folytonos invariáns mértéke, amely valójában ekvivalens a Lebesgue mértékkel.

Tekintsük a

$$\psi(\beta) = \beta_{\mu\beta} \quad (4.2)$$

leképezést.

A  $\beta = \beta_{\mu\beta}$  egyenlőségből következik, hogy  $\mu_{\beta}$  invariáns mértéke az önkonzisztens rendszernek (amely Rényi eredménye alapján ekvivalens a Lebesgue mértékkel). Így láthatjuk, hogy  $\psi$  fixpontjai egyértelműen megfeleltethetők az önkonzisztens rendszer invariáns mértékeinek.

A [40, 2. Állítás] alapján a  $\psi$  függvény folytonos (pontosabban log-Lipschitz). Tehát a fixpontok létezésének bizonyításához elég olyan  $\beta$ -párokat találni, ahol  $\psi(\beta)$  először alatta, majd felette van az  $x = y$  egyenesnek. Ezt olyan speciális  $\beta$  értékek esetében tudjuk megmutatni amelyekre  $T_{\beta}$  Markov, így az invariáns sűrűség könnyen számolható. Mivel  $\psi(2) = \psi(3) = 2$ , elég három megfelelő  $\beta$ -értéket (tehát amelyekre  $\psi(\beta_1) > \beta_1$ ,  $\psi(\beta_2) < \beta_2$  és  $\psi(\beta_3) > \beta_3$ ) találni a bizonyítás befejezéséhez.

# Irodalomjegyzék

- [1] J. A. Acebron, L. L. Bonilla, C. J. Perez-Vicente, F. Ritort and S. Spigler. The Kuramoto Model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, **77** (2005), 137-185.
- [2] P. Bálint and F. Sélley. Mean-field coupling of identical expanding circle maps. *Journal of Statistical Physics*, **4** (2016), 858–889.
- [3] P. Bálint, G. Keller, F. M. Sélley and I. P. Tóth. Synchronization versus stability of the invariant distribution in a class of globally coupled maps. *Nonlinearity*, **8** (2018), 3770–3793.
- [4] V. Baladi. Positive transfer operators and decay of correlations. Volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World scientific, 2000.
- [5] V. Baladi. On the susceptibility function of piecewise expanding interval maps. *Communications in Mathematical Physics*, **3** (2007), 839–859.
- [6] J.-B. Bardet, G. Keller, and R. Zweimüller. Stochastically stable globally coupled maps with bistable thermodynamic limit. *Communications in Mathematical Physics*, **1** (2009), 237–270.
- [7] R. Benedetto, E. Caglioti and U. Montemagno. On the complete phase synchronization for the Kuramoto model in the mean-field limit. *Commun. Math. Sci.*, **13** (2015), 1775-1786.
- [8] M. Blank. Ergodic averaging with and without invariant measures. *Nonlinearity*, **12** (2017), 4649.
- [9] M. Blank. Self-consistent mappings and systems of interacting particles. *Doklady Mathematics*, **1** (2011), 49–52.
- [10] M. Blank. Collective phenomena in lattices of weakly interacting maps. *Doklady Akademii Nauk (Russia)*, **3** (2011), 300–304.
- [11] V. I. Bogachev. *Measure Theory Vol. 2*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [12] C. Boldrighini, L.A. Bunimovich, G. Cosimi, S. Frigio, and A. Pellegrinotti. Ising-type transitions in coupled map lattices. *Journal of Statistical Physics*, **5-6** (1995), 1185–1205.
- [13] C. Boldrighini, L.A. Bunimovich, G. Cosimi, S. Frigio, and A. Pellegrinotti. Ising-type and other transitions in one-dimensional coupled map lattices with sign symmetry. *Journal of Statistical Physics*, **5-6** (2001), 1271–1283.
- [14] F. Bonetto, D. Daems, and J. L. Lebowitz. Properties of stationary nonequilibrium states in the thermostatted periodic Lorentz gas I: The one particle system. *Journal of Statistical Physics*, **1-2** (2000), 35–60.

- [15] A. Boyarsky and P. Góra. Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] J. Bricomont and A. Kupiainen. High temperature expansions and dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, **3** (1996), 703–732.
- [17] J. Buescu. Exotic attractors: from Lyapunov stability to riddled basins. Volume 153, Birkhäuser, 2012.
- [18] L.A. Bunimovich and Y.G. Sinai. Spacetime chaos in coupled map lattices. *Nonlinearity*, **4** (1998), 491.
- [19] J.A. Carillo, Y.P. Choi, S.Y. Ha, M.j. Kang and Y. Kim. Contractivity of transport distances for the kinetic Kuramoto equation. *J. Stat. Phys.*, **156** (2014), 395–415.
- [20] J. Chazottes and B. Fernandez. *Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*. Volume 671, Springer Science & Business Media, 2005.
- [21] H. Dietert and B. Fernandez. The mathematics of asymptotic stability in the Kuramoto model. *arXiv:1801.01309*, 2018.
- [22] F. Döfler and F. Bullo. On the critical coupling for Kuramoto oscillators. *SIAM J. Appl. Dynam. Syst.*, **10** (2011), 1070–1099.
- [23] S. V. Ershov and A. B. Potapov. On mean field fluctuations in globally coupled maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **4** (1995), 523–558.
- [24] B. Fernandez. Breaking of ergodicity in expanding systems of globally coupled piecewise affine circle maps. *Journal of Statistical Physics*, **4** (2014), 999–1029.
- [25] T. Fisher and H. H. Rugh. Transfer operators for coupled analytic maps. *Ergodic Theory and Dynamical systems*, **1** (2000), 109–143.
- [26] J. Franks. *Anosov diffeomorphisms*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1968.
- [27] G. Gielis and R.S. MacKay. Coupled map lattices with phase transition. *Nonlinearity*, **3** (2000), 867–888.
- [28] P. Glendinning and C. Sparrow. Prime and renormalisable kneading invariants and the dynamics of expanding Lorenz maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **1** (1993), 22–50.
- [29] F. Golse. On the dynamics of large particle systems in the mean-field limit. In *Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity*. Lecture Notes in Applied Mathematics and Mechanics (A. Muntean, J. Rademacher and A. Zagaris Eds.) vol. 3, p. 1–144, Springer, 2016.
- [30] P. Góra. Invariant densities for piecewise linear maps of the unit interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **5** (2009), 1549–1583.
- [31] S.Y. Ha, T. Ha and J.H. Kim. On the complete synchronization of the phase Kuramoto model. *Physica D*, **239** (2010), 1692–1700.
- [32] E. Järvenpää. A SRB-measure for globally coupled circle maps. *Nonlinearity*, **6** (1997), 1435.

- [33] M. Jiang and Y.B. Pesin. Equilibrium measures for coupled map lattices: Existence, uniqueness and finite-dimensional approximations, *Communications in Mathematical Physics*, **3** (1998), 675–711.
- [34] W. Just. Globally coupled maps: phase transitions and synchronization *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **4**, (1995), 317–340.
- [35] K. Kaneko. Globally coupled chaos violates the law of large numbers but not the central-limit theorem. *Physical review letters*, **12** (1990), 1391.
- [36] K. Kaneko. Remarks on the mean field dynamics of networks of chaotic elements. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **1** (1995), 158–170.
- [37] G. Keller. Stochastic stability in some chaotic dynamical systems. *Monatshefte für Mathematik*, **4** (1982), 313–333.
- [38] G. Keller. An ergodic theoretic approach to mean field coupled maps. In *Fractal Geometry and Stochastics II*, Birkhäuser, Basel, 2000. p. 183–208.
- [39] G. Keller, C. Liverani. A spectral gap for a one-dimensional lattice of coupled piecewise expanding circle maps. In *Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*, Springer, 2005. p. 115–151.
- [40] G. Keller, P. J. Howard, and R. Klages. Continuity properties of transport coefficients in simple maps. *Nonlinearity*, **8** (2008), 1719.
- [41] G. Keller and C. Liverani. Uniqueness of the SRB measure for piecewise expanding weakly coupled map lattices in any dimension. *Communications in Mathematical Physics*, **1** (2006), 33–50.
- [42] J. Koiller and L.S. Young. Coupled map networks. *Nonlinearity*, **5** (2010), 1121.
- [43] K. Krzyzewski and W. Szlenk. On invariant measures for expanding differentiable mappings. *Studia Math.* **33** (1969), 83–92.
- [44] M. W. Künzle. *Invariante Mase für gekoppelte Abbildungsgitter*. Phd thesis, 1993.
- [45] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics (H. Araki, ed.), Lect. Notes Phys.*, **39** Springer (1975), 420–422.
- [46] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer-Verlag, New-York, (1984).
- [47] J. Miller and D.A. Huse. Macroscopic equilibrium from microscopic irreversibility in a chaotic coupled-map lattice. *Physical Review E*, **4** (1993), 2528.
- [48] J. Milnor. On the concept of attractor. In *The Theory of Chaotic attractors*, p. 243–264, Springer, 1985.
- [49] Z. Néda, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet, A. L. Barabási. Physics of the rhythmic applause. *Physical Review E*, **6** (2000) 6987.
- [50] N. Nakagawa and T. S. Komatsu. Collective motion occurs inevitably in a class of populations of globally coupled chaotic elements. *Phys. Rev. E*, **57** 1570.
- [51] W. Parry. The Lorenz attractor and a related population model. In *Ergodic Theory*, pages 169–187. Springer, 1979.

- [52] T. Pereira, S. van Strien, J. S. Lamb. Dynamics of coupled maps in heterogeneous random networks. Preprint, [arXiv:1308.5526](https://arxiv.org/abs/1308.5526), 2013.
- [53] T. Pereira, S. van Strien, M. Tanzi. Heterogeneously coupled maps: hub dynamics and emergence across connectivity layers. Preprint, [arXiv:1704.062163](https://arxiv.org/abs/1704.062163), 2017.
- [54] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths. Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, (2001).
- [55] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **8.3-4** (1957) 477-493.
- [56] B. Saussol. Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps. *Israel Journal of Mathematics*, **1** (2000), 223–248.
- [57] F. M. Sélley. Symmetry breaking in a globally coupled map of four sites. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*, **8** (2018) 3707–3734.
- [58] D. Thomine, A spectral gap for transfer operators of piecewise expanding map. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*, **3** (2011) 917–944.