



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Híradástechnikai Tanszék

Új teljesítményelemzési módszerek távközlési
alkalmazásokkal
New Performance Evaluation Methods with Telecommunication
Applications

Ph.D. disszertáció téziszülete

Horváth Gábor

Konzulens
Dr. Telek Miklós docens

Budapest, 2005

© Horváth Gábor 2005
hgabor@webspn.hit.bme.hu

Kivonat

A disszertáció három részből áll. Az első részben az ATM AAL2 multiplexer sorbanállási viselkedése alapján definiálunk egy új sorbanállási modellt, a BMAP/D/1-timer multiplexert. Ennek segítségével eljárást adunk az ATM AAL2 multiplexer két legfontosabb teljesítményjellemzőjének, a várakozási idő eloszlásának, és a multiplexálás hatékonyságának kiszámítására. A kifejlesztett és analizált sormodell, a BMAP/D/1-timer multiplexer azonban az ATM AAL2-n kívül más egyéb mérnöki rendszerek modellezésére is alkalmas.

A disszertáció második részében többosztályos sorbanállási rendszerek teljesítményére adunk közelítést. Ezekben a sorbanállási modellekben a különböző osztályhoz tartozó igények forgalmi jellemzői vagy kiszolgálási igényei egymástól különbözőek lehetnek. Olyan algoritmusokat mutatunk be, melyek segítségével az igények várakozási idejének várható értékére és a várakozási idő szórására gyors és numerikusan stabil közelítést kapunk.

A harmadik rész a Markov hozam modellek modellezési képességének kibővítésével kapcsolatos új eredményeket ismerteti. A modellezési képességet kétféleképpen növeljük: egyrészt megengedjük az ingadozó (u.n. másodfokú) hozamfelhalmozást, másrészt az állapotváltások alkalmával lehetővé tesszük a hozam egy részének elvesztését. Megmutatjuk, hogy az ilyen módon kibővített hozammodellek analízise nem igényel lényegesen nagyobb számítási kapacitást a hagyományos hozammodellek analíziséhez képest.

1. A kutatás háttere

Az informatikai rendszerek, kommunikációs hálózatok területén nagy szerepe van a teljesítményanalízisnek a meglévő rendszerek optimalizálásában, és a még tervezőasztalon lévő rendszerek méretezésében egyaránt. Mind a gazdaságos működés, mind a felhasználók elégedettségének szempontjából fontos, hogy a rendszer működését megértsük, meg tudjuk becsülni a működési környezet változásainak a hatását.

A teljesítményanalízis egyik alkalmas módja – a szimuláció és a mérések mellett – a matematikai, sztochasztikus modelleken alapuló megközelítés. Az utóbbi 2-3 évtizedben letisztult a fázis típusú eloszlások, markovi érkezési folyamatok, illetve a strukturált Markov láncok hatékony analízisének elmélete, ezzel lehetővé vált a Markov láncok alkalmazása modern távközlési rendszerek hatékony modellezésére.

A Markov láncok mellett népszerű modellezési technika a Markov hozam modellek alkalmazása is. Markov hozam modellekben egy folytonos mennyiség, a "hozam" gyűlik, a háttér Markov lánc aktuális állapotától függő sebességgel. A felhalmozott hozam – távközlési

alkalmazás esetén – reprezentálhatja például a hálózaton átvitt adatmennyiséget, miközben a háttérfolyamat állapotváltásai megfelelnek a rendelkezésre álló sáv szélesség változásának. A Markov hozam modellek népszerűségének egyik oka, hogy hatékony numerikus algoritmusok állnak rendelkezésre egyes teljesítményjellemzők kiszámítására. A hagyományos Markov hozam modellek különböző kiterjesztéseire irányuló kutatások eredményeinek hatására a hozam modellel modellezhető problémák köre is egyre tágul, ezért további kiterjesztések vizsgálata fontos kutatási feladat.

2. A kutatás célkitűzései

2.1. ATM AAL2 multiplexer vizsgálata

Az ATM AAL2 protokollt ([1]) kis sebességű multimédia forgalom átvitelére fejlesztették ki. Mivel a protokollt késleltetés-kritikus alkalmazások használják, a minőség leglényegesebb jellemzője a késleltetés eloszlása. Sztochasztikus modellezés szempontjából nehézséget jelent a szabvány által a multiplexálási nyereség növelése érdekében bevezetett időzítő, mivel az a rendszer működését nem-munkamegőrzővé teszi.

A kutatás célkitűzése az volt, hogy az AAL2 működését egy alkalmas sormodell segítségével modellezzük, és a késleltetés eloszlását meghatározzuk. Fontos szempont volt továbbá, hogy az eloszlás kiszámolására lehetőleg numerikusan hatékony eljárást sikerüljön találni.

2.2. Többosztályos sorbanállási rendszerek analízise

Többosztályos sorbanállási rendszerekben az igények osztályokba sorolhatók. Különböző osztályokba tartozó igények érkezési ideje, és kiszolgálási igénye is különbözhet. A kiszolgáló is különbséget tehet az egyes igényosztályok között. Nem-megszakításos prioritásos kiszolgálásnál a kiszolgáló mindig a sorban álló legnagyobb prioritású osztályba tartozó igényt választja, míg súlyozott igazságos kiszolgálásnál a kiszolgálási kapacitás az osztályokhoz rendelt súlyoknak megfelelően oszlik meg. Mindkét megoldást elterjedten alkalmazzák távközlési rendszerekben. Az irodalomban található megoldások legnagyobb problémája, hogy vagy csak Poisson érkezési folyamatot engednek meg ([4, 6, 10, 3, 8]), vagy csak bizonyos teljesítményjellemzőt, illetve csak azok várható értékét tudják kiszámolni ([9]). A [11]-ben mindkét megszorítást feloldották, de az algoritmus számos megoldatlan numerikus problémát tartalmaz.

Célunk olyan közelítő algoritmusok kifejlesztése, melyek segítségével a prioritásos, és a

súlyozott igazságos többsztályos sormodelleket a fenti megszorítások nélkül lehet vizsgálni, azaz melyek segítségével a Poisson folyamatnál általánosabb érkezési folyamatot és az exponenciálistól különböző kiszolgálási idő eloszlást megengedve a várakozási idő várható értéke mellett annak szórására is jó közelítést kapunk.

2.3. Markov hozam modellek kiterjesztései

A hagyományos Markov hozam modellekben a hozamfelhalmozás lineáris (elsőfokú), és az állapotváltások alkalmával az addig felhalmozott hozam mennyisége megmarad. Bizonyos gyakorlati problémák ennél általánosabb modellt igényelnek. Például távközlő rendszerekben a hálózat egy adott állapotban sem biztos, hogy fix a felhasználó által tapasztalt sávszélesség, hanem bizonyos mértékű ingadozást mutathat. Másrészt, más rendszerekben, szükség lehet modellezni a felhalmozott hozam (mint elvégzett munka) részleges elvesztését valamilyen hiba esemény bekövetkezésekor. A Markov hozam modellek ilyen jellegű kiterjesztéseinek analízise volt a célunk a harmadik téziscsoportban.

3. A kutatás módszertana

Az első részben, az ATM AAL2 multiplexer vizsgálata során az alkalmazott módszer a Markovi modellezés volt. A rendszer – bizonyos beágyazott időpontokban – markovi tulajdonságot mutat. A Markov lánc generátorának szabályos (M/G/1 típusú) blokk struktúrája lehetővé tette, hogy mátrix-geometrikus módszereket alkalmazzunk a megoldáshoz. Ahhoz, hogy a várakozási idő eloszlására numerikusan hatékony megoldást találjunk, az u.n. randomizációs algoritmust használtuk a mátrix exponenciális függvény, illetve annak integráljának nagy pontosságú és gyors kiszámítására.

A második részben a kétféle ütemező viselkedésére adott közelítésekhez ismét szabályos alakú Markov láncot kaptunk, aminek megoldásához a strukturált állapotterek és kvázi születés-halálózási folyamatok elméletét használtuk fel.

A harmadik részben a másodfokú Markov hozam modellek analízisében a rendszert leíró differenciálegyenletet a beágyazott viselkedés alapján írtuk fel, majd a Laplace transzformáció segítségével számoltuk ki a momentumokat. A numerikus eljáráshoz randomizációt használtunk, a hibakorlát meghatározása pedig kombinatorikai ismeretek felhasználásával történt.

A disszertációban ismertetett analitikus számítási eljárások validálására azokat szimulációs eredményekkel vetettük össze. A szimulátorok az OmNet++ szimulációs környezetben készültek ([2]). Az első részben a szimulációt a rendkívül összetett formulák helyességének

ellenőrzésére használtuk; a második részben a szimuációval a közelítések során alkalmazott feltételezések jogosságát, valamint az eredmények pontosságát ellenőriztük.

4. Új tudományos eredmények

1. téziscsoport: A BMAP/D/1-Timer multiplexer analízise

Az ATM AAL2 multiplexerbe kis sebességű, késleltetés-érzékeny források (jellemzően multimédia források) által generált adatok érkeznek. A multiplexer fix – a linksebesség által meghatározott – időközönként továbbít a bufferből egy ATM cellányi adatot. A multiplexálási hatékonyság növelése érdekében bevezettek egy időzítőn alapuló mechanizmust: ha a bufferben várakozó adatok száma kevés a továbbításhoz, a kiszolgáló megáll, és további adatok érkezését várja be. Az időzítő azonban biztosítja, hogy ez a leállás ne lehessen akármilyen hosszú: az időzítő lejártával a bufferben váró adatok mindenképpen továbbításra kerülnek, egy részlegesen kitöltött ATM cellában ([1]).

Az ATM AAL2 multiplexer működésének modellezésére definiáltam egy sorbanállási modellt, a BMAP/D/1-Timer multiplexert.

1.1. tézis. *Megadtam a BMAP/D/1-Timer multiplexer működését leíró Markov lánc generátormátrixát a távozási pillanatokra beágyazva, és meghatároztam annak egyensúlyi állapotvalószínűségeit.*

Az állapottér megfelelő partícionálásával a Markov lánc M/G/1 típusúvá alakítható, az alábbi blokk-szerkezettel:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathcal{B}} & \dots & \dots \\ \boxed{\mathcal{A}} & \dots & \dots \\ & \boxed{\mathcal{A}} & \dots \\ & & \boxed{\mathcal{A}} & \dots \\ & & & \boxed{\mathcal{A}} & \dots \\ & & & & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

A \mathcal{B} mátrix felel meg a multiplexer azon állapotainak, amikor a bufferben lévő adatok mennyisége 0 és $L - 1$ között van, ezért a \mathcal{B} mátrix kiszámításánál az időzítő hatását is figyelembe venni. Az \mathcal{A} mátrixok esetén az időzítőnek nincs szerepe, hiszen a bufferben van annyi

várakozó igény, hogy megtöltsön egy teljes csomagot. Az M/G/1 típusú Markov láncok irodalmának tanulmányozása alapján a Ramaswami formulát találtam a legalkalmasabbnak az egyensúlyi állapotvalószínűségek meghatározására ([7]).

1.2. tézis. *Megadtam a BMAP/D/1-Timer multiplexerben várakozó adatok várakozási idejének eloszlását, és numerikus eljárást javasoltam annak kiszámolására.*

Az adatok várakozási ideje az érkezéskori sorhossztól, és az időzítő állapotától függ. Ezek eloszlását a távozási pillanatokra beágyazott folyamat eloszlásának ismeretében kiszámoltam. A keletkezett formulák azonban sok ponton integrálást tartalmaznak, melyek numerikus kiértékelése (egy adott pontosság eléréséhez) elég időigényes. Az integrálok nagy részét megfelelő átalakításokkal sikerült $\int_a^b e^{Qt} dt$ alakra, vagyis randomizáció segítségével numerikusan hatékonyan kiértékelhető alakra hozni.

1.3. tézis. *Kiszámítottam a BMAP/D/1-Timer multiplexerből távozó csomagok kitöltöttségét, mellyel a multiplexálás hatékonysága jellemezhető.*

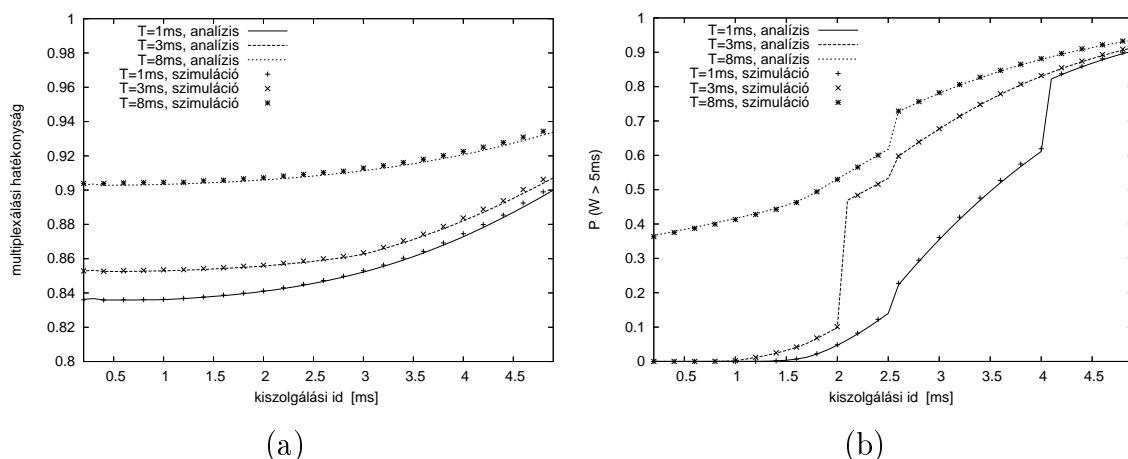
A távozó csomagok kitöltöttségét $\eta = \lambda/(L \cdot \mu)$ formában definiáltam, ahol λ az adatok érkezési intenzitása, μ az összeállított csomagok távozási intenzitása, L pedig a csomagok mérete.

Ezzel a definícióval akkor a legrosszabb a multiplexálási hatékonyság ($\eta = 1/L$), ha minden egyes adat külön csomagban távozik, és akkor a legjobb, ha minden távozó csomag teljesen kitöltött, mivel ekkor $\mu = \lambda/L$, vagyis $\eta = 1$. A nehézséget a távozási időközök (vagyis $1/\mu$) várható értékének a meghatározása jelenti. Ezt a mennyiséget a távozási pillanatokra beágyazott folyamat eloszlásából kiindulva fejeztem ki.

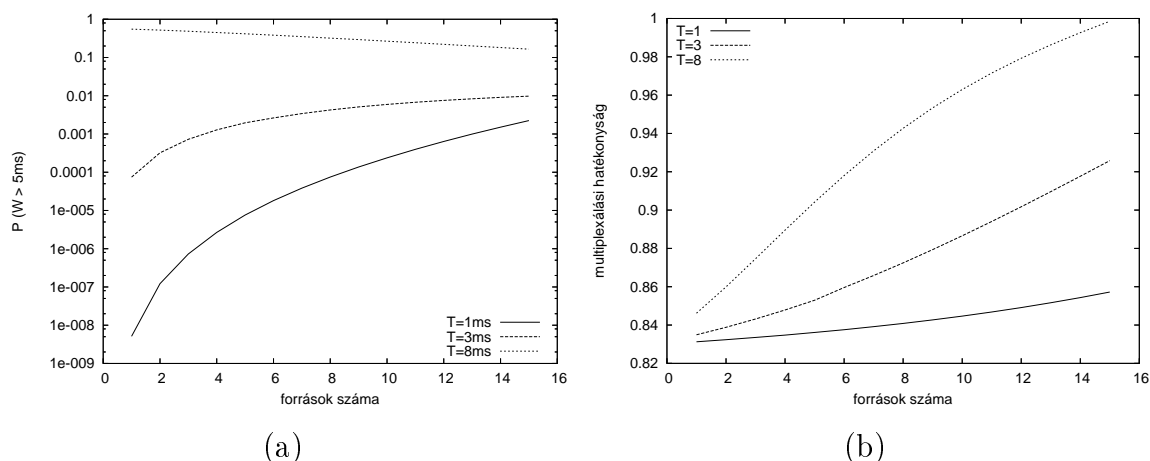
A rendszer viselkedésének vizsgálatához összeállítottam egy numerikus példát, valóság-hű forgalmi és kiszolgálási paraméterekkel. A 1. ábra szemlélteti a kiszolgálási idő (azaz a link kapacitás) hatását az 5 ms-os késleltetési korlát túllépésének valószínűségére. Látható, hogy az időzítő nagyobb értékeihez nagyobb túllépési valószínűség tartozik. A rendszer egyik érdekes tulajdonsága, hogy ha az időzítő nagyobb a késleltetési korlátnál, akkor a link kapacitás növelésével nem csökkenthető tetszőlegesen kis értékre a túllépés valószínűsége.

Egy másik, a gyakorlatban fontos kérdés, hogy hány forrás engedhető be úgy, hogy a késleltetési korlát túllépésének valószínűsége egy adott határ alatt maradjon. A 2. ábrán jól látható, hogy ha az időzítő értéke kisebb a korlátnál, akkor az egyre több forrás mellett egyre romlanak a késleltetés-viszonyok, viszont ha az időzítő nagy, a helyzet pont az ellenkező.

Az 1. téziscsoport eredményeit a [C10] és [J2] publikációk tartalmazzák.



1. ábra. A kiszolgálási idő hatása



2. ábra. A források számának hatása

2. tétiscsoport: Többosztályos sorbanállási rendszerek analízise

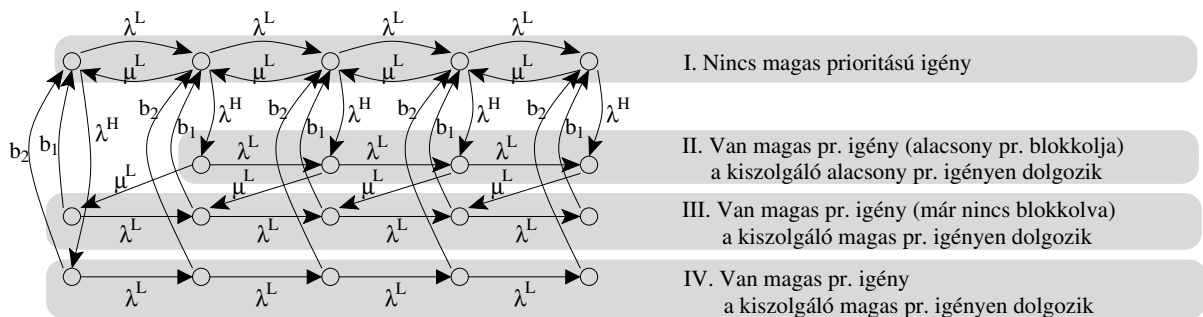
Ebben a tétiscsoportban úgynevezett két-paraméteres leírással jellemzett többosztályos sormodellel foglalkozom. Ennek megfelelően az érkező igények érkezési időközei két paraméterrel adottak (érkezési intenzitás és az érkezési időközök relatív szórásnégyzete), a kiszolgálási igény úgyszintén (átlagos kiszolgálási idő, és a kiszolgálási idő relatív szórásnégyzete). A különböző osztályba tartozó igények paramétereik egymástól különbözhetnek. A vizsgált teljesítményjellemzők a sorban álló igények számának eloszlása, valamint a várakozási idő várható értéke és szórása.

2.1. tétis. *Közelítést adtam nem-megszakításos prioritásos ütemezővel rendelkező kétosztá-*

lyos, két-paraméteres leírással adott rendszerben a sorban álló igények számának eloszlására, valamint a várakozási idő várható értékére és szórására.

A közelítés a forgalmi osztályok szétválasztásán alapul. Az osztályokat külön-külön vizsgáljuk, egy olyan ekvivalens kiszolgálási folyamattal, ami a másik osztály hatását utánozza.

Az alacsony prioritású igények szempontjából a rendszerben lévő magas prioritású igények pontos száma lényegtelen; csak az számít, hogy van-e a rendszerben magas prioritású igény, vagy nincs. Ennek megfelelően a magas prioritású igények számát két állapottal közelíthetjük: a 0 állapottal és > 0 állapottal. Ezt az elvet alkalmazva alakítottam ki a 3. ábrán (vázlatosan) látható közelítő modellt az alacsony prioritású sor modellezésére.

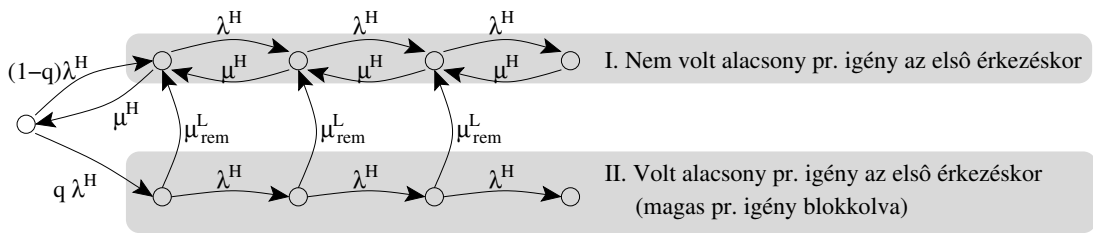


3. ábra. Az alacsony prioritású sor modellje

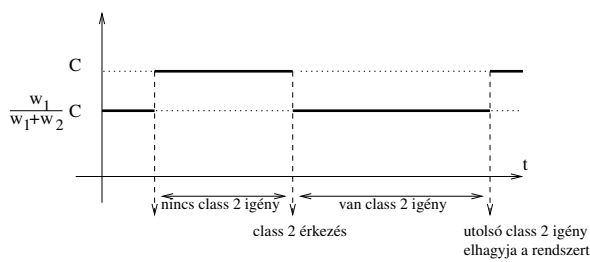
A magas prioritású sor közelítő analiziséhez sem kell az alacsony prioritású igények pontos számának ismerete. Hiszen az alacsony prioritású felhasználók csak egyetlen esetben befolyásolják a magas prioritásúakat: ha éppen alacsony priritású igény kiszolgálása zajlik, amikor egy magas prioritású igény érkezik. Ebben az esetben ugyanis a megkezdett kiszolgálást nem lehet megszakítani. Ezen esemény valószínűségének ismeretében (q) a 4. ábra ábrázolja a magas prioritású sor közelítő vizsgálatához konstruált sormodellt.

2.2. tézis. *Közelítést adtam súlyozott igazságos ütemezővel rendelkező (WFQ), két osztályos, két-paraméteres leírással adott rendszerben a sorban álló igények számának eloszlására, valamint a várakozási idő várható értékére és szórására.*

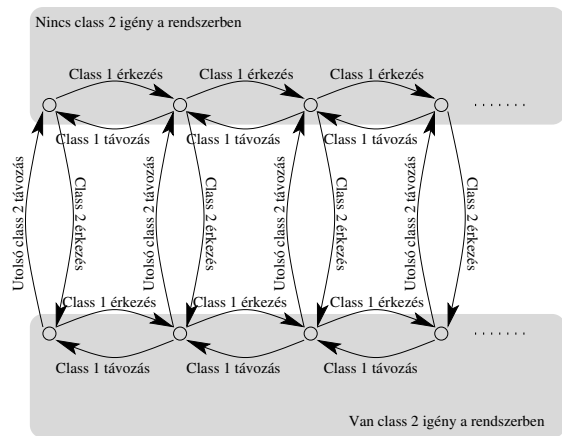
Akár az előző esetben, itt is az osztályok szeparálásán alapul a közelítés. Az egyik osztály olyan kiszolgálót tapasztal, melynek a kapacitása ingadozik, attól függően, hogy van-e a másik



4. ábra. A magas prioritású sor modellje



5. ábra. A kiszolgáló kapacitása az 1. forgalmi osztály szemszögéből



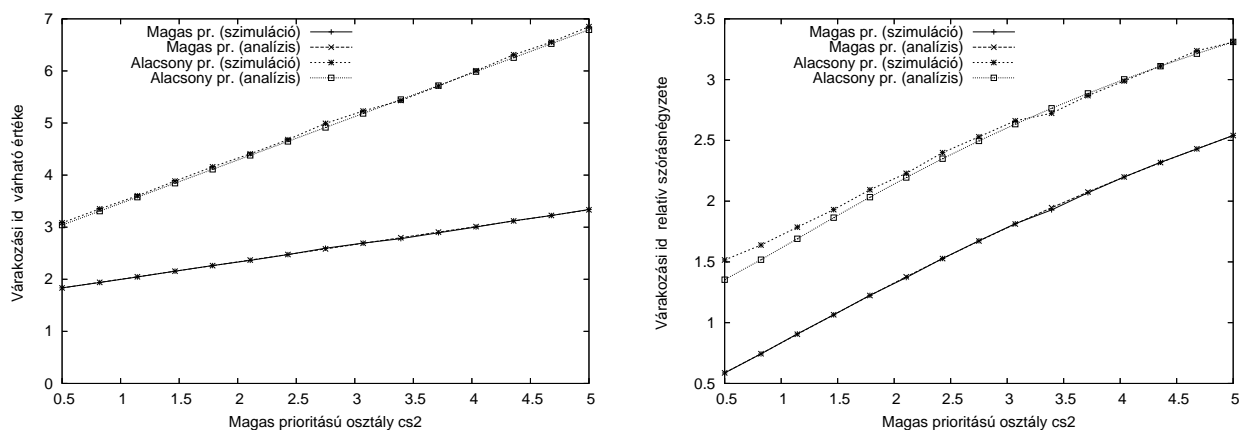
6. ábra. A Markov lánc szerkezete

osztályba tartozó várakozó igény (5. ábra). Ezt a viselkedést tükrözi a 6. ábrán látható Markov lánc, amely a közelítésünk alapja.

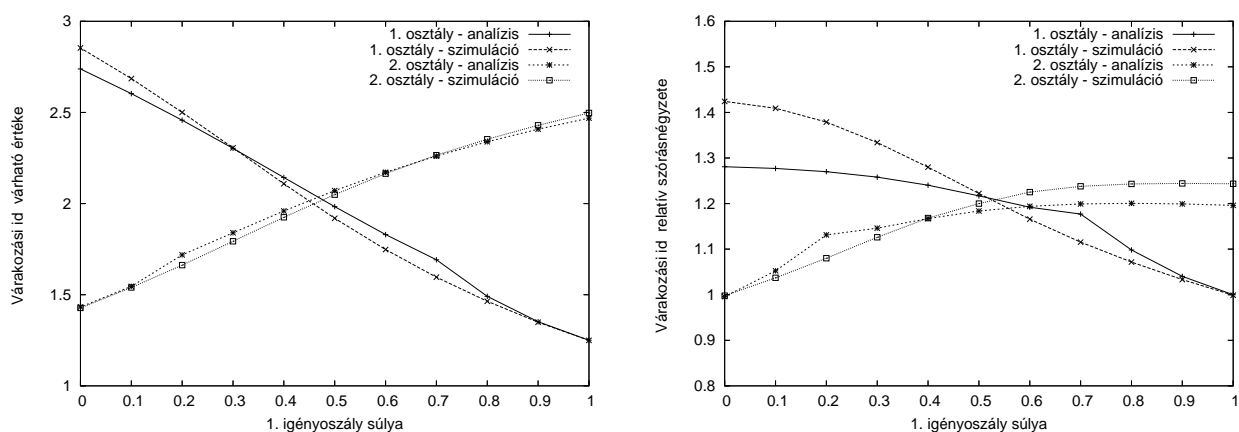
Mindkét ütemező algoritmus közelítésénél az érkezési és kiszolgálási időket fázis típusú eloszlással jellemezzük (a bemutatott ábrák csak a Markov láncok makró-szerkezetét ábrázolják!), a másik sor foglaltsági idejét pedig mátrix geometrikus módszerekkel számoljuk, és fázis típusú eloszlást illesztünk rá. A keletkező Markov láncok blokk-3-diagonál szerkezetűek, vagyis kvázi születés halálzási folyamatok, melyek teljesítményjellemzőit az irodalomból jól ismert algoritmusok segítségével határozhatjuk meg. (A disszertációban az [5]-ben javasolt algoritmust alkalmaztuk).

A közelítés pontosságának ellenőrzéséhez szimulációs eredményekhez hasonlítottuk a bemutatott eljárások eredményeit. Annak érdekében, hogy a közelítések alkalmazhatóságának határait megkeressük, a rendszer összes paraméterének hatását megvizsgáltuk. Azt tapasztaltuk, hogy a nem megszakításos prioritásos sorra adott közelítés pontosabb eredményt ad a súlyozott igazságos kiszolgálásos sorra adott közelítésnél. Mindkét ütemezővel kapcsolat-

ban elmondhatjuk, hogy a várható várakozási idő közelítése megfelelően szoros, a szimulációs eredményekhez viszonyítva az eltérés a prioritásos esetben 5%, a WFQ esetén 10% alatt marad. A várakozási idő relatív szórásnégyzetére is jó közelítést kaptunk, a paraméterek vizsgált tartományában a prioritásos esetben a közelítés hibája legtöbbször 10% alatti, míg a WFQ esetén néhány eset kivételével 20% alatt marad. A vizsgálatokból azt is leszűrtük, hogy a közelítés pontossága az érkezési időközök és a kiszolgálási idők szórásának növekedésével romlik, a legpontosabb eredményeket az exponenciális esetre kaptunk. Néhány, a pontosságot szemléltető eredmény látható a 7. és a 8. ábrán.



7. ábra. Prioritásos példa, a magas prioritású igények kiszolgálási idejének relatív szórásnégyzetének hatása

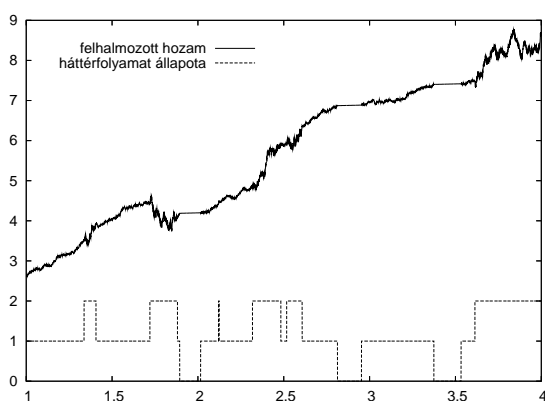


8. ábra. WFQ példa, a súly változtatásának hatása

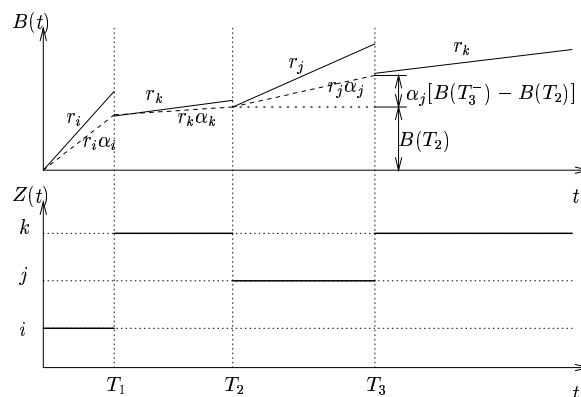
A téziscsoport eredményeit a [C2] (WFQ) és a [C12] (nem megszakításos prioritásos ütemező) publikációk tartalmazzák.

3. téziscsoport: Kiterjesztett Markov hozam modellek

A disszertáció harmadik részében a Markov hozam modelleket két irányban terjesztjük ki. Egyrészt megengedjük a hozamfelhalmozás ingadozását (másodfokú hozam modell, 9. ábra), másrészt lehetővé tesszük az utolsó állapotban gyűjtött hozam egy részének elvesztését az állapot elhagyásakor (részleges növekmény-vesztéses hozam modell, 10. ábra).



9. ábra. Másodfokú Markov hozam modell



10. ábra. Markov hozam modell részleges inkremens-vesztéssel

Másodfokú hozam modellekben a hozam felhalmozása Brown mozgásnak megfelelően történik, állapottól függő drift és variancia paraméterekkel.

3.1. tézis. *Egy másodfokú Markov hozam modellben a felhalmozott hozam sűrűségfüggvénye a t időpillanatban ($\underline{b}(t, w)$) kielégíti a következő differenciálegyenlet-rendszert:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(t, w) + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial w} \underline{b}(t, w) - \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \underline{b}(t, w) = \mathbf{Q} \underline{b}(t, w),$$

ahol \mathbf{Q} a háttérfolyamat generátora; \mathbf{R} a hozamfelhalmozás driftje, \mathbf{S} pedig annak varianciája az egyes állapotokban (utóbbi kettő diagonálmátrix). A $\underline{b}(t, w)$ vektor i . eleme tartozik az i állapotból induló hozamfelhalmozáshoz.

Mivel a kapott differenciálegyenlet-rendszer kétváltozós és másodfokú, a megoldás kiszámolása numerikusan problematikus (csak kevés, kb. 100 állapotra oldható meg). Az eloszlás helyett a felhalmozott hozam momentumainak a kiszámolása viszont nem jelent nagyobb

számítási igényt a hagyományos Markov hozam modellekhez képest, akár több százezer állapotról is megoldható a következő numerikus eljárás alkalmazásával:

3.2. tézis. *Egy másodfokú Markov hozam modellben a felhalmozott hozam n -dik momentuma a t időpillanatban ($M^{(n)}(t)$) az alábbi módon kapható meg:*

$$\underline{M}^{(n)}(t) = n! d^n \sum_{k=0}^G e^{-qt} \frac{(qt)^k}{k!} \underline{D}^{(n)}(k) + \underline{\xi}(G),$$

A $\underline{\xi}(G)$ hibátagszám ϵ alá csökkenthető, ha G -t a következőképpen állítjuk be:

$$G = \min_g \left(2 d^n n! (qt)^n \sum_{k=g+n+1}^{\infty} e^{-qt} \frac{(qt)^k}{k!} < \epsilon \right). \quad (1)$$

A $\underline{D}^{(n)}(k)$ együtthatók az alábbi rekurzív összefüggéssel számolhatók:

$$\underline{D}^{(n)}(k+1) = \mathbf{R}' \underline{D}^{(n-1)}(k) + \frac{1}{2} \mathbf{S}' \underline{D}^{(n-2)}(k) + \mathbf{Q}' \underline{D}^{(n)}(k), \quad (2)$$

A részleges növekmény-vesztéses Markov hozam modelleket időmegfordítással analízálom. Ugyanis ilyen hozam modellek úgy működnek, mintha a veszteséggel csökkentett rátával zajlana a felhalmozás egészen a t előtti utolsó állapotátmenetig. Az utolsó átmenet után a hozam a veszteségmentes rátával gyűlik. Az idő megfordításával az ilyen rendszereket vissza lehet vezetni a hagyományos hozam modellekre. Ehhez meg kell duplázni az állapotteret. Az első részben veszteség nélkül gyűlik a hozam, az első átlépés azonban átvisz a második részbe, ahol veszteséggel csökkentett rátával megy tovább a hozamfelhalmozás. Ezen az ötleten alapul a következő két tézis.

3.3. tézis. *Egy részleges növekmény-vesztéses Markov hozam modellben a felhalmozott hozam eloszlásfüggvénye a T időpillanatban ($\underline{B}(T, w)$) a következőképpen számolható ki:*

$$B(T, w) = \sum_{i \in S} \left(\overleftarrow{X1}_i(T, w) + \overleftarrow{X2}_i(T, w) \right) \gamma_i(0),$$

ahol a $\overleftarrow{X1}(\tau, w)$ és $\overleftarrow{X2}(\tau, w)$ kielégítik az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \overleftarrow{X1}(\tau, w) + \frac{\partial}{\partial w} \overleftarrow{X1}(\tau, w) \mathbf{R} = \overleftarrow{X1}(\tau, w) \mathbf{Q}_D, \quad (3)$$

és

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \overleftarrow{X2}(\tau, w) + \frac{\partial}{\partial w} \overleftarrow{X2}(\tau, w) \mathbf{R}_\alpha = \overleftarrow{X1}(\tau, w) (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_D)^T + \overleftarrow{X2}(\tau, w) \mathbf{Q}^T, \quad (4)$$

Mivel ez a differenciálegyenlet-rendszer kétváltozós, ezért közvetlenül csak kevés (kb. 100) állapotú hozammodellek vizsgálatára alkalmas. Az eloszlás helyett a momentumok kiszámolására viszont olyan numerikus eljárást sikerült kifejleszteni, melynek segítségével több százezer állapotú rendszerek vizsgálata is lehetséges:

3.4. tézis. *Egy részleges növekmény-vesztéses Markov hozam modellben a felhalmozott hozam n -dik momentuma a t időpillanatban ($M^{(n)}(t)$) az alábbi módon kapható meg:*

$$M^{(n)}(t) = \sum_{i \in S} \left(\overleftarrow{M1}_i^{(n)}(T) + \overleftarrow{M2}_i^{(n)}(T) \right) \gamma_i(0) ,$$

ahol $\overleftarrow{M1}_i^{(n)}(T)$ zárt alakú:

$$\overleftarrow{M1}^{(n)}(\tau) = \tau^n \underline{e} \mathbf{R}^n \mathbf{E}_D(\tau) , \quad (5)$$

($\mathbf{E}_D(\tau)$ diagonálmátrix: $\mathbf{E}_D(\tau) = \text{diag}\langle e^{q_{ii}\tau} \rangle$), $\overleftarrow{M2}_i^{(n)}(T)$ pedig a következő összegzés eredménye $\underline{\xi}(G)$ hibataggal:

$$\overleftarrow{M2}^{(n)}(\tau) = n! d^n \sum_{k=0}^G e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \underline{D}^{(n)}(k) + \underline{\xi}(G) \quad (6)$$

Megfelelően nagy G választással a hibatag tetszőlegesen kicsivé tehető:

$$G = \min_{g>n} \left((\lambda\tau)^{n+1} d^n \sum_{k=g-n-1}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} < \varepsilon \right) .$$

A $\underline{D}^{(n)}(k)$ együtthatók rekurzív módon számíthatók:

$$\underline{D}^{(n)}(k) = \begin{cases} \underline{e} (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Q}}_D^k) & n = 0 \\ 0 & k \leq n, n \geq 1 \\ \underline{D}^{(n-1)}(k-1) \tilde{\mathbf{R}}_\alpha + \underline{D}^{(n)}(k-1) \tilde{\mathbf{Q}} + \\ \quad \binom{k-1}{n} \underline{e} \tilde{\mathbf{R}}^n \tilde{\mathbf{Q}}_D^{k-1-n} (\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{Q}}_D) & k > n, n \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

Az ismertett numerikus módszerek segítségével mindkét kiterjesztés esetében nagy méretű modellek is vizsgálhatók. Saját implementációnkkal 200000 állapotú háttérfolyamattal rendelkező hozam modelleket is analizáltunk.

A másodfokú hozammodellek analízisét a [C8]-ban publikáltuk. Az ismertett algoritmusok is bekerültek az MRMSolve 2.0 hozammodell-megoldó szoftverbe, melyet a [C9] publikáció ismertet.

5. Az eredmények felhasználása

Az első téziscsoport eredményei közvetlenül alkalmasak az ATM AAL2 protokoll teljesítményanalízisére, illetve különféle méretezési feladatok megoldására. Emellett a kifejlesztett sorbanállási modell kellően általános ahhoz, hogy használni lehessen más, időzített használó rendszer modellezésére is.

A második téziscsoportéhoz tartozó, többosztályos sormodellekre adott közelítések QoS-t (minőségi szolgáltatást) nyújtó távközlési rendszerek analízisére használhatók, mivel ezekben a rendszerekben az általunk vizsgált ütemezési algoritmusok alkalmazása széleskörűen elterjedt.

A harmadik rész eredményei a modellezési eszközök készletét bővítik, olyan viselkedésű rendszerek elemzését teszik lehetővé (mint az ingadozó és/vagy veszteséges hozamfelhalmozás), melyek analízise eddig nem, vagy numerikus nem hatékony módon volt lehetséges.

Hivatkozások

- [1] ITU-T Recommendation I.363.2, B-ISDN ATM Adaptation Layer Type 2 Specification, Toronto, 1997.
- [2] OMNeT++ Discrete Event Simulation System, <http://www.omnetpp.org>.
- [3] J.P.C. Blanc. A numerical study of the coupled processor model. In *Computer Performance and Reliability*, 1988.
- [4] N.K. Jaiswal. *Priority Queues*. Academic Press, New York, 1968.
- [5] G. Latouche and V. Ramaswami. *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*. American Statistical Association and the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [6] R.G. Miller. Priority Queues. *Ann. Math. Statist.*, 31:86–103.
- [7] Marcel F. Neuts. *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and their Applications*. Dekker, 1989.
- [8] Leslie D. Servi. Algorithmic solutions to two-dimensional birth-death processes with application to capacity planning. *Telecommunication Systems*, 21(2):205–212, 2002.

- [9] T. Suda T. Takine, Y. Matsumoto and T. Hasegawa. Mean waiting times in nonpreemptive priority queues with markovian arrival and i.i.d. service processes. *Performance Evaluation*, 20(1):131–149, 1996.
- [10] L. Takács. Priority Queues. *Operation Research*, 12:63–74, 1964.
- [11] Tetsuya Takine. The Nonpreemptive Priority MAP/G/1 Queue. *Operation Research*, 47(6):917–927, 1999.

Publikációs lista

Külföldön megjelent (vagy megjelentetésre elfogadott), idegen nyelvű folyóirat-cikkek

- [J1] A. Horváth, G. Horváth, and M. Telek. **Analysis of Inhomogeneous Markov Reward Models**. *Linear Algebra and its Applications*, 386: 383-405, 2004.
- [J2] G. Horváth, M. Telek. **Analysis of a BMAP/D/1-Timer multiplexer**. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 128(4): 25-44, 2005.

Nemzetközi konferencia-kiadványban megjelent idegen nyelvű cikkek

- [C1] G. Horváth. **Approximate Waiting Time Analysis of Priority Queues**. In *Proc. of the Fifth International Workshop on Performability Modelling of Computer and Communication Systems*, Erlangen, Germany, Sep. 2001. Extended abstract.
- [C2] G. Horváth, and M. Telek. **Approximate Analysis of Two Class WFQ Systems**. In *Proc. of the Sixth International Workshop on Performability Modelling of Computer and Communication Systems*, pages 43–46, Arlington, IL, USA, Sept 2003. Extended abstract.
- [C3] G. Horváth, and Cs. Vulkán. **Analytical 3G RAN Transport Network Modeling with CALIPRAN**. In *Proc. of the 11th Microcoll*, Budapest, Hungary, Sep. 2003.
- [C4] G. Horváth, M. Telek, and Cs. Vulkán. **AAL2 Multiplexing Delay Calculation in UTRAN**. In *Proc. of the 11th Microcoll*, Budapest, Hungary, Sep. 2003.
- [C5] M. Telek, A. Horváth, and G. Horváth. **Analysis of inhomogeneous Markov reward models**. In *NSMC '03 (International Conference on the Numerical Solution of Markov Chains)*, pages 305–322, Urbana, Illinois, USA, Sep. 2003.

- [C6] R. German, M. Gribaudo, G. Horváth, and M. Telek. **Stationary Analysis of FSPNs with Mutually Dependent Discrete and Continuous Parts.** In *the 10th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, pages 30–39, Urbana, Illinois, USA, Sep. 2003.
- [C7] G. Horváth, M. Telek. **Completion Time in Markov Reward Models with Partial Incremental Loss.** In *Proc. of the Seventeenth Belarusian Workshop on Queueing Theory*, pages 104–109, Gomel, Belarus, Sep. 2003.
- [C8] G. Horváth, S. Rácz, M. Telek. **Analysis of Second Order Reward Models.** In *Proc. of The International Conference on Dependable Systems and Networks*, pages 845–854, Florence, Italy, June 2004.
- [C9] G. Horváth, S. Rácz, Á. Tari, M. Telek. **Evaluation of reward analysis methods with MRMSolve 2.0.** In *Proc. of the 1st International Conference on Quantitative Evaluation of Systems*, pages 165–174, Twente, The Netherlands, Sep. 2004.
- [C10] G. Horváth, M. Telek. **Analysis of a BMAP/D/1-Timer multiplexer.** In *Proc. of the First International Workshop on Practical Applications of Stochastic Modeling*, pages 113–132, London, Great Britain, Sep. 2004.
- [C11] L. Bodrog, G. Horváth, M. Telek. **Comparison of simulation models for long-range dependent traffic traces.** In *Proc. of International Workshop on rare event, RESIM*, Budapest, Hungary, Sep. 2004.
- [C12] G. Horváth. **A Fast Matrix-Anlytic Approximation for the Two Class GI/G/1 Non-Preemptive Priority Queue.** In *12th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications*, Riga, Latvia, 1-4 June 2005. To appear.
- [C13] G. Horváth, P. Buchholz, M. Telek. **A MAP Fitting Approach With Independent Approximation of the Inter-Arrival Time Distribution and the Lag Correlation.** *2nd International Conference on the Quantitative Evaluation of Systems*, Torino, Italy, September 19-22, 2005. Submitted.

Magyar nyelvű cikkek

- [C14] G. Horváth, M. Telek. **Kétosztályos WFQ kiszolgálás közelítő vizsgálata.** *Magyar Távközlés*. Beadva, Dec. 2004.