

Operátorszeletelési módszerek hibaanalízise és alkalmazásuk reakciódiffúzió-problémákra

Ladics Tamás

2015, április 13

1. Bevezetés

A disszertáció négy fő részből áll, amelyekben az operátorszeletelés módszerét alkalmazom absztrakt nemlineáris feladatokra. A fő motivációt a reakciódiffúzió-problémák adják. Főbb eredményeim a következők.

2. Új eredmények

2.1. Operátorszeletelés konvergenciája nemlineáris problémákra

Az operátorszeletelés konvergenciáját a szakirodalomban sok helyen vizsgálták. Az egyik megközelítés a Lie-algebrák és a Lie-operátorok fogalmán alapszik, amely a részoperátorok végtelen sokszor való differenciálhatóságát követeli meg. Vannak olyan tanulmányok, amelyekben csak a részoperátorok néhányszori differenciálását igénylik, noha minden esetben a globális hiba oly módon van kifejezve, hogy annak kiértékelése gyakorlatban meglehetősen bonyolult és magát a megoldást is felhasználja.

A [2] munkában bebizonyítom, hogy a lokálisan Lipschitz-folytonos részoperátorokkal felírt problémára a szekvenciális szeletelés és az additív szeletelés elsőrendben konvergens. Ezen állítások a lineáris, illetve sima operátorokkal rendelkező problémákra vonatkozó eredmények kiterjesztése a szekvenciális szeletelés esetében, illetve az additív szeletelés esetére eddig csak a lokális rendet vizsgálták korlátozott lineáris részoperátorokkal.

1. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy Banach tér, $D(f), D(g) \subset X$, tegyük fel, hogy $D := D(f) \cap D(g)$ egy összefüggő nyílt halmaz. Legyen $f : D(f) \rightarrow X$ és $g : D(g) \rightarrow X$ folytonos operátor. Tekintsük a következő kezdetiérték problémát

$$u'(t) = (f + g)(u(t)), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1)$$

ahol $u_0 \in D$, $t_0 \in I$ és $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum.

A [2] tanulmány a következő két feltételezésre épül.

1. Tegyük fel, hogy (1)-nek $t_0 = 0$ -val létezik egyetlen megoldása $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$, valamely $T > 0$ mellett.
2. Tekintsük a megoldás r sugarú környezetét

$$\mathbb{S}^r := \bigcup_{t \in [0, T]} \mathbb{S}_r(t), \quad \text{ahol } \mathbb{S}_r(t) := \{\eta : \|\eta - u(t)\| \leq r\}, \quad t \in [0, T].$$

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan L szám, hogy bármely $t \in [0, T]$ éy bármely $w, z \in \mathbb{S}_r(t)$ esetén $\|f(w) - f(z)\| \leq L\|w - z\|$ és $\|g(w) - g(z)\| \leq L\|w - z\|$ teljesül.

Gyakorlatban az L állandó függ r -től, itt L -t az r rögzített értékéhez választjuk. L még f -től és g -től is függ, ám a következő eredményekben ezt nem használjuk ki, L tekinthető úgy, mint $\max\{L_f, L_g\}$.

2. Definíció. Legyen $t^* \in (0, T]$ és tekintsük a

$$G_{\text{seq}}(t) := e^{Lt} \left(e^{3Lt} \left(\frac{Lt^2}{2} \frac{e^{2Lt^*} - 1}{e^{2Lt} - 1} \|g(u_0)\| + \frac{Lt}{4} \left(t^* e^{2Lt^*} - t \frac{e^{2Lt^*} - 1}{e^{2Lt} - 1} \right) \|(f+g)(u_0)\| \right) + \right. \\ \left. + e^{Lt} \frac{Lt^2}{2} \left(\frac{e^{2Lt^*} - 1}{2} \|(f+g)(u_0)\| + \|g(u_0)\| \right) + t \left(\frac{e^{2Lt^*} - 1}{2} \|(f+g)(u_0)\| + \|f(u_0)\| + \|g(u_0)\| \right) \right)$$

függvényt $t > 0$ -ra. Megmutatható, hogy szigorúan monoton növekvő, így bevezethető a $\tau^* := G_{\text{seq}}^{-1}(r)$, nyilvánvalóan $G_{\text{seq}}(t) \leq r$ minden $t \in [0, \tau^*]$ -re.

1. Tétel. A szekvenciális szeletelés elsőrendben konvergens minden $t^* \in [0, T]$ -ben. Továbbá minden $0 < \tau \leq \tau^*$ esetén, ahol $t^*/\tau =: n \in \mathbb{N}$ a globális hiba

$$E_{\text{seq}}(i\tau) \leq L\tau \frac{e^{2L\tau}}{4} \left(2\tau \frac{e^{2Li\tau} - 1}{e^{2L\tau} - 1} \|g(u_0)\| + \left(i\tau e^{2Li\tau} - \tau \frac{e^{2Li\tau} - 1}{e^{2L\tau} - 1} \right) \|(f+g)(u_0)\| \right),$$

minden $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ -re.

3. Definíció. Legyen $t^* \in (0, T]$ és tekintsük a szigorúan monoton

$$G_{\text{as}}(t) := t \frac{e^{Lt}}{2} \left(e^{3Lt} L t \frac{e^{2Lt^*} - 1}{e^{2Lt} - 1} + e^{2Lt^*} + 1 \right) (\|f(u_0)\| + \|g(u_0)\|)$$

függvényt $t > 0$ -ra. Legyen $\tau^* := G_{\text{as}}^{-1}(r)$.

2. Tétel. A additív szeletelés elsőrendben konvergens minden $t^* \in [0, T]$ -ben. Továbbá minden $0 < \tau \leq \tau^*$ esetén, ahol $t^*/\tau =: n \in \mathbb{N}$ a globális hiba

$$E_{\text{as}}(i\tau) \leq e^{3L\tau} \frac{L\tau^2}{2} \frac{e^{2Li\tau} - 1}{e^{2L\tau} - 1} (\|f(u_0)\| + \|g(u_0)\|),$$

minden $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ -re.

A globális hiba az $L, \|g(u_0)\|, \|f(u_0)\|, \|(f+g)(u_0)\|$ és a τ függvényében van kifejezve. Ezen eredmények a gyakorlatban a posteriori hibabecsléseket tesznek lehetővé, így megfelelő lépésköz választható.

2.2. Kombinált módszerek lokális rendje

Gyakorlatban a részproblémákat numerikusan oldjuk meg, így fontos az úgynevezett *kombinált módszerek* vizsgálata, amelyeket szeleteléssel és valamilyen numerikus módszer alkalmazásával nyerünk.

4. Definíció. Tekintsük a

$$u'(t) = Au(t) + R(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T], T \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

kezdetiérték problémát, ahol $u_0 \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ egy korlátos lineáris operátor és $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy legalább kétszer differenciálható nemlineáris leképezés.

Az (2) által leírható problémák egy fontos osztálya a reakció–diffúzió és a reakció–advekción egyenletek. Az A lineáris operátor a diffúziót vagy advekciót reprezentáló operátor térben diszkrétizált megfelelője; R a kémiai reakciókat leíró operátor, sok gyakorlati esetben egy polinom.

A [1] munkában bebizonyítom, hogy a klasszikus szeletelések (szekvenciális, Marcsuk-Strang, szimmetrikusan súlyozott) négy különböző rendű (1, 2, 3, 4) numerikus módszerrel való kombinációjával kapott módszer a (2) feladatra alkalmazva első-, illetve másodrendű. A közös rend a szeletelés és az alkalmazott numerikus séma rendjének minimuma. Ez a lineáris részoperátorokra vonatkozó eredmények kiterjesztése.

5. Definíció. Tekintsük a $[0, T]$ egy felosztását $\{0, \tau, 2\tau, \dots, n\tau = T\}$ és legyen $u_{\text{comb}}^{(n)}$ a (2) feladat u megoldásának egy kombinált módszerrel kapott közelítése. A kombinált módszer *lokális hibája* $\|u(\tau) - u_{\text{comb}}^{(n)}(\tau)\|$, ahol u a (2) megoldása. A kombinált módszer *lokális rendje* az a legnagyobb $q \in \mathbb{N}$, amelyre léteznek olyan pozitív állandók c és $\tau^* \in (0, T]$, hogy

$$\left\| \frac{u(\tau) - u_{\text{comb}}^{(n)}(\tau)}{\tau} \right\| \leq c\tau^q$$

teljesül minden $\tau \in (0, \tau^*]$ esetén.

3. Tétel. A szekvenciális szeletelés és az elsőrendű explicit Euler módszer kombinációjának rendje 1.

4. Tétel. A szimmetrikusan súlyozott szeletelés és az elsőrendű explicit Euler módszer kombinációjának rendje 1.

5. Tétel. A szekvenciális szeletelés és a másodrendű javított Euler módszer kombinációjának rendje 1.

A fenti tételek bizonyítása alkalmazható magasabb rendű numerikus módszerekkel bíró kombinált módszerek rendjének meghatározására. Habár a számítások nagyon bonyolulttá válnak a rend növekedésével. Egy *Mathematica* kódot írtam a bizonyításokban szereplő szimbolikus számítások elvégzésére. Meghatároztam klasszikus szeletelések négy különböző numerikus sémával—explicit Euler, másodrendű javított Euler, harmadrendű Heun-, negyedrendű Runge-Kutta— való kombinálásával kapott módszerek rendjét. Az 1. Táblázat tartalmazza a kombinált módszerek rendjét. A szeletelések és a numerikus módszerek rendje található a zárójelbe írva. A kombinált módszer rendje

p_k	exp. Euler (1)	jav. Euler (2)	Heun (3)	Runge-Kutta (4)
szekv (1)	1	1	1	1
M-S (2)	1	2	2	2
szs (2)	1	2	2	2

1. táblázat. A kombinált módszerek lokális rendje az (2) feladatra.

$p_k = \min\{p_{sz}, p_{\text{num}}\}$, ha p_{sz} a szeletelés és p_{num} jelöli a numerikus módszer rendjét.

1. Példa. A Fisher-egyenletre

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) &= \partial_x^2 u(t, x) + u(t, x)(1 - u(t, x)) & x \in [0, 4\pi], t \geq 0, \\ u(0, x) &= 1 + 0.9 \sin x \\ u(t, 0) &= 1 \\ u(t, 4\pi) &= 1 \end{cases} \quad (3)$$

vonatkozó numerikus eredményeket tartalmazza a 2. Táblázat.

p_c	exp. Euler (1)	javított Euler (2)	Heun (3)	Runge-Kutta (4)
szekv. (1)	0.99	0.98	0.98	0.99
M-S (2)	0.99	1.99	1.90	1.98
szs (2)	0.99	1.99	1.98	1.97

2. táblázat. A lokális rend Fisher-egyenletre vonatkozó becslései.

2.3. Az iteratív szeletelés

Az [4] munkában bizonyítjuk, hogy amikor az operátor tetszőleges számú részoperátor összegként írható fel, az iteratív szeletelés lokális rendje az eljárás során megoldott részfeladatok számával egyezik meg a *két-szintű* módszer esetén. Ez a két részoperátor esetére vonatkozó eredmények kiterjesztése. Definiáljuk *több-szintű* módszerek egy nagy családját, és a lokális rend szempontjából jellemezzük ezen módszereket.

6. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és tekintsük a

$$u'(t) = \sum_{j=1}^k A_j u(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T], T \in \mathbb{R}^+, \quad (4)$$

kezdeti érték problémát, ahol $D(A_j) = X$ és A_j korlátos lineáris operátor minden $j = 1, \dots, k$ -ra.

Tekintsük a $[0, T]$ egy felosztását $\{0, \tau, 2\tau, \dots, N\tau = T\}$ valamely $N \in \mathbb{N}$ mellett és legyen $\mathcal{N}_0 := \{0, 1, \dots, N-1\}$.

7. Definíció. A *két-szintű iteratív szeletelés* a következő részfeladatok egymás utáni megoldását jelenti

$$\begin{cases} v'_{i+j}(t) = A_j v_{i+j}(t) + (A - A_j) v_{i+j-1}(t), & t \in [n\tau, (n+1)\tau], \\ v_{i+j}(n\tau) = u_{it,2}(n\tau), \end{cases} \quad j = 1, \dots, k$$

$i = 0, k, 2k, \dots, (m-1)k$ és $n \in \mathcal{N}_0$ -ra, ahol $u_{it,2}(0) := u_0$ és $v_0(t) := u_{it,2}(n\tau)$ minden $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ -re. A (4) megoldásának közelítése az $u_{it,2}((n+1)\tau) = v_{mk}((n+1)\tau)$.

6. Tétel. Tekintsük a (4) kezdeti érték problémát és legyenek $A_j \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, \dots, k$ korlátos lineáris operátorok. A *két-szintű módszer lokális rendje* mk .

8. Definíció. A *k-szintű iteratív szeletelés* a következő részfeladatok egymás utáni megoldásaként definiálható $i = 0, k, 2k, \dots, (m-1)k$ és $n \in \mathcal{N}_0$ mellett:

$$v'_{i+1}(t) = A_1 v_{i+1}(t) + \sum_{j=2}^k A_j v_{i+j-k}(t), \quad v_{i+1}(n\tau) = u_{it,k}(n\tau), \quad t \in [n\tau, (n+1)\tau], \quad (5a)$$

⋮

$$v'_{i+l}(t) = \sum_{j=1}^l A_j v_{i+j}(t) + \sum_{j=l+1}^k A_j v_{i+j-k}(t), \quad v_{i+l}(n\tau) = u_{it,k}(n\tau), \quad t \in [n\tau, (n+1)\tau], \quad (5b)$$

⋮

$$v'_{i+k}(t) = \sum_{j=1}^k A_j v_{i+j}(t), \quad v_{i+k}(n\tau) = u_{it,k}(n\tau), \quad t \in [n\tau, (n+1)\tau], \quad (5c)$$

ahol $u_{it,k}(0) := u_0$ és $v_{2-k}(t) = v_{3-k}(t) = \dots = v_0(t) = u_{it,k}(n\tau)$ minden $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ -ra. A (4) megoldásának közelítése az $u_{it,k}((n+1)\tau) = v_{mk}((n+1)\tau)$.

7. Tétel. A k -szintű iteratív szeletelés (5) lokális rendje $\left\lceil \frac{mk}{k-1} \right\rceil$, ahol $\lceil \cdot \rceil$ a felső egész részt jelenti.

Definiálhatjuk iteratív szeletelések egy családját—amely tartalmazza a fent bemutatott módszereket—a következő módon.

9. Definíció. Legyenek $\mathcal{J} := \{1, 2, \dots, k-1\}$ és $n_j^l \in \mathcal{J}$, ahol $j, l = 1, 2, \dots, k$. Tekintsük a következő iteratív szeletelési eljárást $i = 0, k, 2k, \dots, (m-1)k$ mellett:

$$v'_{i+l}(t) = A_l v_{i+l}(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k A_j v_{i+l-n_j^l}(t), \quad v_{i+l}(n\tau) = u_{it,k}(n\tau), \quad l = 1, \dots, k \quad (6)$$

ahol $v_{2-k}(t) = \dots = v_0(t) = u_{it}(n\tau)$ és $n \in \mathcal{N}_0$.

Az indexek definíciója lehetővé teszi egy részoperátor $k-1$ korábbi szintű iterálófüggvénnyel sok különböző módon való társítását, így az iteratív szeletelések egy nagy osztálya határozható meg.

8. Tétel. Az (6) módszer lokális rendje p , amelyre $\left\lceil \frac{mk}{k-1} \right\rceil \leq p \leq mk$ teljesül.

2. Példa. Tekintsük a következő állandó együttható közönséges differenciál-egyenlet rendszert:

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} u(t), \quad u(0) = u_0, \quad (7)$$

ahol $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$. Bontsuk fel az együttható-mátrixot a következő módon $A = A_1 + A_2 + A_3$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a választással a mátrixok exponenciálisa szimbolikusan számítható,

$$e^{tA_1} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad e^{tA_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tA_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

A (7) egyenletet megoldottuk két-szintű és k -szintű iteratív szeletelésekkel szimbolikusan a *Mathematica* program segítségével. A hibák főréseze található a 3. Táblázatban, az iterációk m számával és a módszer p rendjével. Az 5 definíció alapján kicsi t -re $\|u(t) - u_{it}(t)\| \approx ct^{p+1}$ teljesül, ahol a rend p . Az eredmények összhangban vannak az elméletiekkel:

$p = mk$ a két-szintű és $p = \left\lceil \frac{mk}{k-1} \right\rceil$ a k -szintű módszer esetén.

3. Példa. Tekintsük a háromdimenziós diffúziós egyenletet $u : \mathbb{R}_0^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ -val, ahol $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ egy \mathbb{R}^3 -beli gömb.

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, \mathbf{x}) &= \Delta u(t, \mathbf{x}) \\ u(0, \mathbf{x}) &= \sin x \sin y \sin z \\ u(t, \mathbf{x}_b) &= 0, \quad \forall \mathbf{x}_b \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

3. táblázat. A hiba főrésze a két-szintű és a k -szintű módszer esetén, $k = 3$ -ra.

m	$u(t) - u_{it,2}(t)$	$p = 3m$	$u(t) - u_{it,k}(t)$	$p = \left\lceil \frac{3m}{2} \right\rceil$
1	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} t^4 u_0$	3	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} t^3 u_0$	2
2	$\begin{pmatrix} \frac{9}{280} & -\frac{11}{140} \\ -\frac{11}{280} & \frac{27}{280} \end{pmatrix} t^7 u_0$	6	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^4 u_0$	3
3	$\begin{pmatrix} \frac{1}{1680} & -\frac{7}{480} \\ -\frac{7}{9600} & \frac{1}{560} \end{pmatrix} t^{10} u_0$	9	$\begin{pmatrix} \frac{1}{60} & -\frac{7}{180} \\ -\frac{1}{120} & \frac{1}{60} \end{pmatrix} t^6 u_0$	5
4	$O(t^{13})$	12	$\begin{pmatrix} \frac{1}{1260} & -\frac{1}{630} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^7 u_0$	6
5	$O(t^{16})$	15	$\begin{pmatrix} \frac{1}{11340} & -\frac{1}{5040} \\ -\frac{1}{30240} & -\frac{1}{15120} \end{pmatrix} t^9 u_0$	8

4. táblázat. A kombinált módszerek lokális hibájának becslése a két-szintű és a 3-szintű módszer (8) feladatra való alkalmazásakor.

két-szintű módszer			3-szintű módszer	
p_{num}	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$
1	0.921	0.921	0.921	0.921
2	1.954	1.954	1.954	1.954
3	2.973	2.973	2.922	2.94
4	3.981	3.96	3.895	3.933

ahol $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ és $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u$. Az iteratív szeleteléseket a

$$A_1 u := \Delta_x u, \quad A_2 u := \Delta_y u, \quad A_3 u := \Delta_z u$$

felbontás alapján definiáljuk. Lokális hiba becslései találhatóak a 4. Táblázatban. A részfeladatokat négy különböző rendű $p_{\text{num}} = 1, 2, 3, 4$ numerikus módszerrel oldottuk meg. Az utolsó sor – kivéve a második oszlopbeli tagot – és a harmadik oszlop harmadik tagja (≈ 2 -t várjuk) magasabb rendű pontosságot jelez az elméleti eredmények alapján elvártnál, ami 3, 4, 2, 3 lenne. Erre a magyarázat a következő: a részfeladatok egy lépésben lettek megoldva, másszóval a numerikus séma és az iteratív szeletelés időlépcsője ugyanakkora volt. Akkor várható, hogy az elmélet eredményt kapjuk vissza, ha a numerikus időlépcső sokkal kisebb, mit a szeletelésé. Ilyen interferencia megfigyelhető, ha különböző módszereket kombinálunk egy feladat megoldásakor.

2.4. Hullám-alakú iteráció módszere szemi-lineáris problémákra

A [3] munkában explicit hibabecslést adok a hullám-alakú iteráció módszerének közvetlenül az absztrakt, folytonos szemi-lineáris problémára való alkalmazásakor. Ez a hibabecslés jobb, mint a szakirodalomban találhatóak, amelyek magát a megoldást is tartalmazzák, így nem alkalmasak a hiba mennyiségi becslésére. Az eredményeket az iteráció időablakokon való alkalmazása esetére is kiterjesztem, amely korábban nem volt mennyiségileg tanulmányozva. Továbbá a kombinált módszer hibáját is becslöm, azaz amikor az iterációs részfeladatokat numerikusan oldjuk meg.

10. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy Banach tér, $D(A), D(F) \subset X$, tegyük fel, hogy $\Omega := D(A) \cap D(F)$ egy nyílt halmaz. Tekintsük a

$$u'(t) = Au(t) + F(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T], T \in \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

kezdeti érték problémát, ahol $u_0 \in \Omega$. Legyen $A : D(A) \rightarrow X$ lineáris, $F : D(F) \rightarrow X$ egy nemlineáris operátor.

A [3] elemzés a következő két **feltételezésen** alapul. Tegyük fel, hogy

1. Az A operátor egy erősen folytonos félcsoportot generál $(S(t))_{t \geq 0}$, amelyre $\|S(t)x\| \leq Me^{\omega t} \|x\|$, minden $x \in X$ -re és $t \in [0, T]$ -re, ahol M és ω nemnegatív állandók.
2. Létezik egy zárt gömb $B_\delta(u_0)$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ és egy olyan L állandó hogy $\|F(v) - F(w)\| \leq L\|v - w\|$ minden $v, w \in B_\delta(u_0)$ párra.

11. Definíció. A hullámalakú iterációt definiáljuk a (9) feladatra a

$$v_i'(t) = Av_i(t) + F(v_{i-1}(t)), \quad v_i(0) = u_0, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

feladatok megoldásaként, ahol $i \in I := \{1, 2, \dots, m\}$, valamely $m \in \mathbb{N}$ -re (az iterációk száma) és a $v_0(t) = u_0$ kezdőfüggvénnyel $t \in [0, T]$ -re.

12. Definíció. Tegyük fel, hogy (9) megoldását egy függvénysorozattal közelítjük, melyet a (10) megoldásai szolgáltatnak. Ekkor az iterációs hiba

$$e_i(t) := \|u(t) - v_i(t)\|.$$

Definiáljuk a

$$\rho(t) := \alpha_1 M \frac{e^{(\omega + ML)t} - 1}{\omega + ML}, \quad \text{with} \quad \alpha_1 := \|(A + F)(u_0)\|,$$

továbbá legyen $t_\delta := \rho^{-1}(\delta)$.

9. Tétel. Tekintsük a feltételezéseket, ekkor a (9) egyértelmű u megoldására

$$\|u(t) - u_0\| \leq \rho(t)$$

teljesül, minden $t \in [0, t_\delta]$ -re.

Az 9 Tétel egy erős alapot ad az iterációs hiba becslésére.

10. Tétel. A 9. Tétel feltételei és jelölései mellett és $\omega > 0$ esetén, minden $t \in [0, T]$ -re $T \leq t_\delta$ mellett az iterációs hiba

$$e_i(t) \leq \frac{(MLt)^i}{i!} \rho(t).$$

11. Tétel. A 9. Tétel feltételei és jelölései mellett és $M = 1, \omega = 0$ esetén minden $t \in [0, T]$ -re

$$e_i(t) \leq \left(e^{Lt} - \sum_{k=0}^i \frac{(Lt)^k}{k!} \right) \frac{\alpha_1}{L}. \quad (11)$$

Az a tény, hogy az iterációs hiba nagyobb ütemben csökken kis időintervallumok esetén annak a kérdésnek a tanulmányozását ösztönzi, hogy vajon jobb közelítéseket kapunk-e, ha felosztjuk az időintervallumot kis részintervallumokra, majd ezeken ismételve alkalmazzuk a hullámalakú iterációt. Ezt az eljárást nevezik az *időablakok* alkalmazásának.

13. Definíció. Legyen

1. $N \in \mathbb{N}^+$ rögzített, $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$,
2. $v_m^{(n)}$ az m -dik iterálófüggvény az n -dik időablakban, $v_m^{(n)}(0) = v_m^{(n-1)}(\tau)$, $n \in \mathcal{N}$ és
3. u_n az $u_n' = (A + F)(u_n)$ megoldása, amelyre $u_n(0) = v_m^{(n-1)}(\tau)$, $n \in \mathcal{N}$,

ahol $v_m^{(0)} := u_0$.

12. Tétel. A 7. oldalon lévő feltételezések mellett tekintsük a $[0, T]$ intervallum N darab τ hosszúságú részintervallumra való felbontását: $[(n-1)\tau, n\tau]$, $n \in \mathcal{N}$. Ekkor a hullámalakú iteráció részintervallumokon való alkalmazásával kapott módszer konvergens, azaz közelíti a (9) megoldását tetszőlegesen kicsi hibával, ha az iterációk száma tart a végtelenhez. Továbbá

$$\|u(n\tau) - v_m^{(n)}(\tau)\| \leq \frac{(ML\tau)^m}{m!} M^2 \frac{e^{(\omega+ML)n\tau} - 1}{\omega + ML} \alpha_N \quad (12)$$

bármely $n \in \mathcal{N}$ -re egy alkalmas α_N számmal, amely független az iterációk számától.

A (12) összefüggés lehetővé teszi az időablakok alkalmazásával és anélkül kapott iterációs hibák összehasonlítását. Mivel csak felső hibabecsléseink vannak, így ezek az eredmények heurisztikus jellegűek, ámbar a numerikus kísérletek alátámasztják következtetéseinket. Ahhoz, hogy időablakokkal jobb eredményt kapjunk

$$\|u(T) - v_m^{(N)}(T)\| \leq \|u(T) - v_m(T)\|$$

szükséges. Ez heurisztikusan

$$\begin{aligned} \frac{(ML\tau)^m}{m!} M^2 \frac{e^{(\omega+ML)T} - 1}{\omega + ML} \alpha_N &\lesssim \frac{(MLN\tau)^m}{m!} M \frac{e^{(\omega+ML)T} - 1}{\omega + ML} \alpha_1, \\ M \frac{\alpha_N}{\alpha_1} &\lesssim N^m \end{aligned}$$

összefüggést adja, ami azt jelenti, hogy ha az iterációk száma meghalad egy bizonyos értéket, akkor időablakok alkalmazásával kisebb hiba keletkezik. Ha feltesszük továbbá, hogy a hibabecslések közel vannak a valódi értékekhez, akkor az

$$\frac{\|u(T) - v_m(T)\|}{\|u(T) - v_m^{(N)}(T)\|} \approx N^m \frac{\alpha_1}{\alpha_N} \frac{1}{M}$$

az

$$\ln \|u(T) - v_m(T)\| - \ln \|u(T) - v_m^{(N)}(T)\| \approx m \ln N + \ln \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_N} \frac{1}{M} \right). \quad (13)$$

összefüggést eredményezi.

Gyakorlatban a (10) részfeladatait numerikusan oldjuk meg, ezért lényeges megmutatni, hogy a *kombinált módszer*—a hullámalakú iteráció és egy numerikus séma kombinációja—konvergens. Rögzítsük T -t úgy, hogy $0 < T < t_\delta$ és tekintsük a $\phi : C^1([0, T], B_\delta(u_0)) \rightarrow C^1([0, T], B_\delta(u_0))$ leképezést, amelyre

$$v_i(t) = \phi(v_{i-1})(t).$$

Ekkor a (10) iterálófüggvénye felírható $v_i(t) = \phi^i(v_0)(t)$ alakban. Legyen $\hat{\phi}(v)$ a $\phi(v)$ egy konvergens numerikus módszerrel előállított közelítése. Tegyük fel, hogy van egy alkalmas interpoláció P és az alkalmazott numerikus módszer paraméterei megválaszthatók oly módon, hogy a $\tilde{\phi} := P \circ \hat{\phi}$ leképezés $\tilde{\phi}(v)(t) \in B_\delta(u_0)$ -t ad minden $t \in [0, T]$ esetén. Ezen definíciókkal a kombinált módszer leírható a *numerikus iteráló függvénnyel* $\tilde{v}_i := \tilde{\phi}^i(v_0)$. Ekkor az i -dik iterációban ébredő numerikus hiba $\|\phi(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0)) - \tilde{\phi}(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0))\|_\infty$. A numerikus módszer megválasztásán túl a numerikus hiba függ a diszkrétizációs paraméterektől. Így formálisan $\|\phi(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0)) - \tilde{\phi}(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0))\|_\infty \leq c(p)$ írandó, ahol p a diszkrétizációs paraméterek vektora, helyes megválasztásával a numerikus hiba tetszőlegesen kicsi lehet.

14. Definíció. Tekintsük a fenti jelöléseket. Ekkor a kombinált módszer kumulatív numerikus hibája

$$CNE_i(t) := \|v_i(t) - \tilde{v}_i(t)\| = \|\phi^i(v_0)(t) - \tilde{\phi}^i(v_0)(t)\|.$$

13. Tétel. Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ -hez létezik egy $c_i(p)$ oly módon, hogy $\|\phi(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0)) - \tilde{\phi}(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0))\|_\infty \leq c_i(p)$, ekkor $c(p) := \max\{c_i(p), i \in I\}$ mellett

$$CNE_i(t) \leq \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{ML}{\omega}\right)^j e^{\omega t} (-1)^j \left(e^{-\omega t} - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-\omega t)^k}{k!}\right) c(p)$$

minden $i \in I$ -re, ahol $\sum_{k=0}^{-1} (\cdot)$ -t nullának tekintendő.

1. Állítás. Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ -hez létezik egy $c_i(p)$ oly módon, hogy $\|\phi(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0)) - \tilde{\phi}(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0))\|_\infty \leq c_i(p)$, ekkor $c(p) := \max\{c_i(p), i \in I\}$ mellett

$$CNE_i(t) \leq \frac{MLe^{(\omega+ML)t} + \omega}{\omega + ML} c(p)$$

minden $i \in I$ -re $t \in [0, T]$ -re.

14. Tétel. A 7. oldalon lévő feltételezések mellett tegyük még fel, hogy minden iterálófüggvényt egy konvergens numerikus módszerrel közelítünk. Ekkor a hullámalakú iteráció és a numerikus módszer kombinációja egy konvergens módszert ad a (9) feladat megoldásának közelítésére. Továbbá a fenti jelölésekkel

$$\|u(t) - \tilde{v}_i(t)\| \leq \frac{(MLt)^i}{i!} \rho(t) + \frac{MLe^{(\omega+ML)t} + \omega}{\omega + ML} c(p)$$

minden $i \in I$ és $t \in [0, T]$ mellett.

15. Tétel. Tegyük fel, hogy $\omega = 0$, $M = 1$ és létezik t -től független olyan $c(p)$ állandó, hogy minden $i \in I$ -re $\|\phi(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0)) - \tilde{\phi}(\tilde{\phi}^{i-1}(v_0))\|_\infty \leq c(p)$ teljesül. Ekkor

$$CNE_i(t) = \|\phi^i(v_0)(t) - \tilde{\phi}^i(v_0)(t)\| \leq \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(Lt)^k}{k!} c(p)$$

minden $i \in I$ és $t \in [0, T]$ esetén.

1. Megjegyzés. A kumulált numerikus hiba $e^{Lt}c(p)$ -hez tart $i \rightarrow \infty$ esetén, így az 1. állítás érvényben marad $\omega = 0$ és $M = 1$ esetén.

16. Tétel. Tekintsük a 7. oldalon található feltételezéseket $\omega = 0$, $M = 1$ értékekkel és tegyük fel, hogy minden iteráló függvényt egy konvergens numerikus módszerrel közelítünk. Ekkor a kombinált módszer konvergens. Továbbá

$$\|u(t) - \tilde{v}_i(t)\| \leq \left(e^{Lt} - \sum_{k=0}^i \frac{(Lt)^k}{k!}\right) \frac{\alpha_1}{L} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(Lt)^k}{k!} c(p) \quad (14)$$

minden $i \in I$ és $t \in [0, T]$ esetén.

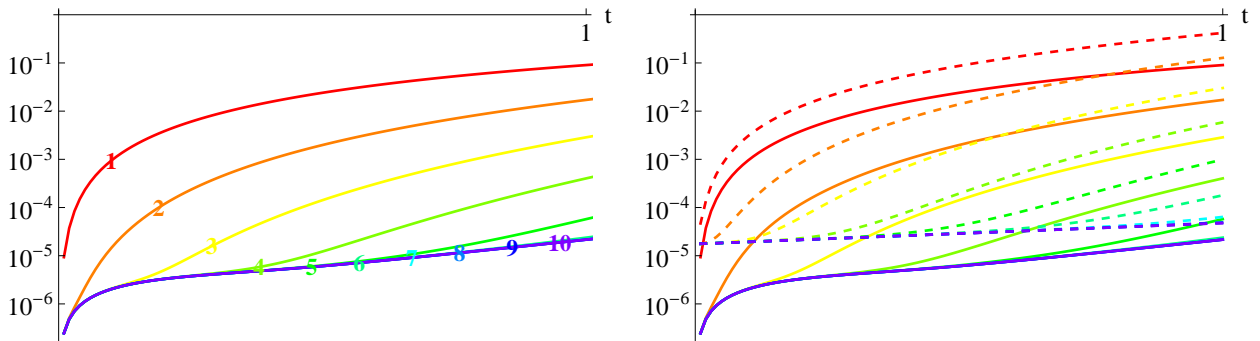
4. Példa. A kezdeti érték probléma

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) &= -\partial_x u(t, x, y) - \partial_y u(t, x, y) + u^2(t, x, y) & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 \\ u(0, x, y) &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - y^2}, \end{cases} \quad (15)$$

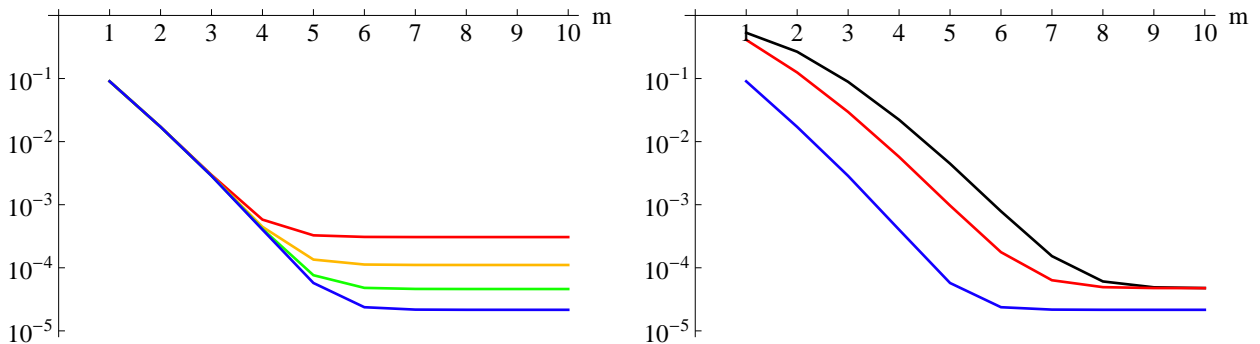
egy másodrendű autokatalízist ír le advekciónak mellett. Megoldása

$$u_a(t, x, y) = \frac{1}{\pi e^{(x-t)^2 + (y-t)^2} - t}.$$

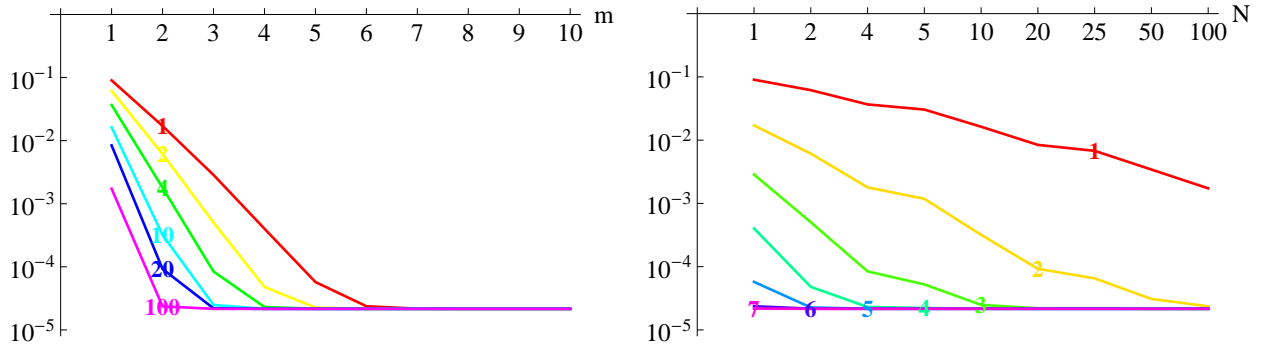
A (15) probléma (9) típusú az $Au = -\partial_x u - \partial_y u$, $F(u) = u^2$ és $X = C_b^2(\mathbb{R}^2, [0, 1])$ definíciókkal. A megoldás $t = \pi$ és $(x, y) = (\pi, \pi)$ -ben felrobban. A megoldást $t \in [0, 1]$ -re közelítettem. A megoldás megfelelően kicsi környezetében $L = 1$ érvényes.



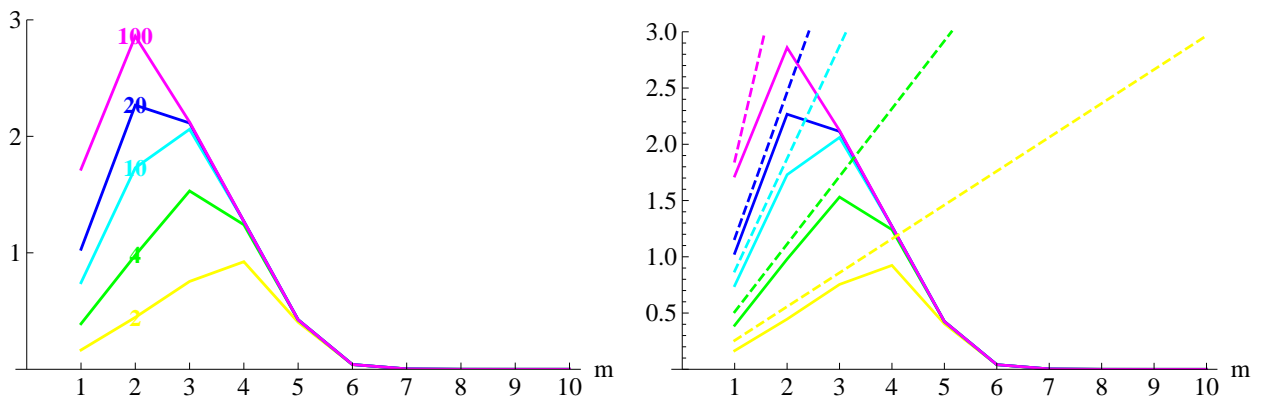
1. ábra. A közelítések hibája, $\|u(t) - \tilde{v}_m(t)\|$ —ahol a hullámalakú iterációt konvergens numerikus módszerrel kombináltam— van ábrázolva időben, logaritmus skálán, $m = 1, \dots, 10$ iterációval a bal oldalon. Az elméleti becsléssel együtt (szaggatott) a jobb oldalon.



2. ábra. Bal oldal: A (15) közelítésének hibája, hullámalakú iteráció negyedrendű Runge-Kutta módszerrel kombinálva logaritmus skálán az iterációk számának függvényében. A diskretizációs paraméter $\Delta x = 1/5$ –piros, $1/6$ –narancs, $1/7$ –zöld, $1/8$ –kék. Jobb oldal: az eredmények $1/8$ (kék) mellett $t = T$ -vel, az (14) elméleti becslés (piros) és a szakirodalom klasszikus becslése (fekete).



3. ábra. A hiba $\|u - \tilde{v}_m^{(N)}\|_\infty$ logaritmus skálán az iterációk számának függvényében, $m = 1, \dots, 10$ és $N \in \mathcal{N} := \{1, 2, 4, 10, 20, 100\}$ a bal oldalon; a jobb oldalon ugyanez az időablakok számának (100 osztói) függvényében, $m = 1, \dots, 7$.



4. ábra. A (13)-ben található $\ln \|u - \tilde{v}_m^{(1)}\|_\infty - \ln \|u - \tilde{v}_m^{(N)}\|_\infty$ kifejezés az iterációk számának függvényében, a bal oldalon; a jobb oldalon az $m \ln N + \ln(\alpha_1/\alpha_N)$ elméleti becsléssel (szaggatott) együtt, $N \in \mathcal{N}$.

Hivatkozások

- [1] Ladics T. Application of operator splitting to solve reaction-diffusion equations. *E. J. Qualitative Theory of Differential Equations*, (9):1–20, 2012.
- [2] Ladics T. Convergence of operator splittings for locally Lipschitz-continuous operators in Banach-spaces. *submitted*, 2015.
- [3] Ladics T. Error analysis of waveform relaxation method for semi-linear reactio-diffusion problems. *J. Comput. Appl. Math.*, DOI: 10.1016/j.cam.2015.02.003, 2015.
- [4] Ladics T. és Faragó I. Generalizations and error analysis of the iterative operator splitting method. *Centr. Eur. J. Math.*, 11:1416–1428, 2013.

Konferencia kiadványokban közölt írások

[5] T. Ladics. Application of operator splitting in the solution of reaction-diffusion equations, *Proc. Appl. Math. Mech.*, 7: 2020135–2020136. doi: 10.1002/pamm.200701017

Poszterek és előadások

[6] T. Ladics. Application of the splitting method to the numerical solution of reaction-diffusion equations. *NATO Advanced Research Workshop, Advances in Air Pollution Modeling For Environmental Security*, Borovetz, Bulgaria, May 8-14, 2004.

[7] T. Ladics. Application of operator splitting in the solution of reaction-diffusion equations. *6th International Congress of Industrial and Applied Mathematics (ICIAM07)*, Zürich, July 16–20, 2007.

[8] T. Ladics. On the order of operator splitting methods in reaction–diffusion equations. *9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations*, Szeged, June 28–July 1, 2011.

[9] T. Ladics. Generalizations and error analysis of the iterative operator splitting method. *T⁴ Conference, Splitting methods: theory and applications workshop*, Budapest, May 24–25, 2012.

[10] T. Ladics. Error analysis of waveform relaxation method for semi-linear partial differential equations. *Szeged Dynamics Days*, Szeged, Feb. 28–March 2, 2014.