MŰEGYETEM 1782

PhD Tézisfüzet

Standard Koszul algebrák

Magyar András

Témavezető: Dr. Lukács Erzsébet

Algebra Tanszék
Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2018

Bevezetés

A kváziöröklődő algebrákat Cline, Parshall és Scott fedezte fel algebrai csoportok és Lie–algebrák speciális reprezentációi vizsgálata során [12]. Később a kváziöröklődő algebrákat tisztán gyűrűelméleti szempontból is vizsgálni kezdték. Kiderült, hogy ezek az algebrák számos területen előfordulnak mind a Lie–elméletben, mind az asszociatív gyűrűk területén. Például, a Bernstein-Gelfand-Gelfand $\mathcal{O}$ kategória előáll olyan blokkok kategóriaelméleti összegeként, ahol az egyes blokkok ekvivalensek egy megfelelő kváziöröklődő algebra moduluskategóriájával [10]. Másfelől, minden véges dimenziós asszociatív algebra, amelynek globális dimenziója legfeljebb 2, kváziöröklődő [15].

A kváziöröklődő algebrák elméletében a jobb, ill. bal oldali (ko)standard modulusok játszanak kulcsszerepet. Nevezetesen, egy algebra kváziöröklődő, ha a reguláris modulusa a standard modolusokkal van filtrálva, továbbá mindengyes standard modulus Schur–tulajdonságú, tehát endomorfizmusgyűrűjük ferdetest. Elhagyva a standard modulusok Schur–tulajdonságát kapjuk a standardul rétegezett algebrákat. Cline, Parshall és Scott eredményei [13] által motiválva, Ágoston, Dlab és Lukács elégséges (és a fokszámozott esetben szükséges és elégséges) feltételt adott arra, hogy egy kváziöröklődő algebra bővítésalgebrája szintén kváziöröklődő legyen ([1], [2] és [4]).

Ágoston, Dlab és Lukács belátták, hogy ha egy kváziöröklődő algebra standard Koszul (azaz, ha minden jobb és bal standard modulusa Koszul), akkor bővítésalgebrája kváziöröklődő [4]. Továbbá azt is kimutatták, hogy ez a dualitás megtartja a rétegező struktúrát abban az értelemben, hogy a természetes Ext_A^* funktor a (jobb) standard modulusokat a bővítésalgebra (bal) standard modulusaiba viszi.

Szintén e cikkükben bizonyították, hogy egy standard Koszul kváziöröklődő algebra Koszul, vagyis egyszerű modulusai Koszul modulusok (vagy, ha az algebra gráfalgebra, akkor a bővítésalgebra gráfja megegyezik a kiindulási algebra gráfjával). Később ez az állítás több helyen is (pl. [11], [16], [30], [36]) hasznosnak bizonyult. Ez azt sugallja, hogy a kérdést önmagában is érdemes vizsgálni más (vagy általánosabb) környezetben.

Később általánosították eredményeiket standardul rétegezett algebrákra azzal a további feltétellel, hogy az algebra fokszámozott és Koszul. Megmutatták, hogy ebben az esetben az algebra homologikus duálisa standardul rétegezett, és az Ext^*_A funktor a jobb oldali standard modulusokat a bővítésalgebra bal oldali valódi standard modulusaiba, míg az algebra bal oldali valódi standard modulusait a bővítésalgebra jobb oldali standard modulusaiba viszi. Mindazonáltal, a kérdés, miszerint a standard Koszul standardul rétegezett algebrák mindig Koszul algebrák-e, megválaszolatlan maradt. Továbbá, az is nyitott kérdés volt még, hogy az algebrák fokszámozottsága szükséges-e az eredményekhez.

A tézisfüzetben egy rövid áttekintést adunk a disszertációban bemutatott eredményekről. Követjük a dolgozat szerkezetét, vagyis az első fejezetben felelevenítjük a dolgozatban használt jelöléseket, alapvető definíciókat, majd az új eredményeket két külön fejezetben tárgyaljuk.

A második fejezetben standardul rétegezett algebrákkal és bővítésalgebráikkal foglalkozunk és kiterjesztjük az [1], [2] és [4] cikkek főbb eredményeit. A doktori értekezés eredményeit a [24], [25], [28] cikkek tartalmazzák. Az első cikkben bizonyítottuk standard Koszul standardul rétegezett algebrák Koszul tulajdonságát, a második cikkben beláttuk, hogy standard Koszul standardul rétegezett algebrák bővítésalgebrája standardul rétegezett, míg a harmadik cikkben öninjektív speciális biszeriális algebrákra láttuk be, hogy a Koszul–tulajdonság következik a standard Koszul tulajdonságból.

1. Jelölések és alapvető definíciók

A továbbiakban legyen A egy rögzített véges dimenziós K feletti asszociatív bázisalgebra, ahol K tetszőleges test. Az algebra Jacobson–radikálja legyen $J = \mathrm{rad}\, A$. A modulusok unitérek és végesen generáltak, ha mást nem mondunk, jobb modulusok. A végesen generált jobb ill. bal A-modulusok kategóriáját jelölje $\mathrm{mod}\text{-}A$ ill. $A\text{-}\mathrm{mod}$.

Legyen $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ a primitív ortogonális idempotensek egy teljes rendezett rendszere. A rendezés mellett a reguláris modulus kanonikus

$$A_A = e_1 A \oplus \ldots \oplus e_n A$$

felbontásában az i. felbonthatatlan projektív modulus $P(i) = e_i A$, amelynek egyszerű tetejét, $P(i)/\operatorname{rad} P(i)$-t $S(i)$ jelöli. Az A_A féligegyszerű teteje pedig legyen $\hat{S} = \oplus_{i=1}^n S(i)$. A megfelelő bal modulusok rendre $P^\circ(i), S^\circ(i)$ és $\hat{S}^\circ$.

Legyen $1 \leq i \leq n$ és $\varepsilon_i = e_i + \ldots + e_n$, hogy $\varepsilon_{n+1} = 0$. Ekkor az A centralizátor algebrái $C_i = \varepsilon_i A \varepsilon_i$-k, amelyek idempotensei természetesen öröklik az A-beli rendezést. Az i. standard, illetve valódi standard A-modulusok rendre, $\Delta(i) = e_i A / e_i A \varepsilon_{i+1} A$, ill. $\overline{\Delta}(i) = e_i A / e_i (\operatorname{rad} A) \varepsilon_i A$. Tehát az i. standard modulus a $P(i)$ legnagyobb olyan faktora, amely nem tartalmaz i-nél nagyobb típusú egyszerű modulust kompozíciófaktorként. Az i. valódi standard modulus pedig $P(i)$ legbővebb olyan faktora, amelynek radikálja nem tartalmaz olyan $S(j)$ egyszerű kompozíciófaktort, amelyre $j \geq i$.

Legyen $\mathcal{X}$ modulusok egy tetszőleges osztálya. Azt mondjuk, hogy az X modulus $\mathcal{X}$-szel van filtrálva, azaz $X \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ ha létezik részmodulusoknak egy $X = X^0 \supseteq X^1 \supseteq \ldots$ sorozata, amelyre $\bigcap_{i \geq 0} X^i = 0$ és minden X^i / X^{i+1} faktor izomorf valamely $\mathcal{X}$-beli modulussal. Az idempotensek egy rögzített $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ rendezése estén az X modulus nyomfiltrálása

$$X = X\varepsilon_1 A \supseteq X\varepsilon_2 A \supseteq \ldots \supseteq X\varepsilon_n A \supseteq 0.$$

Egy algebra standardul rétegezett (primitív ortogonális idempotenseinek egy rendezésére nézve), ha $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$, vagy ami ezzel ekvivalens ${}_A A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta}^\circ)$, ahol Δ jelöli a jobb standard modulusokat $\overline{\Delta}^\circ$ pedig a bal valódi standard modulusokat. Fontos tény, hogy $\operatorname{Ext}_A^h(\Delta(i), S(j)) = 0$, ha $h \geq 0$ és $i \geq j$, amikor $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$, és hasonlóan $\operatorname{Ext}_A^h(\overline{\Delta}(i), S(j)) = 0$, ha $h \geq 0$ és $i > j$ valahányszor $A_A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$ (ld. [12]).

Az $X \leq Y$ felső (top) részmodulus, ha $X \cap \operatorname{rad} Y = \operatorname{rad} X$. Ez pontosan akkor teljesül, ha a természetes $X \to Y$ beágyazás egy $X/\operatorname{rad} X \to Y/\operatorname{rad} Y$ beágyazást indukál. Ezeket a beágyazásokat felső (vagy top) beágyazásnak hívjuk. Másképp $X \to Y$ beágyazás top beágyazás, ha az indukált $\operatorname{Hom}_A(Y, \hat{S}) \to$

$\mathrm{Hom}_A(X, \hat{S})$ leképezés szürjektív. Legyen

$$P_\bullet(X): \qquad \ldots \to P_h(X) \to \ldots \to P_1(X) \to P_0(X) \to X \to 0$$

az X minimális projektív feloldása, ahol a h szizigi $\Omega_h(X) = \Omega_h$. Bevezetjük a $\mathcal{C}_A^i$ modulusok fogalmát. Azt mondjuk, hogy $X \in \mathcal{C}_A^i$, ha minden $h \leq i$ esetén Ω_h top részmodulusa P_{h-1}-nek. Az X modulus egy Koszu–modulus, ha $X \in \mathcal{C}_A := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_A^i$. Az A algebráról akkor mondjuk, hogy Koszul–algebra, ha $\hat{S}$ (vagy ezzel ekvivalens módon $\hat{S}^\circ$) Koszul–modulus (ld. [20]).

Az A bővítésalgebrája (vagy másképpen homologikus duálisa) az A^* (pozitívan) fokszámozott algebra, amely mint vektortér $\oplus_{h\geq 0}(A^*)_h = \oplus_{h\geq 0} \mathrm{Ext}_A^h(\hat{S}, \hat{S})$, és a szorzás a bővítések Yoneda–szorzata (ld [20]).

Az $\mathrm{Ext}_A^* : \text{mod-}A \to A^*\text{- grmod}$ funktor az $\mathrm{Ext}_A^h(-, \hat{S})$ funktorok direkt összege. Tehát ha $X \in \text{mod-}A$, akkor $\mathrm{Ext}_A^*(X)$ a $\oplus_{h\geq 0} \mathrm{Ext}_A^h(X, \hat{S})$ fokszámozott bal A^*-modulus. Az egyszerűség kedvéért $\mathrm{Ext}_A^*(X)$-t X^*-gal jelöljük és a h. szintjét, $\mathrm{Ext}_A^h(X, \hat{S})$-t, $(X^*)_h$-val.

Vagyis az X pontosan akkor Koszul–modulus, ha $(X^*)_h = (A^*)_1^h \cdot (X^*)_0$ minden $h \geq 0$ esetén. Így azt mondhatjuk, hogy az A pontosan akkor Koszul, ha $\mathrm{Ext}_A^h(\hat{S}, \hat{S}) = (\mathrm{Ext}_A^1(\hat{S}, \hat{S}))^h$ for $h \geq 1$ (cf. [20]).

Egy tetszőleges féligegyszerű S modulus esetén azt mondjuk, hogy az $X \in \text{mod-}A$ modulus *S-Koszul*, ha $\mathrm{Ext}_A^t(S, X) \subseteq \mathrm{Ext}_A^1(\hat{S}, S) \cdot \mathrm{Ext}_A^{t-1}(X, \hat{S})$ minden $t \geq 1$ esetén.

Legyenek A rendezett primitív ortogonális idempotensei az $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ sorozattal megadva. Ekkor az $\{f_i = \mathrm{id}_{S(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ az A^* algebra primitív ortogonális idempotenseinek egy teljes rendszerét adja. Ezt a halmazt mindig a fordított, $\mathbf{f} = (f_n, \ldots, f_1)$ rendezéssel tekintjük. Ezáltal az i. standard A^*-modulus $\Delta_{A^*}(i) = f_i A^*/f_i A^*(f_1 + \ldots + f_{i-1})A^*$ és az i. valódi standard modulus $\overline{\Delta}_{A^*}(i) = f_i A^*/f_i(A^*)_{\geq 1}(f_1 + \ldots + f_i)A^*$.

2. Standardul rétegezett algebrák

A standardul rétegezett algebrák fogalm a kváziöröklődő algebrák egy természetes általánosítása. Erre a tágabb algebraosztályra terjesztettük az alábbi két tétel eredményeit.

2.1. Tétel (I. Ágoston, V. Dlab, E. Lukács [4] Theroem 1)**.** *Legyen* $(A, \mathbf{e})$ *standard Koszul kváziöröklődő algebra. Ekkor* A *Koszul algebra.*

2.2. Tétel (Ágoston, Dlab, Lukács [4], Theroem 2)**.** *Legyen* $(A, \mathbf{e})$ *standard Koszul kváziöröklődő algebra. Ekkor az* $(A^*, \mathbf{f})$*, az* A *bővítésalgebrája kváziöröklődő.*

2.1. Standard Koszul standardul rétegezett algebrák

A dolgozat második fejezetében a 2.1 és 2.2 Tételeket általánosítottuk standardul rétegezett algebrákra. A rétegezettségre támaszkodva egy – az egyszerű modulusok számára vonatkozó – indukciót lehet alkalmazni. Ez hasonló Ágoston, Dlab és Lukács [4]-beli megközelítéséhez, ám az ottani bizonyítás erősen épít a kváziöröklődő algebrák globális dimenziójának végességére valamint bizonyos Ext-terek eltűnésére, ami az általános esetben hiányzik. Emiatt más, teljesen új ötletekre volt szükséges.

Előkészületként a dolgozat 2.1 alfejezetében néhány technikai állítást láttunk be (2.1.3–2.1.8 Lemmák) általánosabb, úgy nevezett, sovány algebrákról. (Ez a soványság definíció általánosítja az eredetileg csak kváziöröklődő algebrákra létező soványság fogalmát [1].) Az A sovány algebrát jellemzi, hogy minden i esetén $\varepsilon_i J^2 \varepsilon_i = \varepsilon_i J \varepsilon_i J \varepsilon_i$ fennáll. Könnyű látni, hogy a standard Koszul standardul rétegezett algebrák és oppozitalgebrájuk is sovány. A 2.1 alfejezet lemmái fontos kapcsolatot fednek fel A fölötti modulusok közötti top beágyazások és a megfelelő modulusok $C_i = \varepsilon_i A \varepsilon_i$ centralizátor algebrák fölötti top beágyazásai között. Mivel az indukció, amit követünk a centralizátor algebrákra épül, ezért e lemmák az egész dolgozat során hasznosak. Elsőként, elvezetnek az alábbi kulcsfontosságú lemmához.

2.3. Lemma (Lukács E., Magyar A. [24], 2.1 Lemma)**.** *Legyen A egy standard Koszul standardul rétegezett algebra. Ekkor a $C_2 = \varepsilon_2 A \varepsilon_2$ centralizátor algebra is standard Koszul és standardul rétegezett, továbbá a C_2 jobb oldali standard, ill. bal valódi standard modulusai $\Delta(i)\varepsilon_2$ és $\varepsilon_2 \overline{\Delta}^\circ(i)$ minden $i \geq 2$ esetén.*

Ezután a standard Koszul standardul rétegezett algebrákra koncentráltunk. A kváziöröklődő esetben [4] az alábbi modulusosztály játszott fontos szerepet.

$$\mathcal{K} = \left\{ X \mid X \ S(1)\text{-Koszul}, \ X\varepsilon_2 A \overset{t}{\leq} X, \ X\varepsilon_2 \in \mathcal{C}_{C_2} \right\}.$$

A szerzők megmutatták, hogy minden $\mathcal{K}$-beli modulus Koszul. Mi ugyanezt láttuk be a standardul rétegezett esetben, bár más megoldással. Először az alábbi tágabb osztályt tekintettük

$$\mathcal{K}_2 = \left\{ X \mid X\varepsilon_2 A \overset{t}{\leq} X, \ X\varepsilon_2 \in \mathcal{C}_{C_2} \right\}.$$

Megmutattuk, hogy ez az osztály zárt a szizigikre, majd erre támaszkodva bebizonyítottuk az alábbi állítást

2.4. Állítás (Lukács E., Magyar A. [24], 2.7 Állítás)**.** *Minden $\mathcal{K}_2$-beli modulus $\oplus_{i \geq 2} S(i)$-Koszul.*

Mivel $\overline{\Delta}^\circ(1) = S^\circ(1)$ Koszul–modulus, minden egyszerű A-modulus $S(1)$-Koszul standard Koszul standardul rétegezett algebra fölött. Másfelől, minden egyszerű modulus $\mathcal{K}_2$-beli, ami bizonyítja az egyik főeredményünket.

2.5. Tétel (Lukács E., Magyar A. [24], 2.9 Tétel)**.** *Minden standard Koszul standardul rétegezett algebra Koszul.*

2.2. Standard Koszul standardul rétegezett algebrák bővítésalgebrája

A rétegezett algebrákról szóló fejezet második részében az algebrák bővítésalgebráit, ill. azok moduluskategóriát vizsgáltuk. Beláttuk, hogy egy standard Koszul standardul rétegezett algebra bővítésalgebrája standardul rétegezett (az idempotensek fordított rendezése mellett). A bizonyításhoz elég azt belátni, hogy a bővítésalgebra feletti reguláris modulus standard modulusokkal filtrált (vagy ami ezzel ekvivalens, a másik oldali reguláris modulus valódi standard modulusokkal van filtrálva). Ezt a kérdést, mi általánosabban tettük fel. Modulusok olyan részosztályát kerestük (mind a bal, mind a jobb oldalon), amelyekre igaz, hogy a természetes Ext^* funktor általi képük (valódi) standard modulusokkal filtrált. A két oldal aszimmetriája miatt a jobb és a bal oldalon különböző eszközökkel nagyon hasonló, de különböző eredményre jutottunk. Az alapötlet azonban mindkét oldalon ugyanaz, egy X modulus esetén kapcsolatot teremteni az $\mathrm{Ext}^*_A(X)$ modulus (A^* szerinti) nyomfiltrálása és az $\mathrm{Ext}^*_{C_i}(X)$ modulusok (mint A^*-modulusok) között.

A vizsgálatainkat mindkét oldalra vonatkozó tulajdonságok feltárásával kezdtük. Ehhez (újra) definiáltuk a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}_2$ osztályokat a sovány algebrák moduluskategóriájában. Továbbá, definiáltuk a $\mathcal{K}$ rekurzív változatát

$$r\mathcal{K} = \left\{ X \in \mathcal{K} \,|\, X\varepsilon_i \in \mathcal{K}_{C_i} \forall i \right\}.$$

Megmutattuk, hogy ezek az osztályok zártak a top bővítésekre. Bevezettük az ω operátor: ha X egy A-modulus és $\widetilde{X} = X\varepsilon_2 A$, akkor $\omega(X) = \Omega(\widetilde{X})$ és rekurzívan $\omega_h(X) = \omega(\omega_{h-1}(X))$. Megfigyeltük, hogy bármely $\mathcal{K}_2$-beli X modulus esetén minden h indexre $\widetilde{\omega}_h(X) = \omega_h(X)\varepsilon_2 A \overset{t}{\leq} \omega_h(X)$, továbbá azt, hogy $\mathcal{K}_2$ zárt az ω operátorra nézve. Az észrevételek jelentőségét az alábbi állítás mutatja meg.

2.6. Állítás (Lukács E., Magyar A. [25], 3.5 Állítás). *Tegyük fel, hogy $\varepsilon_2 J^2 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 J \varepsilon_2 J \varepsilon_2$, továbbá legyen $X \in \mathcal{K}_2$. Ekkor minden $h \geq 0$ esetén adódik egy rövid egzakt sorozat*

$$0 \to \widetilde{\omega}_h(X) \xrightarrow{\alpha_h} \Omega_h(X) \xrightarrow{\beta_h} Y_h(X) \to 0 \tag{1}$$

ahol α_h top beágyazás.

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{K}_2$-beli modulusok esetén az $\mathrm{Ext}_h(X, \hat{S})$ teret meghatározza $\widetilde{\omega}_h(X)$ és $Y_h(X)$ teteje.

A következő lépésben megkonstruáltuk a q természetes homomorfizmust, amely formálisan

$$q_X = \bigoplus_{h \geq 0} (q_X)_h : \mathrm{Ext}^*_A(X) \to \mathrm{Ext}^*_{C_2}(X\varepsilon_2).$$

Tehát q egy tetszőleges h-rendű $0 \to \hat{S} \to X_{h-1} \to \ldots \to X_0 \to X \to 0$ bővítést a $0 \to \hat{S}\varepsilon_2 \to X_{h-1}\varepsilon_2 \to \ldots \to X_0\varepsilon_2 \to X\varepsilon_2 \to 0$ h-rendű bővítésbe képezi. Mindenekelőtt, $q_{\hat{S}} : A^* \to C_2^*$ egy algebrahomomorfizmus, és ezáltal q_X felfogható mint egy fokszámozott (bal oldali) A^*-modulus-homomorfizmus. Az világos, hogy tetszőleges X modulus esetén $\ker q_X \supseteq A^* f_1 X^*$. A q_X homomorfizmust sovány algebrák fölötti $\mathcal{K}_2$ osztályból származó X modulusokon vizsgáltuk. Az alábbi állítás foglalja össze legfontosabb észrevételeinket.

2.7. Állítás (Lukács E., Magyar A. [25] 3.11 és 3.12 Állítások)**.** *Legyen A egy sovány algebra és X egy $\mathcal{K}_2$-beli A-modulus. Ekkor $q_X : X^* \to (X\varepsilon_2)^*$ szürjektív. Továbbá, ha $Y_h(X)$ minden h esetén $\hat{S}\varepsilon_2 A$-Koszul, akkor $\ker q_X = A^* f_1 X^*$.*

Hogy a sovány algebrákra bizonyított eszközöket alkalmazni tudjuk, külön tárgyaltuk a jobb, ill. bal oldali moduluskategóriák esetét. Mindkét esetben a 2.7 Állítás által adott feltételt használtuk, hogy megmutassuk ${}_{A^*}A^*$, ill. $A^*_{A^*}$ rétegezettségét. Pontosabban, az indukcióhoz a rekurzívan definiált $r\mathcal{K}$ és

$$r\mathcal{K}^+ = \{X \in \mathcal{K}^+ \mid X\varepsilon_i \in \mathcal{K}^+_{C_i}\ \forall i\}$$

osztályokra volt szükség, ahol

$$\mathcal{K}^+ = \{X \in \mathcal{K} \mid \widetilde{\omega}_h(X) \in \mathcal{C}_A, \quad \text{és} \quad \bar{\omega}_h(X) \cong \oplus S(1)\ \forall h \geq 0\},$$

A megfelelő oldali standard rétegezettség és a standard Koszul tulajdonság feltételei mellett ezek a szűkebb osztályok is zártak az ω operátorra és a top bővítésekre) nézve. Ebből megkaptuk az alábbi tételt.

2.8. Tétel (Lukács E., Magyar A. [25], 5.4 és 5.10 Tételek)**.** *Legyen A egy standard Koszul standardul rétegezett algebra és $X \in r\mathcal{K}$. Ekkor*

$$X^*/A^*(f_1 + \ldots + f_{i-1})X^* \cong (X\varepsilon_i)^*$$

minden $i \geq 1$ esetén. Továbbá, $A^* f_1 X^* \in \mathcal{F}(\overline{\Delta}^\circ_{A^*}(1))$.

Mivel az egyszerű és a standard modulusok egy standard Koszul standardul rétegezett algebra esetén $r\mathcal{K}$-beliek, az alábbi tétel egyszerű következménye a 2.8 Tételnek.

2.9. Tétel (Lukács E., Magyar A. [25], 5.7 és 5.12 Tételek). *Ha A egy standard Koszul standardul rétegezett algebra, akkor az A^* bővítésalgebrája standardul rétegezett. Továbbá, a természetes Ext_A^* funktor az A jobb oldali standard modulusait az A^* bal oldali valódi standard modulusaiba, míg az A bal oldali valódi standard modulusait az A^* jobb oldali standard modulusaiba viszi. Vagyis $\mathrm{Ext}_A^*(\Delta(i)) \cong \overline{\Delta}^\circ_{A^*}(i)$ és $\mathrm{Ext}_A^*(\overline{\Delta}^\circ(i)) \cong \Delta_{A^*}(i)$.*

Végül analóg állításokat kaptunk a bal oldali modulusokat vizsgálva. A fő eredményeket a 2.10 Tétel foglalja össze.

2.10. Tétel (Lukács E., Magyar A. [25], 6.4 és 6.11 Tételek). *Legyen A° egy standard Koszul standardul rétegezett algebra és legyen $X \in r\mathcal{K}^+$ egy A-modulus. Ekkor*

(i) $X^*/A^*(f_1 + \ldots + f_{i-1})X^* \cong (X\varepsilon_i)^*$ minden $i \geq 1$ esetén;

(ii) minden egyszerű A^*-modulus $r\mathcal{K}^+$-beli;

(iii) következésképp, $(A^*)^\circ$ standardul rétegezett.

Érdemes még egyszer kiemelni, hogy azon túl, hogy az A^* bővítésalgebráról megmutattuk, hogy standardul rétegzett, találtunk egy viszonylag bő modulusosztályt, amely zárt bizonyos természetes operációkra és amelynek tagjait az Ext_A^* olyan A^*-modulusokba viszi, amelyek az A^* megfelelő oldali (valódi) standard modulusaival vannak filtrálva.

3. Monomiális és speciális biszeriális algebrák

A standard Koszul tulajdonságot kombinatorikusan leírható algebraosztályok esetében is vizsgáltuk. Mindkét algebraosztály (a monomiális és speciális biszeriális algebrák) gráfalgebraként vannak definiálva. A disszertációban megmutattuk, hogy hogyan lehet e gráfalgebrák Koszul– illetve standard Koszul tulajdonságát kombinatorikus feltételekkel ellenőrizni. Erre támaszkodva (a rétegezettséget nélkülözve) beláttuk, hogy ezekben az osztályokban a standard Koszul algebrák Koszul–algebrák. Továbbá mindkét osztályban megadtuk standard Koszul algebrák egy karakterizációját.

3.1. Monomiális algebrák

Legyen Γ egy véges irányított gráf, amelyben hurkok és többszörös élek is lehetnek. A $K\Gamma$ útalgebra az a vektortér, amelynek bázisát az irányított utak (pontosabban séták) adják, és amelyben a szorzás az utak összeillesztése, ha lehet, különben 0. Azt mondjuk, hogy az $I \lhd K\Gamma$ egy megengedett ideál, ha van olyan pozitív m egész, hogy I tartalmazza az összes legalább m hosszú utat és minden az I elemeinek felírásában szereplő út legalább 2 hosszúságú. Ebben az esetben az $A = K\Gamma/I$ véges dimenziós gráfalgebra. Az A monomiális, amennyiben I-t monomok generálják.

Ágoston, Dlab és Lukács [2] 5.2 Tételében belátták, hogy ha egy standard Koszul monomiális algebra minden jobb és bal oldali standard modulusa Schur–tulajdonságú, akkor az algebra Koszul. A disszertációban adott bizonyítás hasonló, de egy kicsivel általánosabb és elvezet a bonyolultabb speciális biszeriális algebrák esetében használt bizonyítás ötletéhez.

A bizonyítás során gyakran támaszkodtunk korábbi, monomiális algebrákra már ismert eredményekre. Például monomiális algebrák esetén az egyszerű modulusok projektív feloldása megkapható egy kombinatorikus eljárás segítségével [19]. Tudjuk továbbá,hogy a monomiális Koszul algebrák éppen a kvadratikus monomiális algebrák [20].

3.1. Tétel (Green E., Happel D., Zacharia D. [19], Green E., Martínez-Villa R. [20] és Magyar A. [29])**.** *Az $A = K\Gamma/I$ monomiális algebrára a következő állítások ekvivalensek.*

(i) A Koszul;

(ii) Minden egyzerű A-modulus $\mathcal{C}_A^2$-beli;

(iii) A kvadratikus.

A 3.1 Tétel több lehetőséget ad arra, hogy egy algebra Koszul–tulajdonságát ellenőrizzük. Főleg a *(ii)* és a *(iii)* feltétel bizonyult hasznosnak.

Bevezettük a völgy fogalmát. A völgyek olyan $u_j \rightsquigarrow u_k \rightsquigarrow u_m$ alakú utak, amelyek tartalmaznak olyan u_j, u_k és u_m csúcsokat, amelyekre $u_k \leq u_j$, and $u_k < u_m$. Észrevettük, hogy standard Koszul monomiális algebrák nem tartalmazhatnak völgyeket.

3.2. Állítás (A. Magyar [29]). *Legyen $A = K\Gamma/I$ egy standard Koszul monomiális algebra. Ekkor A-ban egyetlen nem 0 út sem tartalmaz völgyet.*

A 3.2 Állítást használva, azt is beláthatjuk, hogy ha $A = K\Gamma/I$ standard Koszul és monomiális, akkor az I-beli maximális hosszúságú nem 0 utak legfeljebb (és így pontosan) 2 hosszúak. Ez az észrevétel bizonyítja a fejezet egyik fő eredményét.

3.3. Tétel (Magyar A. [29]). *Minden standard Koszul monomiális algebra Koszul.*

Ezen felül a standard Koszul monomiális algebrák jellemezhetők a völgyek segítségével.

3.4. Tétel (A. Magyar [29]). *Az $A = K\Gamma/I$ monomiális algebra standard Koszul akkor és csak akkor, ha A Koszul és A nem tartalmaz nem 0 völgyet.*

3.2. Speciális biszeriális algebrák

A biszeriális algebrákat Tachikawa vezette be [35]. Ezeknek az algebráknak fontos részosztályát adják a speciális biszeriális (SB) algebrák, amelyeket elsőként Skowroński és Waschbüsch vizsgált [33]. Az öninjektív, illetve szimmetrikus SB algebrák előfordulnak mind a Lie–csoportok reprezentációelméletében [22], mind a véges csoportok moduláris reprezentációelméletében [23], [31]. Emellett ezeket az algebrákat gyakran használják különböző (homologikus) sejtések tesztelésekor (ld. [17], [18] vagy [34]).

Egy $A \cong K\Gamma/I$ speciális biszeriális, ha a Γ minden v csúcsára teljesül, hogy legfeljebb két nyíl indul és végződik v-nél, továbbá minden α nyílra legfeljebb egy olyan β és egy olyan γ nyíl létezik, hogy $\beta\alpha \neq 0$ illetve $\alpha\beta \neq 0$.

A vizsgálataink során először felismertük, hogy (néhány triviális kivételtől eltekintve) ha A egy standard Koszul öninjektív SB algebra, akkor semelyik projektív A-modulus sem lehet uniszeriális (ld. 2.1–2.3 Lemmák [28]). Sőt, pontosan meghatároztuk azokat az eseteket, amikor A fölött létezik uniszeriális projektív modulus.

3.5. Állítás (Magyar A. [28], 2.6 Lemma)**.** *Ha A egy (nem egyszerű) összefüggő standard Koszul öninjektív SB algebra, amelynek van uniszeriális projektív modulusa, akkor minden felbonthatatlan projektív A-modulus kétdimenziós.*

3.6. Következmény (Magyar, A. [28], 2.7 Állítás)**.** *Ha A egy összefüggő standard Koszul öninjektív SB algebra, amelynek van uniszeriális projektív modulusa, akkor A Koszul.*

A fenti következmény alapján feltehetjük, hogy nem létezik uniszeriális projektív A-modulus. Erre az esetre szorítkozva, Antipov és Generalov [8]-beli ötletét továbbgondolva, az egyszerű modulusok projetkív feloldásához konstruáltunk egy kombinatorikus (vagy inkább grafikus) módszert. A módszert a tézis 3.2.8 Állítása írja le és a 3.1-es ábrája szemlélteti. A konstrukció segítségével egy ekvivalens feltétel adható arra, hogy ebben az esetben mikor lesz az A algebra Koszul. Ez az eredmény hasonló ahhoz, amit monomiális algebrák esetén láttunk (3.1 Tétel).

3.7. Állítás (Magyar A. [28], 2.10 Következmény)**.** *Legyen A egy öninjektív SB algebra. Ekkor A pontosan akkor Koszul, ha minden egyszerű modulusa $\mathcal{C}_A^2$-beli.*

A következő lépés az A-beli utak vizsgálata. A monomiális algebráknál adott módon definiáljuk a völgyeket, majd megmutatjuk, hogy a legalább három hosszú nem 0 utak nem tartalmazhatnak völgyet. Ebből az következik, hogy a szóban forgó standard Koszul öninjektív SB algebrák „kvadratikus-szerűek".

3.8. Állítás (Magyar A. [28], 2.14 Állítás). *Legyen A egy standard Koszul öninjektív SB algebra, amelynek nincs uniszeriális projektív modulusa. Ekkor minden i index esetén, az e_iA-beli maximális nem* 0 *utak közül legalább az egyik* 2 *hosszúságú.*

A 3.5 és 3.8 Állítások, valamint 3.6 Következmény alapján adódik a 3.9 Tétel.

3.9. Tétel (Magyar A. [28], 2.15 Tétel). *Ha A egy öninjektív standard Koszul SB algebra, akkor A Koszul.*

Végül a standard Koszul szimmetrikus SB algebrák egy leírását adtuk a gráfjaik és relációik nyelvén.

3.10. Tétel (A. Magyar [28], 2.23 Tétel). *Az $A = K\Gamma/I$ egy összefüggő szimmetrikus SB algebra akkor és csak akkor standard Koszul, ha*

(a) A izomorf a következő K-algebrák valamelyikével: K, $K[x]/(x^2)$, $K[x,y]/(x^2,y^2)$, $K\langle x,y\rangle/(xy,yx,x^2-\lambda y^m)$, vagy

(b) ha Γ az alábbi alakú és I-t az alábbi relációk generálják

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & \cdots \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift left, "\alpha_{n-2}"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\beta_{n-2}"] \arrow[r, shift left, "\alpha_{n-1}"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\beta_{n-1}"] \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$$

$$I = \big(\alpha_i\alpha_{i+1},\ \beta_{i+1}\beta_i,\ \gamma\alpha_1,\ \alpha_{n-1}\delta,\ \beta_1\gamma,\ \delta\beta_{n-1},\ \alpha_{i+1}\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_i,\\ \gamma^k - \alpha_1\beta_1,\ \lambda\delta^m - \beta_{n-1}\alpha_{n-1} \mid i = 1,\dots,n-2\big),\ \lambda \in K \setminus \{0\},\ k,m \geq 2. \quad (2)$$

A dolgozathoz tartozó publikációk

[24] Lukács, E., Magyar, A., Standard Koszul standardly stratified algebras, *Communications in Algebra*, **45(3)**:1270–1277, 2017.
Zbl 06561311, MR 3573378

[25] Lukács, E., Magyar, A., Stratified modules over an extension algebra, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **68(2)**:523–551, 2018.

[28] Magyar, A., Standard Koszul self-injective special biserial algebras, *Journal of Algebra and Its Applications*, **15(03)** 1650044 pp. 15, 2016.
Zbl 06561311, MR 3454706

Hivatkozások

[1] Ágoston, I., Dlab, V., Lukács, E., Lean quasi-hereditary algebras, *in: Representations of Algebras, Sixth International Conference, Ottawa, 1992, Can. Math. Soc. Conf. Proc. Ser.*, **14**:1–14, 1993. Zbl 0820.16006, MR 1265273

[2] Ágoston, I., Dlab, V., Lukács, E., Homological duality and quasi-heredity, *Canadian Journal of Mathematics*, **48**:897–917, 1996. Zbl 0868.16009, MR 1414.062

[3] Ágoston, I., Dlab, V., Lukács, E., Stratified algebras, *Mathematical Reports of the Academy of Science, Canada*, **20**:22–28, 1998. Zbl 0914.16010, MR 1619048

[4] Ágoston, I., Dlab, V., Lukács, E., Quasi-hereditary extension algebras, *Algebras and Representation Theory*, **6**:97–117, 2003. Zbl 1503.16007, MR 1960515

[5] Ágoston, I., Dlab, V., Lukács, E., Standardly stratified extension algebras, *Communications in Algebra*, **33**:1357–1368, 2005. Zbl 1081.16019, MR 2149063

[6] Ágoston, I., Happel, D., Lukács, E., Unger, L., Finitistic dimension of standardly stratified algebras, *Communications in Algebra*, **28(6)**:2745–2752, 2000. Zbl 0964.16005, MR 1757427

[7] Anderson, F., Fuller, K., Rings and Categories of Modules, *Graduate Text in Mathematics* **13**, 1974.

[8] Antipov, M. A., Generalov, A. I.., The Yoneda algebras of symmetric special biserial algebras are finitely generated, *St. Petersburg Mathematical Journal*, **17**:377–392, 2006. Zbl 0964.16005, MR 1757427

[9] Assem, I., Simson, D., Skowronski, A., Elements of the Representation Theory of Associative Algebras I., *London Mathematical Society* **65**, 2006.

[10] Bernstein, J., Gelfand, I.M., Gelfand, S.I., A category of $\mathfrak{g}$–modules, *Funct. Anal. Appl.*, **10**:87–92, 1976. Zbl 0353.18013, MR 0407097.

[11] J. Brundan, C. Stroppel. Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra II: Koszulity. *Transformation Groups*, **15**:1–45, 2010. Zbl 1243.17004, MR 2881300

[12] Cline, E., Parshall, B.J., Scott, L.L., *Stratifying Endomorphism Algebras*, Memoirs of the AMS **591**, 1996. Zbl 0888.16006, MR 1350891

[13] Cline, E., Parshall, B.J., Scott, L.L., The homological dual of highest weight categories, *Proc. of LMS*, **s3-68**: 294–316, 1994. Zbl 0819.20045, MR 1253506.

[14] Curtis, C. W., Reiner, I., *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, John Wiley and Sons, Inc., 1962.

[15] Dlab, V., Ringel, C.M., Quasi-hereditary algebras, *Illinois Journal of Mathematics*, **33**:280–291, 1989. Zbl 0666.16014, MR 0987824

[16] Ehring, M., Stroppel, C., Algebras, coideal subalgebras and categorified skew Hodge duality, (*preprint*) `http://arxiv.org/abs/1310.1972`

[17] Erdmann, K. Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, *Lecture Notes in Mathematics*, **1428**, 1990.

[18] Erdmann, K., Holm, T., Iyama, O., Schröer, J., Radical embeddings and representation dimension, *Advances in Mathematics* **185**: 159–177, 2004. Zbl 1062.16006, MR 2058783.

[19] Green, E. L., Happel, D. and Zacharia, D., Projective resolutions over Artin algebras with zero relations, *Illinois Journal of Mathematics*, **29**:180–190, 1985. Zbl 0551.16008, MR 0769766

[20] Green, E., Martínez-Villa, R., Koszul and Yoneda algebras, *Representation Theory of Algebras*, **18**:247–297, 1996. Zbl 0860.16009, MR 1388055

[21] Green, E. L., Zacharia, D., The cohomology ring of a monomial algebra, *Manuscripta Mathematica*, **85**:11–23, 1994. Zbl 0820.16004, MR 1299044

[22] Gelfand, I. M., Ponomarev, V. A., Indecomposable representations of the Lorentz group, *Russian Mathematical Surveys*, **23**:1–58, 1985. Zbl 0236.22012, MR 0229751

[23] Janusz, P., Indecomposable modules for finite groups, *Annals of Mathematicss*, **89**:209–241, 1969. Zbl 0197.02302, MR 0248242.

[24] Lukács, E., Magyar, A., Standard Koszul standardly stratified algebras, *Communications in Algebra*, **45(3)**:1270–1277, 2017. Zbl 06561311, MR 3573378

[25] Lukács, E., Magyar, A., Stratified modules over an extension algebra, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2017.

[26] MacLane, S., Categories for the working mathematician, *Graduate text in mathematics*, **5**, 1971.

[27] MacLane, S., Homology, *Classics in mathematics*, 1963.

[28] Magyar, A., Standard Koszul self-injective special biserial algebras, *Journal of Algebra and Its Applications*, **15(03)** 1650044 pp. 15, 2016. Zbl 06561311, MR 3454706

[29] Magyar, A., Extension algebras and the Koszul property, *Master's thesis (in Hungarian)*, 2013.

[30] Mazorchuk, V., Ovsienko, S. (with Stroppel, C.),

A pairing in homology & the category of linear complexes of tilting modules for a quasi-hereditary algebra. *J. Math. Kyoto Univ.*, **45**:711–741, 2005. Zbl 1147.16010, MR 2226627

[31] Ringel, C. M., The indecomposable representations of dihedral 2-groups, *Mathematische Annalen*, **37**:191–205, 1975. Zbl 0299.20005, MR 0364426

[32] Rotman, J., An introduction to homological algebra, *Universitext*, 2009.

[33] Skowronski, A., Waschbusch, J., Representation-finite biserial algebras, *J. Reine Angew. Math*, **345**:172–181, 1983. Zbl 0511.16021, MR 0717892

[34] J. Stovícek. Telescope conjecture, idempotent ideals, and the transfinite radical, Trans. Amer. Math. Soc., **362**:1475–1489, 2010. Zbl 1242.16007, MR 256373.

[35] Tachikawa, H., On algebras of which every indecomposable representation has an irreducible one as the top or the bottom Loewy constituent, *Mathematische Zeitschrift*, **75**:215–227, 1961. Zbl 0104.03202, MR 0124356.

[36] Webster, B., Canonical bases and higher representation theory. *Composito Mathematica*, **151**:121–166, 2015. Zbl 06417584, MR 3305310

[37] Weibel, C. An introduction to homological algebra, *Cambridge studies in advanced mathematics* **38**, 1994.