



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Matematika Intézet

Sztochasztika Tanszék

Markov láncok és hálózatok aszimptotikus viselkedése:
fluktuációk, keverési tulajdonságok és véletlen hálózatok modellezése

PhD Tézisfüzet

Komjáthy Júlia

Témavezető: Dr. Balázs Márton
Konzulens: Prof. Simon Károly

2012

1. Koszorúsorozat gráfokon vett bolyongások keverési ideje

Andrey Markov 1906-ban vezette be a később róla elnevezett folyamatokat. A Markov láncok klasszikus elméletét főleg a Markov lánc hosszú távú viselkedésének vizsgálata határozta meg: A cél az volt, hogy megértsük egy fix lánc stacionárius eloszlását, valamint a konvergencia sebességét a stacionárius eloszláshoz. A témában sok bevezető jellegű könyv található, például Lawler [42].

Az elmúlt három évtizedben egy más jellegű aszimptotikus analízis is kezdett kibontakozni: az elméleti számítástudományok, fizika és biológia egyre nagyobb figyelemmel fordult a nagy állapotterű rendszerek felé. A nagy adatbázisokon futó folyamatok kezelése a Markov láncok véges idejű viselkedésének pontosabb megértését igényelte, a kérdések mindig a rendszer méretének függvényében fogalmazódtak meg. Pontosabban, a leggyakoribb kérdés az volt, hogy az eloszlásokon vett valamilyen metrikában mérve, meddig kell futtatni a láncot ahhoz, hogy az adott pillanatbeli eloszlás távolsága a stacionárius eloszlástól egy bizonyos előre meghatározott érték alá essen. Ezt a fogalmat *keverési idő*nek nevezzük. Legyen m metrika az eloszlások terén. Ekkor a P átmenetmátrixú, G gráfon lévő véletlen bolyongás m -keverési idejének a

$$t_{\text{mix}}^m(G, \varepsilon) := \min \left\{ t \geq 0 : \max_{x \in V(G)} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_m \leq \varepsilon \right\}$$

kifejezést nevezzük, mely az állapottér méretének és ε -nak függvénye.

A disszertációmban a később definiált modellek *teljes variációs* vagy *TV*, illetve *egyenletes* keverési idejét vizsgáljuk, melyek rendre az ℓ_1 illetve ℓ_∞ metrikáknak felelnek meg.

A Markov lánc keveredésének algebraibb módszerekkel történő vizsgálata az átmenetmátrix spektrális viselkedésének meghatározására épül. Mivel P sztochasztikus mátrix, ezért az 1 a legnagyobb sajátértéke, és az összes többi sajátérték a komplex egységkörön belül található. Továbbá, ha a lánc reverzibilis, akkor a sajátértékek valósak, így van értelme a lánc relaxációs idejét definiálni:

$$t_{\text{rel}}(G) := \frac{1}{1 - \lambda_2},$$

ahol λ_2 a lánc második legnagyobb sajátértéke. A különböző metrikákban vett keverési idők illetve a relaxációs idő közti kapcsolatot és nagyságrendi rendezést az alábbi heurisztikából lehet megérteni: ahhoz, hogy a lánc relaxációs idejéhez elég azt megérteni, hogy a lánc mennyi idő alatt "felejtje el" a kezdeti állapotát. A *TV*-keverési idő ahhoz kötődik, hogy várhatóan

mennyi ideig tart, míg a lánc nagymértékű halmazokba elér, vagyis olyanokba, melyeknek mérete legalább konstansszorososa a gráf méretének. Az egyenletes keverési idő meghatározása a legnehezebb feladat, mert itt az egyes csúcsokba vett átmenetvalószínűségek pontos megértése szükséges.

Általános, reverzibilis láncokra ismert, hogy a relaxációs idő, TV és egyenletes keverési idő nagyságrendjei jelentősen eltérhetnek egymástól, vagyis a gráf méretének függvényében különböző aszimptotikával rendelkezhetnek. Ugyanakkor az alábbi rendezés mindig teljesül rájuk:

$$t_{\text{rel}}(G) \leq t_{\text{mix}}^{TV}(G, 1/4) \leq t_{\text{mix}}^u(G, 1/4),$$

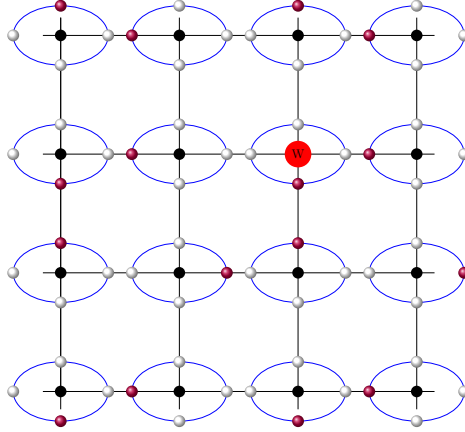
lásd [2] vagy [43]. A lent definiált lámpagyújtogató modell egy olyan példa, amikor e három mennyiség nagyságrendje különbözik.

A Markov láncok viselkedésének megértésére a keverés más fogalmait is bevezették, a lánc más-más aspektusát vagy tulajdonságát jellemzendő. Aldous [3] bevezetett ú.n. *stacionárius megállási időket*, vagyis olyan megállási időket, melyek stacionárius eloszlásban állítják meg a láncot. Ezeket Lovász és Winkler [48, 49] vizsgálta nagy részletességgel (Többek között maximálishossz-optimális vagy várhatóérték-optimális stacionárius megállási időket, erősen stacionárius megállási időket illetve felejtési időket vizsgáltak.)

A keverés különböző fogalmai közti kapcsolat megértése mind a mai napig kihívást jelent. Aldous [3] a várhatóérték-optimális megállási időket, a nemrég publikált Sousi-Peres, ill. Oliveira cikkek [53, 50] a nagyméretű halmazok elérési ideit kapcsolja a TV -keverési időhöz. Az úgynevezett blanket és fedési időket Ding, Lee and Peres [28] kapcsolja az állapottér feletti szabad Gauss mező maximumához. A Markov láncok keveredését áttekintő irodalmat talál az olvasó az elengedhetetlen [2] Aldous-Fill könyvben vagy a Levin-Peres-Wilmer könyvben [43], ezek egyben fő referenciaforrásaink.

Disszertációm első fejezetében koszorúszorzat-gráfokon vett bolyongások keverési ideit vizsgáljuk. A bolyongás szemléletes leírása az alábbi módon fogalmazható meg: egy lámpagyújtogató vagy egy mérnök egyszerű szimmetrikus bolyongást végez az ú.n. G *alapgráf* csúcsain. Az alapgráf minden egyes $v \in G$ csúcsához egy lámpa vagy egy gép tartozik, melyek egyrészt minden egyes csúcson ugyanolyanok, másrészt éppen valamilyen állapotban található. A $v \in G$ csúcshoz tartozó gép állapotát $f_v(t)$ -vel jelöljük. Továbbá, ahogy a véletlen bolyongó az alapgráfon halad, az érintett gépek állapotát változtathatja, a gépen lévő lehetséges állapotokon vett átmenetvalószínűségek szerint, lásd a 1. ábrát. Ha a gépek egyszerű ki-be kapcsolható lámpák, (2. ábra), akkor a jól ismert lámpagyújtogató sétát kapjuk. Viszont, ha a gépek (lámpa-gráfok) bonyolultabb állapottér-struktúrával rendelkeznek, melyeket egy H gráf reprezentál (melynek mérete akár az alapgráf méretével együtt nőhet), akkor az általánosított lámpagyújtogató modell keretein belül mozgunk. Továbbá, ha az alapgráf és a lámpagráf algebrai

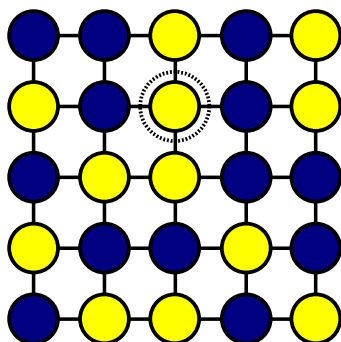
csoporthok Cayley gráfjaként keletkeznek valamilyen véges generátorrendszer használva, akkor az általánosított lámpagyújtogató modell éppen a két gráf koszorúsorozatán, $H \wr G$ -n vett bolyongás. Ez kapcsolja munkánkat a csoportokon vett bolyongásokhoz, melyet sok szerző vizsgált; bővebb referenciáért a témában lásd Aldous [1]-t. A modell precíz leírásához tegyük fel, hogy



1. ábra. Az általánosított lámpagyújtogató modell egy tipikus állapota. Itt a lámpagráf $H = \mathbf{Z}_4$, az alapgráf $G = \mathbf{Z}_4^2$; a piros golyók szemléltetik az egyes csúcsokon lévő lámpagráfok állapotait; a bolyongót pedig a piros W kör jelzi.

G és H véges, összefüggő gráfok, G reguláris, X lusta egyszerű szimmetrikus bolyongás G -n (azaz X minden lépésben $1/2$ valószínűséggel helyben marad, $1/2$ valószínűséggel pedig egy egyenletesen választott csúcsba ugrik). Z pedig legyen reverzibilis ergodikus Markov lánc H -n. Az X -hez és Z -hez tartozó általánosított lámpagyújtogató lánc a X^\diamond bolyongás a $H \wr G$ koszorúsorozaton: a koszorúsorozat csúcsai az (\underline{f}, x) párok, ahol $\underline{f} = (f_v)_{v \in V(G)}$ a G csúcsainak H -beli csúcsokkal való felcímkézése, x pedig egy G -beli csúcs. Minden lépésben X^\diamond az (\underline{f}, x) konfigurációból úgy lép tovább, hogy frissíti x -et y -ra, az alapgráfon lévő X bolyongás átmenetvalószínűségei szerint; majd ettől függetlenül frissíti f_x -et és f_y -t a H -n lévő átmenetvalószínűségek szerint; f_z , $z \neq x, y$ -ra változatlan marad.

A $\mathbf{Z}_2 = 0 - 1$ lámpagráf esetben mind a relaxációs, mind a TV keverési időt behatóan elemezték, még az aszimptotikus viselkedés fő nagyságrendjének konstans szorzóját is meghatározták már. Heurisztikus érveléssel élve, ahhoz, hogy megkapjuk a relaxációs idő nagyságrendjét, vagyis elfelejtjük a lámpák kiindulási állapotát, elég az alapgráfon lévő "nehezen elérhető" csúcsokba elérni (és az út mentén a lámpa-állapotokat frissíteni). Így, $\mathbf{Z}_2 \wr G$ relaxációs ideje a gráf maximális elérési idejének, $t_{\text{hit}}(G)$ -nek nagyságrendjével egyezik meg, (melyet $t_{\text{hit}}(G) = \max_{x,y \in G} \mathbf{E}(\tau_y | X_0 = x)$ definiál, ahol



2. ábra. A lámpagyújtogató modell egy tipikus konfigurációja egy 5×5 -ös síkrács felett. A kék illetve sárga színek a lámpák állapotai jelzik, a bolyongót pedig a szürke kör szemlélteti.

τ_y jelöli azt a véletlen időt, amely az $y \in G$ csúcs eléréséhez szükséges). $\mathbf{Z}_2 \wr G$ teljes variációs keverési idejét az határozza meg, hogy meddig kell futtatni a láncot ahhoz, hogy a csúcsok $0 - 1$ címkézése megkülönböztethetetlen legyen egy teljesen véletlen egyenletes $0 - 1$ címkézéstől. Vagyis, a $0 - 1$ lámpák normális fluktuációi megengedik illetve megkívánják, hogy körülbelül $\sqrt{|G|}$ csúcs kivételével minden csúcsot meglátogassunk az alapgráfon, feltéve, hogy ez az utolsó $\sqrt{|G|}$ csúcs nem mutat túlzottan nemtriviális geometriai jelleget. Ebből a heurisztikából látszik, hogy a TV -keverési idő a várható maximális fedési idővel, $t_{\text{cov}}(G)$ -vel lesz jellemezhető (ez annak az időnek a várható értéke, amíg a lánc minden csúcsot legalább egyszer meglátogat, legrosszabb kezdeti állapot mellett). Ugyanakkor, $\mathbf{Z}_2 \wr G$ egyenletes keverési idejének megértéséhez az $\mathbf{E}[2^{\mathcal{U}(t)}]$ exponenciális momentum analízisi szükséges, ahol $\mathcal{U}(t)$ jelöli a lánc által még meg nem látogatott csúcsok halmazát az alapgráfon. Azt az időt kell meghatározni, amikor ez a kifejezés $1 + \varepsilon$ alá esik: ennek megértése sokkal nehezebb; így az egyenletes keverési időre adott eddig ismert alsó illetve felső korlátok nagyságrendje nem egyezett [52].

Általános lámpagráfokat csak speciális esetekben vizsgáltak eddig. Ha az alapgráf a teljes gráf K_n , akkor a lámpagyújtogató modell egy ú.n. szorzat-lánccá válik, melynek megértése egyszerűbb, hiszen $H \wr K_n$ átmenetmátrixának sajátfüggvényei megkonstruálhatók H sajátfüggvényeiből, lásd [43]. Nathan Levi [44] a diplomájában vizsgált általános lámpagyújtogató modelleket, ahol $H = \mathbf{Z}_2^d$, a d -dimenziós hiperkocka. Az általa adott alsó és felső korlátok azonban nem egyeznek általános n és d esetben. Továbbá, Fill és Schoolfield [35] vizsgálta a TV és l_2 keverési idejét $K_n \wr S_n$ -nek, vagyis ahol az alapgráf az S_n szimmetrikus csoport Cayley gráfja, és a transzpozíciók alkotják a generátorok halmazát; a lámpagráf pedig a teljes gráf K_n , melyen az eloszlás nem feltétlen egyenletes.

Mindezek miatt, a disszertációmban \mathbf{Z}_2 lámpák esetében az egyenletes keverési időt vizsgáljuk, általános lámpagráf esetében pedig a TV -keverési időt és a relaxációs időt határozzuk meg, legtöbb esetben konstans szorzó erejéig egyező alsó és felső becsléseket adva ezen mennyiségekre. (Az általános lámpagráf H esetében az egyenletes keverési idő megértése a fent említett okok miatt egy lehetséges jövőbeli kutatás témája lehet.)

Yuval Peressel közös cikkünkre [40] alapozva, az általános lámpagyűjtogató modell esetében tehát $H \wr G$ TV -keverési idejét és a relaxációs idejét határozzuk meg, konstans szorzó erejéig.

A tétel kimondása előtt az alábbi definícióra lesz szükségünk:

1.1. Definíció. *A τ véletlenülített megállási időt erősen stacionárius időnek nevezzük a G állapotterű X_t Markov láncra nézve, ha*

$$\mathbf{P}_v[X_\tau = y, \tau = t] = \pi(y)\mathbf{P}_v[\tau = t],$$

vagyis, a bolyongó pozíciója a megállás pillanatában független a megállási időtől és stacionárius eloszlású.

Továbbá, a $h(v) \in V(G)$ állapotot a τ megállási időhöz és a $v \in V(G)$ kezdeti állapothoz tartozó megállító állapot-nak nevezzük, ha $\{X_t = h(v)\}$ -ből $\{\tau \leq t\}$ következik.

Az ide vonatkozó fő eredményeinket az alábbi tételek fogalmazzák meg:

1.2. Tétel. *Legyen G és H összefüggő gráfok, G reguláris, és a H -n levő Markov lánc ergodikus és reverzibilis. Ekkor léteznek olyan c_1, C_1 univerzális konstansok, hogy az $H \wr G$ -n levő általánosított lámpagyűjtogató bolyongás relaxációs idejére az alábbi egyenlőtlenség teljesül:*

$$c_1 \leq \frac{t_{rel}(H \wr G)}{t_{hit}(G) + |G|t_{rel}(H)} \leq C_1, \quad (1.1)$$

1.3. Tétel. *A 1.2 tétel feltételei mellett tegyük fel továbbá, hogy a H -n levő bolyongás Q átmenetmátrixa lusta, azaz $Q(x, x) \geq \frac{1}{2} \forall x \in H$. Ekkor léteznek olyan c_1, C_1 univerzális konstansok, hogy az $H \wr G$ -n levő általánosított lámpagyűjtogató bolyongás teljes variációs távolságban vett keverési idejére az alábbi teljesül:*

$$\begin{aligned} c_2 (t_{cov}(G) + |G|(t_{rel}(H) \log |G| + t_{mix}(H))) &\leq t_{mix}(H \wr G), \\ t_{mix}(H \wr G) &\leq C_2 \left(t_{cov}(G) + |G|t_{mix}(H, \frac{1}{|G|}) \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ha továbbá a H -n levő Markov láncra

(A) *létezik egy erősen stacionárius idő τ_H H -n, amelynek minden $x \in H$ kezdeti állapotra van $h(x)$ megállító állapota,*

akkor 1.2-ben a felső korlát éles.

1.4. Megjegyzés. A Q -ra vonatkozó lustasági feltétel csak a $c_2|G|t_{\text{mix}}(H)$ tag bizonyításához kell (1.2)-ben. Minden más korlát a lustaság feltételezése nélkül is igaz.

1.5. Megjegyzés. Ha a H -n lévő Markov láncra

$$t_{\text{mix}}(H, \varepsilon) \leq t_{\text{mix}}(H, 1/4) + t_{\text{rel}}(H) \log \varepsilon,$$

akkor az alsó és a felső korlát megegyeznek. Ez sok természetes példára teljesül, például a hiperkockán \mathbf{Z}_2^d -n, a toruszokon \mathbf{Z}_n^d -n vett lusta bolyongásokra, egyes bolyongásokra az S_n permutációcsoporton (pl. a véletlen transzpozíciók vagy véletlen szomszédos transzpozíciók által generált bolyongás, vagy az ún. "top-to-random shuffle").

1.6. Megjegyzés. Sok példa, melyre (A) feltétel teljesül, található Pak [51] disszertációjában: többek között a körön \mathbf{Z}_n -en, a hiperkockán \mathbf{Z}_2^d -n, a tóruszokon \mathbf{Z}_n^d , $n, d \in \mathbf{N}$, a diéder csoporton $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_n$, $n \in \mathbf{N}$ konstruál megállító állapottal rendelkező erősen stacionárius időket. Továbbá, n elemű halmaz k elemű halmazai által generált csoporton $S_n/(S_k \times S_{n-k})$ -n, és az teljes lineáris csoport feletti $n \times n$ -es mátrixok terének k -s részhalmazain, vagyis $GL(n, \mathbb{F}_q)/(GL(k, \mathbb{F}_q) \times GL(n-k, \mathbb{F}_q))$ -n is konstruál megfelelő megállási időt.

A fejezet második felében Millerrel és Peres-zel közös cikkünk [39] alapján, az eddig meglévő alsó korláthoz (Peres Revelle [52, Theorem 1.4]) konstans szorzó erejéig egyező felső korlátot adunk $\mathbf{Z}_2 \wr G$ egyenletes metrikában vett keverési idejére.

Megmutatjuk, hogy csúcs-tranzitív G alapgráf esetén, a G -n vett lámpagyűjtogató bolyongás egyenletes keverési idejére

$$t_{\text{mix}}^u(\mathbf{Z}_2 \wr G, 1/4) = O\left(|G|(t_{\text{rel}}(H) + \log |G|)\right)$$

teljesül bizonyos, a gráf lokális tranzienciájára vonatkozó feltételek mellett. Megmutatjuk továbbá, hogy ezek a feltételek teljesülnek a d dimenziós hiperkockára, \mathbf{Z}_2^d -re, illetve, általánosabban a d dimenziós tóruszokra \mathbf{Z}_n^d -re, ahol d és n akár egyszerre is tarthat a végtelenbe:

1.7. Tétel. Léteznek konstansok $C_1, C_2 > 0$, hogy

$$C_1 \leq \frac{t_u(\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}_2^d)}{d2^d} \leq C_2 \text{ for all } d.$$

Általánosabban,

$$C_1 \leq \frac{t_u(\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}_n^d)}{dn^{d+2}} \leq C_2 \text{ for all } n \geq 2 \text{ and } d \geq 3.$$

Ezt a cikket megelőzően a legjobb ismert korlát [52] $t_u(\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}_2^d)$ -re

$$C_1 2^d d \leq t_u(\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}_2^d) \leq C_2 2^d d \log d$$

volt, ahol $C_1, C_2 > 0$.

1.0.1. Néhány mondat a bizonyításról

A 1.2 és 1.3 tételek bizonyítása a témában lévő módszerek változatos keveréke. A relaxációs idő alsó korlátjának bizonyítása Dirichlet-forma módszereken nyugszik. A felső korlát az alábbi lépésekből áll:

1. Konstruálunk egy erősen stacionárius időt, τ -t $H \wr G$ -n,
2. A $\mathbf{P}(\tau > t)$ valószínűség lecsengését t -ben precízen becsüljük,
3. Felhasználjuk, hogy $\lambda_2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau > t)^{1/t}$, és kiszámoljuk a határérték nagyságrendjét.

A TV -keverési időre vonatkozó 1.3 tétel szintén erősen stacionárius időket használ: a felső korláthoz meg kell határozni azt a t^* időt, amikor $\mathbf{P}(\tau > t^*) < 1/4$ a relaxációs időhöz is felhasznált erősen stacionárius megállási időre $H \wr G$ -n. Ahhoz hogy ezt megtehesük, fel kell használnunk a blanket és a fedési idő nagyságrendjének ekvivalenciáját, mely egy nemrég született eredmény [28]. Az alsó korlát bizonyítása abban az esetben, ha a feltétel 1.3 fennáll, a $\tau > t$ esemény valószínűségére vonatkozó alsó korláton alapszik. A felső korlát bizonyítása a feltétel nélkül az ú.n. "megkülönböztető halmaz" módszert alkalmazza, valamit felhasználja a TV -keverési idő és a várhatóérték-optimális stacionárius idők ekvivalenciáját.

Az egyenletes keverési időre vonatkozó eredmény bizonyítása annak a folyamatnak a precíz analízisén nyugszik, hogy az alapgráfon vett bolyongás hogyan csökkenti $\mathcal{U}(t)$ -t, az eddig még meg nem látogatott csúcsok halmazát a G alapgráfon. A kulcs ötlet az, hogy a folyamatot két különböző rezsimre bontjuk fel $\mathcal{U}(t)$ méretétől függően. Ha $\mathcal{U}(t)$ nagy, akkor megmutatjuk, hogy az aktuális mérettől függő (de nem túl hosszú) időn belül a bolyongó legalább fix számú új csúcsot látogat meg pozitív valószínűséggel. Ha $\mathcal{U}(t)$ mérete kicsi, akkor azt mutatjuk meg, hogy ismét egy, $\mathcal{U}(t)$ méretétől függő (még mindig nem túl hosszú) időn belül a bolyongó a még hátralévő csúcsok legalább felét meglátogatja pozitív valószínűséggel. Az ebből adódó sztochasztikus dominanciákat felhasználva, kellően alaposan tudjuk $\mathbf{E}(2^{\mathcal{U}(t)})$ becsülni. A bizonyítás során a Markov lánc Green függvényére vonatkozó tulajdonságokat használunk, amelyekből a feltételrendszerünk adódik.

A továbbiakban a disszertáció második fejezetének ismertetése következik.

2. Hierarchikus skálafüggetlen gráfok generálása fraktálok segítségével

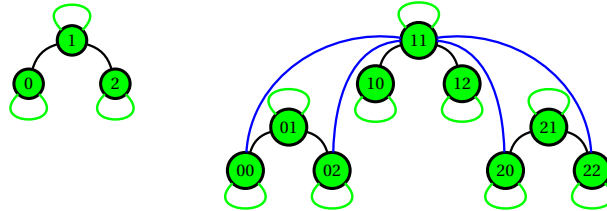
A véletlen gráfok az 50-es évek vége óta nagy tudományos érdeklődést vonzott magához. Az úttörő véletlen gráf modellt egymástól függetlenül Solomonoff, Rapoport (1951) [57], Gilbert (1959) [36], valamint Erdős és Rényi (1960) [31] vezették be. A modellben adott csúcsok egy véges halmaza, valamint minden x és y csúcspár között a többi pártól függetlenül p valószínűséggel található él. A modell egyszerűsége ellenére az ú.n. fázisátmenet jelenség

egy érdekes példajaként szolgál: az él-bekötési valószínűség egy adott értéke alatt illetve felett a gráf alapvetően különböző tulajdonságokat mutat. A tudományos irodalom széles spektruma vizsgálja ma is a modellt, illetve olyan modelleket, melyek az Erdős-Rényi (ER) gráfok általánosításai. Bevezető referenciaként többek között a [37] a [20] könyveket ajánljuk a témában. Az ER és kapcsolódó modellek vizsgálatával párhuzamosan, az utóbbi két évtizedben a tudomány nagy érdeklődéssel fordult a komplex hálózatok vizsgálata felé: az internet hálózat, a szociális és a biológiai hálózatok tulajdonságainak megértése mind fontos motivációt adtak az ez irányú figyelemnek.

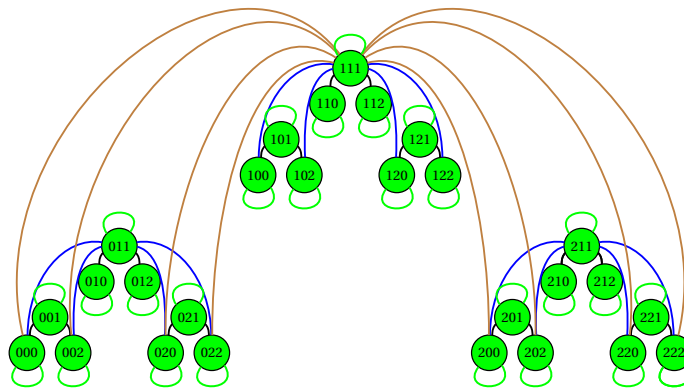
Az Erdős - Rényi gráfok és általánosításai egyszerű és jól használható modellt szolgáltatottak sok különböző alkalmazáshoz, azonban a valós hálózatok fontos, tipikus tulajdonságaival nem rendelkeznek. Először is, az ER gráfban egy csúcs szomszédjainak száma Poisson jellegű eloszlást követ, vagyis a nagy fokszámú csúcsok valószínűsége exponenciálisan lecseng. Ez a tény megakadályozza az ún. "hub"-ok (extrém nagy fokú csúcsok) létrejöttét, melyek ellenben a valós hálózatokban általában megtalálhatóak. Továbbá, megmutatható, hogy a gráfban a háromszögek aránya elenyésző a gráf méretéhez képest: az ER gráfok lokális klaszterezettségi együtthatója kicsi vagy elenyésző, ellenben sok valós, nagy klaszterezettséget mutató valós hálózattal. Itt és később, egy x csúcs lokális klaszterezettségi együtthatóján a csúcsra illeszkedő háromszögek számának és a csúcsból induló élpárok számának hányadosát értjük.

A valós hálózatok modellezésének egy másik iránya sok új, dinamikus fejlődő, növekvő hálózatmodellt hozott létre, lásd pl. [19], [20], [23], [29], [38]. Ezek többsége a preferenciális kapcsolódás valamilyen változatát használja, és szintén véletlen jellegű. Részletesebben, a valós hálózatok skálafüggetlen tulajdonsága - a gráf fokszámsorozatának hatványfüggvény lecsengése - nagy érdeklődést váltott ki, és sok modell született ennek leírására, például a preferenciális kapcsolódású vagy Barabási-Albert modell. A hasonló modellek története az 1920-as évekkel kezdődik [60, 56, 25]. A modellt (heurisztikusan) Barabási és Albert [17] vezette be, és az elsők, akik matematikailag precízen kezelték Bollobás, Riordan, Spencer és Tusnády [22] voltak. A matematikailag precíz konstrukció Bollobás és Riordan [21]-ben található. A preferenciális kapcsolódású modellben minden lépésben egy új csúcs kerül a hálózatba, melyet néhány éllel kötünk be. Ezeket az éleket egymás után kötünk be a már meglévő csúcsokhoz, a csúcsok aktuális fokszámával arányos valószínűséggel választva az él másik végpontját. Vagyis, az új csúcs előnyben részesíti a már eleve nagy fokszámmal rendelkező csúcsokhoz való kapcsolódást. Az így keletkező gráf fokszámeloszlásának lecsengése sok valós hálózathoz hasonlóan hatványfüggvényt követ. Bevezetése óta rengeteg verziója született a modellnek, a széles irodalom áttekintése megtalálható többek között [20]-ban vagy [37]-ban.

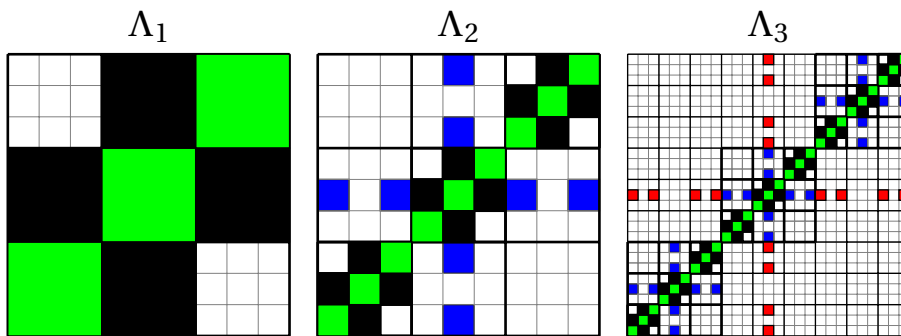
A preferenciális kapcsolódástól teljesen eltérő megközelítést kezdeményezett



(a) G_1 és G_2 , hurokélekkel



(b) G_3



(c) $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ halmazok

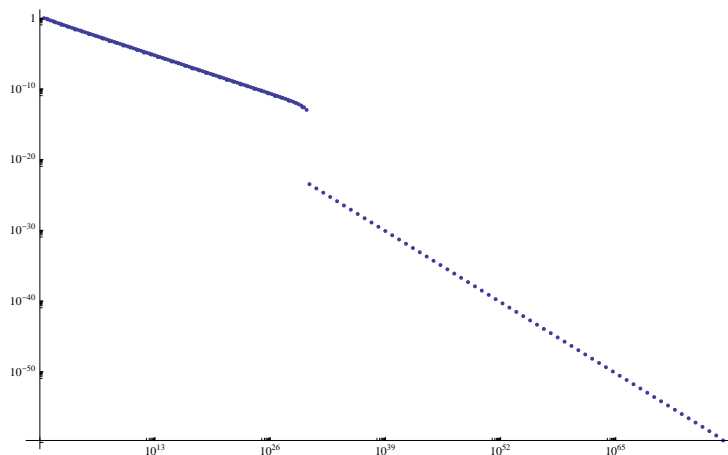
3. ábra. $G_1, G_2, G_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ a "cseresznye" példa esetében. A szomszédossági mátrixok ábrázolása úgy történik, hogy a bal alsó sarok az origó, az x és y tengelyek pedig rendre jobbra ill. felfelé irányítottak. A színes négyzetek tartoznak az adjacencia mátrixhoz, és a szín a fentebb lévő gráf megfelelő élének színével egyezik meg.

Barabási, Ravasz, és Vicsek [18] lásd 3(a) és 3(b) ábrákat, amely arra a megfigyelésre alapult, hogy sok valós hálózat valamilyen jellegű hierarchikus struktúrával rendelkezik. Egy olyan determinisztikus hálózatmodellt vezettek be, melynek konstruálása a fraktálokéhoz hasonló. A modell hierarchikus szerkezettel rendelkezik, és a fokszámeloszlás "extrém vége" hatványlecsengésű. Pontosabban, az "elég nagy" fokszámmal rendelkező csúcsok fokszámeloszlása hatványlecsengést mutat. Ugyanakkor, az eredeti modell [18]-ben páros gráf, vagyis háromszögmentes, így klaszterezettségi együttthatója 0. Ahhoz, hogy a klaszterezettségi együttthatót is jól modellezzék, Ravasz és Barabási az eredeti modellt továbbfejlesztette [54]-ben, mégpedig úgy, hogy a módosított modell megtartotta a hatványlecsengés kitavójét, viszont a valóshálózatokhoz hasonló klaszterezettséget mutat: egy adott csúcs klaszterezettségi együttthatója a csúcs fokszámának reciprokával arányos. Ennek és a hatványlecsengésnek a következménye, hogy a gráf átlagos klaszterezettségi együttthatója többé-kevésbé független a gráf méretétől, vagyis 0-tól és végtelentől egyenletesen elhatárolt. Hasonló, fraktálokra épülő hálózatokat vezetett be Zhang, Comellas, Fertin és Rong [61], melyet magas dimenziós Apollóniuszi hálózatoknak neveztek el. A modell gráfja az Apollóniuszi körfedés vagy a Sierpiński háromszög véges approximációinak segítségével keletkezik.

A disszertáció második fejezetében a [18] és [54] modelleket általánosítjuk. Tetszőleges N csúcson levő G páros gráfból kiindulva, determinisztikus gráfok hierarchikus sorozatát (G_n) konstruáljuk. Precízebben, G_n csúcshalmaza $\{0, 1, \dots, N-1\}^n$. G_n -t úgy kapjuk G_{n-1} -ből, hogy G_{n-1} N azonos másolatát tekintjük, majd ezeket egy, a csúcsok kódjának utolsó betűin alapuló szabály szerint kötjük össze, melyet a kezdeti gráf G egyértelműen meghatároz. A módszer segítségével G_n N^{n-k} darab G_k -másolatot tartalmaz, minden $k = 1, \dots, n-1$ -re, lásd a 3(a), 3(b) ábrákat.

Az általánosított modell nagy előnye, hogy olyan, könnyen számolható gráfsorozatot generál, melyben a csúcsok átlagos fokszáma nem korlátos: az fokszámeloszlás extrém vége hatványlecsengésű, ahol a kitevő bármilyen log-rationális szám lehet az $(1, 1 + \log 3 / \log 2]$ intervallumban. Amennyiben a kezdeti gráf bi-reguláris, a teljes fokszámeloszlás pontosan számolható. Megmutatjuk, hogy ez esetben a fokszámeloszlást két különböző hatványkitevő dominálja, lásd az 4. ábrát. Továbbá, explicit formulát adunk a gráf átmérőjére, két csúcs közötti legrövidebb út átlagos hosszára: ezen paraméterek a gráf méretének logaritmusával skálázódnak.

G_n háromszögmentes gráf. Ezért, a valós hálózatok klaszterezettségi tulajdonságainak modellezése érdekében, további éllel módosítanunk kell a gráfsorozatot, hogy megtörjük a gráf páros struktúráját. Az [54] cikk motivációja alapján, G_1 -hez adunk extra éleket, és így a \widehat{G}_1 gráfot nyerjük, mely már nem páros. Ezek után az új \widehat{G}_n gráfsorozatot az alábbi módon konstruáljuk \widehat{G}_n \widehat{G}_1 N^{n-1} darab másolatából áll, amelyeket pontosan ugyanolyan módon kapcsolunk össze, mint G_n -ben voltak a G_1 -másolatok. Így,

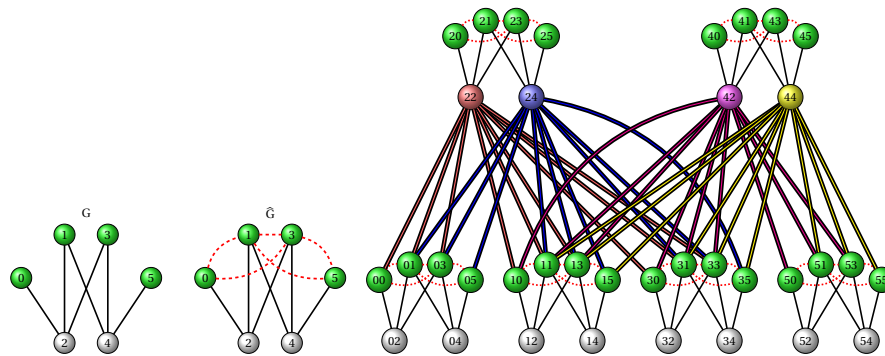


4. ábra. G_{100} fokszámeloszlásának diagramja log-log-skálán. A kiinduló gráf bi-reguláris $d_1 = 6, d_2 = 2$, az élek száma $E = 12$. Látható, hogy két különböző hatványkitevőt követ a fokszámeloszlás.

\widehat{G}_n és G_n csúcshalmaza azonos, és éleik csak a legalsó hierarchikus szinten különböznek, lásd az 5(b), 5 ábrákat. Ezek után expliciten meghatározzuk és megmutatjuk, hogy egy k fokú csúcs klaszterezettségi együtthatója $1/k$ nagyságrendű \widehat{G}_n -ban, és így az átlag egyenletesen korlátos és 0-tól is elhatárolt.

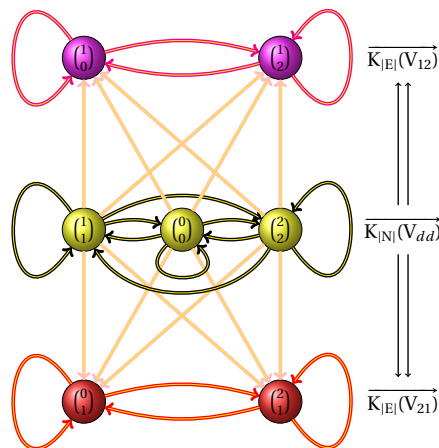
A G_n gráfsorozat szomszédossági (adjacencia) mátrixának beágyazása a $[0, 1]^2$ egységnyezetbe az alábbi módon történik: Egy $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$ kódú csúcsot a megfelelő N -adikus intervallummal, $I_{\underline{x}}$ -szel azonosítjuk. Ezek után Λ_n azoknak az $I_{\underline{x}} \times I_{\underline{y}}$, $N^{-n} \times N^{-n}$ méretű négyzeteknek uniója, amelyekre a megfelelő $\underline{x}, \underline{y}$ csúcsokat a G_n gráfban él köti össze. Vagyis, Λ_n a lehető legtermészetesebb beágyazása a szomszédossági mátrixnak az egységnyezetbe. Ezek után megmutatjuk, hogy Λ_n kompakt halmazok egymásba ágyazott sorozata, mely éppen az n -edik approximációja a határhalmaznak Λ -nak. Λ -ról pedig megmutatjuk, hogy egy ú.n. gráf-irányított önhasonló halmaz, (3(c) ábra).

Precízebben, belátjuk, hogy Λ egy nem irreducibilis irányító gráffal rendelkező gráf-irányított önhasonló iterált függvényrendszer attraktora, amely irányító gráfjának szerkezete a 6. ábrán láthatóhoz hasonló. Heurisztikusan szólva, az n . szomszédossági mátrix Λ_n felírható úgy, mint valamely $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1], i = 1 \dots |E(G)|$, leképezésekből iterált leképezések uniója, ahol csak azok az iterációk megengedettek, melyeket az irányító gráfban egy n hosszú út reprezentál. Vagyis, $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_n}$ megengedett iteráció Λ_n -ben, ha $i_1 i_2 \dots i_n$ egy útnak felel meg a 6. ábrán látható \mathcal{G} gráfban. Továbbá azt is vizsgáljuk, hogy a gráfsorozat fokszám-lecsengésének hatványkitevője hogyan köthető a limesz fraktál Λ tulajdonságaihoz. Belátjuk, hogy a hatványkitevő



(a) \widehat{G} -ot úgy kapjuk, hogy G -hez a piros (szaggatott) éleket adjuk. (b) \widehat{G}_2 : \widehat{G}_2 éleit úgy kapjuk, hogy a G_2 -ben lévő minden egyes G_1 másolatba pontosan ugyanazokat az extra éleket húzzuk be, melyeket \widehat{G} -ben behúztunk.

5. ábra. Módosított "legyező" példa.



6. ábra. A "cseresznye" példa irányító gráfja \mathcal{G} . A gráf minden éle egy-egy homotéciónak felel meg, mely az egységnégyzetet önmagára képezi. Λ_n, G_n adjacencia mátrixa úgy keletkezik, mint az összes olyan iterált leképezés uniója, mely egy n hosszú útnak felel meg a \mathcal{G} gráfon.

a fraktált bizonyos (Lebesgue-típusú illetve függőleges egyenes menti) met-szetek Hausdorff dimenziójának hányadosaként kapjuk.

A limesz fraktált illetve annak Λ_n approximációit felhasználva véletlen gráfsorozatot is generálunk: módszert a Lovász-Szegedy féle W -véletlen gráfok inspirálták (Lovász -Szegedy [47], illetve Diaconis, Janson [27], amely cikkben további referenciák találhatóak). Megmutatjuk, hogy a véletlen modell fokszámeloszlásának hatványkitevője ugyanaz, mint a neki megfelelő determinisztikusé. Vagyis, a módszerünk lehetővé teszi olyan véletlen gráfsorozatok könnyű és gyors generálását, melyekben a hatványkitevőt előre előírhatjuk, és a kritikus $(1, 2)$ tartományban is lehet.

Bollobás, Janson és Riordan [23] vizsgáltak hasonló módszerekkel, kernelekből generált véletlen gráfokat. A mi modellünk nem illeszkedik az általuk definiált modellcsaládba, mert Λ fraktálhalmaz, Lebesgue mértéke 0. Azt is megjegyezzük, hogy mivel a limesz fraktál Λ nem izomorfia-invariáns, (az egységnyezet önmagára történő leképezéseit tekintve), ezért a Lovász-Szegedy féle gráflimesz nem alkalmazható szó szerint a mi gráfmodellünkre. Ugyanakkor, az alapgráf csúcsainak különböző kódolása különböző limesz-fraktálokat eredményez, melyeknek Hausdorff dimenziója azonos.

3. Kölcsönható részecskerendszerek illetve ülepedési modellek fluktuációi

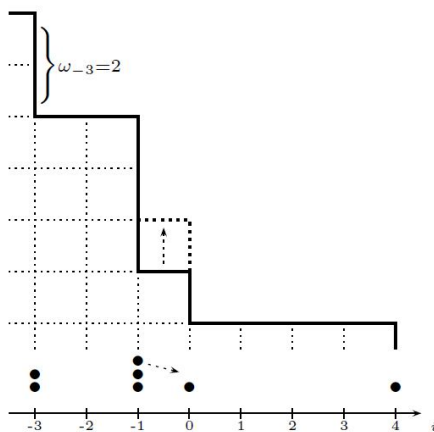
A disszertációm harmadik fejezete az alábbi típusú ülepedési modellek fluktuációját vizsgálja. Legyen egy egész értékű magasság-függvény

$$\underline{h}(t) = \{h_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}},$$

mely egységnyi hosszúságú és magasságú téglák véletlen hozzáadásával illetve elvételével fejlődik. A fal i csúcs feletti változási rátája Poisson, melynek paramétere függhet a fal szomszédos csúcsokig történő magasságváltozásától, $h_{i-1} - h_i$ és $h_i - h_{i+1}$ -től (ezt a fal gradiensének hívjuk ezentúl). Amennyiben a ráták bizonyos feltételeket kielégítenek, a rendszer sztochasztikusan monoton, vagyis attraktív, és a növekményeknek $\{h_{i-1} - h_i : i \in \mathbb{Z}\}$ létezik szorzat alakú stacionárius eloszlása (μ^ρ), melynek egy független paramétere van. Az invariáns mértékcsaládot általában az átlagos lejtéssel paraméterezzük, $\rho = \mathbf{E}^\rho(h_{i-1} - h_i)$. A hidrodinamikai fluxusfüggvény, $\mathcal{H}(\rho) = t^{-1} \mathbf{E}^\rho(h_i(t) - h_i(0))$, megadja az egy adott csúcs feletti átlagos falnövekedési sebességet a ρ lejtés függvényében. Ebben a fejezetben olyan típusú *aszimmetrikus* rendszereket vizsgálunk, melyekre $\mathcal{H}''(\rho) < 0$ is teljesül, egy adott ρ sűrűség legálább egy kis környezetében. Az aszimmetriát mindig tér-aszimmetriaként értjük, vagyis olyan modelleket tekintünk, melyekre a magasságnövekedési illetve csökkenési ráták nem egyeznek meg.

A fal gradiensének összege megőrződik a folyamat dinamikája alatt, hiszen egy téglá hozzáadása vagy elvétele $+1$ változást okoz egy gradiensben és -1 -et az egyik szomszédos gradiensben. Amennyiben a gradiensek

mind nemnegatívak, tekinthetők az adott csúcs feletti részecskék számának. Így, egy a falfolyamattal ekvivalens részecskefolyamatot kapunk: egy téglá hozzáadása a folyamathoz egy részecske jobbra ugrásának, egy téglá elvétele pedig egy balra ugrásnak felel meg. A 3. ábra egy lehetséges fal illetve részecskekonfigurációt mutat egy lehetséges részecskeugrással ill. a hozzá tartozó fal-változással. A kölcsönható részecske kép az, ami elterjedt az irodalomban: az egyszerű kizárásos folyamat, az ú.n. "zero-range" és különböző "mizantróp" folyamatok olyan példák, melyek az általunk vizsgált modellcsaládba tartoznak. A részecske modellben a ρ paraméter a stacionárius eloszlásban a részecskék csúcsonkénti sűrűségét jelenti. A fal magasságának megváltozása $h_i(t) - h_i(0)$ annak felel meg, hogy összesen hány részecske ugrott át (előjelesen) az $(i, i + 1)$ élen a $(0, t]$ időintervallumban.



7. ábra. A fal és a neki megfelelő részecskék, egy lehetséges ugrással

Rögzítsük most ρ -t és tekintsük a $h(t)$, ρ átlagos lejtésű stacionárius folyamatot, melyre $h_0(0) = 0$. A fal magasságának érdekes fluktuációit akkor látjuk, ha megfigyelőként a karakterisztikus sebességgel sétálunk: $h_{[V^e t]}(t)$, ahol a karakterisztikus sebesség $V^e := \mathcal{H}'(\rho)$. (A karakterisztika egy olyan egyenes $X(T)$, amely mentén a sűrűség $\rho(T, X(T))$ állandó, a *karakterisztikus sebesség* V^e ennek meredeksége. Ugyanakkor, ez az a sebesség, amivel a hidrodinamikai limeszként kapott PDE megoldásainak kis perturbációi utaznak.) később látni fogjuk, hogy ez az a sebesség, amellyel haladva a rendszer megfigyelője a fal magasságának érdekes fluktuációival találkozik, más sebességek normális fluktuációkat adnak. A részecske modellekben a fal magasságának fluktuációi az összegzett részecskeáram fluktuációit jelentik, melyet egy, a karakterisztikus sebességgel utazó megfigyelő észlel.

A karakterisztika mentén található fluktuációk témájában létező precíz matematikai eredmények két fő különböző kategóriába sorolhatók.

$t^{1/4}$ nagyságrendű fluktuációk. Amennyiben \mathcal{H} lineáris, a fluktuációk nagyságrendje $t^{1/4}$, és a frakcionális Brown mozgáshoz köthető Gauss folyamatokhoz konvergál. Ez bizonyított független részecskékre, [30, 41, 55] és a véletlen átlagfolyamatra [12, 33].

$t^{1/3}$ nagyságrendű fluktuációk. Amennyiben $\mathcal{H}''(\varrho) \neq 0$, a fluktuációk nagyságrendje $t^{1/3}$, és eloszlása a Tracy-Widom eloszláshoz köthető eloszlásokhoz konvergál (mely véletlen mátrixok elméletéből is ismert). A legtöbbet vizsgált példa a teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat (TASEP), a polinukleáris növekedési modell (PNG) és a Hammersley folyamat, Kétféle matematikai módszerrel különböztetünk meg.

(a) Pontos határeloszlásokat olyan módszerekkel határoztak meg, melyek a vizsgált valószínűségeknek megfelelő determináns-folyamatok analíziséből származnak. Ezen munkák többségében a folyamat determinisztikus kezdeti állapotból indul, a stacionárius esetet kevésbé vizsgálták. Az úttörő eredmény [5], a Hammersley folyamat ú.n. "last-passage" verzióját vizsgálja, mely a TASEP-hez is köthető. Stacionárius TASEP áramfluktuációit [34]-ban vizsgálták.

(b) A valószínűségi módszerek a fluktuációk helyes nagyságrendjét tudják meghatározni. Az úttörő cikk a témában [24], mely szintén a Hammersley folyamat ú.n. "last-passage" verzióját vizsgálja, majd a módszert a TASEP-nek megfelelő last-passage modellre is adaptálták [7]. A következő lépés az volt, hogy olyan bizonyítást találjunk, mely részecskerendszerekre is működik: az aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamatot (ASEP) [16] kezelte, majd a teljesen aszimmetrikus konstans rátájú zero range folyamat (TAZRP) következt [9]. Az ASEP cikk [16] volt az első, mely nem teljesen aszimmetrikus modellekre bizonyított $t^{1/3}$ nagyságrendű fluktuációkat.

Ez a fejezet két cikkre épül, melyek mindegyike Balázs Mártonnal és Timo Seppäläinen-nel közös munka. Az első [11], amely a fenti eredmények egy univerzalitás jellegű eredménye, mely $t^{1/3}$ nagyságrendű fluktuációk egy általános bizonyítását adja a $\mathcal{H}''(\varrho) \neq 0$ esetben. Pontosabban, [11]-ban egy olyan stratégiát illetve feltételrendszert dolgozunk ki, melynek fennállása esetén bizonyítjuk stacionárius (egyensúlyi) folyamatok karakterisztikus irányban lévő fluktuációinak $t^{1/3}$ nagyságrendjét. Majd [10]-ban megmutatjuk, hogy a módszer és a feltételrendszer egy konvex fluxusfüggvénnyel rendelkező modellre is fennáll. A feltételrendszer a jelenlegi formájában olyan nemtriviális feltételeket tartalmaz, melyek két különböző sűrűségű rendszer közti másodosztályú részecskék kontrolljára épülnek. Ez a kontroll épp annak a mikroszkopikus megfelelője, melyet a fluxusfüggvény konkavítása illetve konvexitása okoz a karakterisztika mentén. A fejezet első részében a konkáv esetet vizsgáljuk, vagyis $\mathcal{H}''(\varrho) < 0$, ezért a feltételrendszert *mikroszkopikus konkavitásnak* nevezzük.

Amint valamely modellre vagy modellesaládra teljesül a mikroszkopikus konkavitás feltételrendszere, a teljes bizonyítás működik a modellesaládra

és a feltételrendszer garantálja a karakterisztika menti fluktuációk $t^{1/3}$ -os skálázását. Ez jelenti azt, hogy ezen munka egy univerzalitási eredmény. A bizonyítás melléktermékeként a stacionárius folyamatban lévő másodosztályú részecske szuperdiffuzivitását is megkapjuk.

Az eddigi eredmények a témában (kivéve [16]) meglehetősen merevek voltak abban a tekintetben, hogy csak bizonyos speciális esetekben működtek, ahol valamilyen szerencsés módon szép kombinatorikus tulajdonságok teljesültek. Vagyis, ezekben a bizonyításokban általában nincs mód a modell szabályainak megváltoztatására. Ezzel ellentétben, az itt adott bizonyítás modellek egész családjára teljesül. Ugyanakkor, a mikroszkopikus konkavitás feltétele egyáltalán nem triviális, és nem triviális ellenőrizni sem, viszont valószínűleg nem zár ki sok folyamatot. Azok a becslések, amelyeket a feltételrendszer igényel, különféle módszerekkel bizonyítható a modelleszalád különböző részcsaládjaira, ugyanakkor az általános bizonyítás is fejleszthetőnek tűnik, és ez a feltételrendszer enyhítéséhez vezethet.

Jelenleg az alábbi három modelleszaládra tudjuk bizonyítani a mikroszkopikus konkavitás kritériumrendszerét:

(i) Az aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat (ASEP). Ez a modell teljes részletességgel kidolgozva a Balázs-Seppäläinen cikkben [15] található. Az ott található bizonyítás valamivel egyszerűbb, mint az eredeti [16].

(ii) Teljesen aszimmetrikus zero range folyamatok, melyeknek a konkáv ugrási rátafüggvénye olyan, hogy a meredeksége exponenciálisan csökken, vagy a rátafüggvény konstans. Ezt a példát teljes részletességgel kidolgozzuk a [11] cikkben és a disszertációban is. Korábban, a konstans rátájú folyamatot a [9] cikkben kezeltük, mint a [16]-beli bizonyítás első általánosítása olyan modellre, mely egy csúcson több részecskét is megenged. Az itteni bizonyítás egyszerűbb a [9]-ben adottnál. Azt várjuk, hogy a teljesen és nem teljesen aszimmetrikus zero range folyamatok egy szélesebb családjára is kezelhető lesz a továbbiakban, hiszen ezekben az általánosabb esetekben a kritériumrendszer nagy része teljesül, egyedül egy bizonyos eloszlásbeli korlát hiányzik.

(iii) A teljesen aszimmetrikus kőműves-folyamat konvex, exponenciális ugrási rátákkal. Ez a rendszer az analóg *mikroszkopikus konvexitást* elégíti ki. Mivel az ugrási ráták gyorsan nőnek, ezért ez a modell több előzetes munkát igényel. Ezért, egy külön cikkben [10], illetve a disszertációban külön alfejezetben kezeltük.

Egy megjegyzés a nem teljesen aszimmetrikus modellekről: egyelőre az egyetlen ilyen modell, melyre a $t^{1/3}$ fluktuáció bizonyítva van, az ASEP [16]. Azonban megjegyezzük, hogy a mikroszkopikus konvexitás kritériumrendszere fennállhat ezekre a modellekre is. Sok esetben a szükséges csatolásokat már megkonstruáltuk aszimmetrikus esetben is, csak a másodosztályú részecske címkéjére vonatkozó eloszlásbeli korlát hiányzik.

3.1. Ülepedési modellek egy családja

Az általunk vizsgált modelles család leírása megtalálható [14]-ben. A falnövekedési modell leírásával kezdjük, azonban a fal és részecske nyelvezetet egyaránt fogjuk használni. Legyenek $-\infty \leq \omega^{\min} \leq 0$ and $1 \leq \omega^{\max} \leq \infty$ egészek, és definiáljuk az egy csúcs feletti (marginális) állapotteret

$$I := \{z \in \mathbb{Z} : \omega^{\min} - 1 < z < \omega^{\max} + 1\}$$

és a fal gradiens-konfigurációjának állapotterét

$$\Omega := \{\underline{\omega} = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \omega_i \in I\} = I^{\mathbb{Z}}.$$

Minden szomszédos $(i, i + 1)$, $i \in \mathbb{Z}$ csúcspárra képzeljünk egy téglaszlopot az $(i, i + 1)$ intervallum felett. Az oszlop h_i magassága egész. Egy $\underline{\omega} \in \Omega$ konfiguráció komponensei a magasságok diszkrét gradiensei: $\omega_i = h_{i-1} - h_i \in I$. A folyamat fejlődését ugró folyamatok írják le, melyek rátáfüggvénye p és q nemnegatív függvények $I \times I$ -n. kétféle lépés lehetséges. Egy téglát felkerülhet a falra:

$$\left. \begin{array}{l} (\omega_i, \omega_{i+1}) \longrightarrow (\omega_i - 1, \omega_{i+1} + 1) \\ h_i \longrightarrow h_i + 1 \end{array} \right\} \text{ melynek rátája } p(\omega_i, \omega_{i+1}), \quad (3.1)$$

vagy eltávolíthatják:

$$\left. \begin{array}{l} (\omega_i, \omega_{i+1}) \longrightarrow (\omega_i + 1, \omega_{i+1} - 1) \\ h_i \longrightarrow h_i - 1 \end{array} \right\} \text{ melynek rátája } q(\omega_i, \omega_{i+1}). \quad (3.2)$$

A jelenlegi állapotra feltételezve, ezek a műveletek minden i -re egymástól függetlenül történnek. Az így leírt $\underline{\omega}(\cdot)$ folyamatot az L infinitezimális generátorával adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} (L\varphi)(\underline{\omega}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} p(\omega_i, \omega_{i+1}) \cdot [\varphi(\dots, \omega_i - 1, \omega_{i+1} + 1, \dots) - \varphi(\underline{\omega})] \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} q(\omega_i, \omega_{i+1}) \cdot [\varphi(\dots, \omega_i + 1, \omega_{i+1} - 1, \dots) - \varphi(\underline{\omega})]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

L a $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, korlátos cylinderfüggvényeken ható operátor (vagyis φ csak véges sok ω_i értéktől függ).

Így, a fal gradiensének fejlődését a $\{\underline{\omega}(t) : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ Markov folyamat, a fejlődő falkonfigurációt pedig a $\{\underline{h}(t) : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ Markov folyamat írja le. A kezdeti gradiens $\underline{\omega}(0)$ a kezdeti $\underline{h}(0)$ magasságot csak függőleges eltolások erejéig határozzák meg, ezért mindig feltehetjük, hogy $h_0(0) = 0$.

A részecske képben az $\omega_i(t)$ valószínűségi változó az i csúcson t időpontban található részecskék számát reprezentálja. A (3.1) lépés egy részecske jobbra ugrásának felel meg az $(i, i + 1)$ él felett, míg a (3.2) lépés egy balra ugrás

fejez ki. (Amennyiben negatív ω -értékek is megengedettek, (vagyis a fal nem csak jobbra lejt), részecskéket és antirészecskéket kell vizsgálnunk, ahol az antirészecskék az ellenkező irányba ugranak. Hasznos látni, hogy

$$h_i(t) = h_i(t) - h_0(0) = \text{azon részecskék előjeles száma, melyek} \\ \text{balról jobbra keresztezték azt a tér-idő egyenes, mely} \\ \text{összeköti } (1/2, 0)\text{-t } (i + 1/2, t)\text{-val.} \quad (3.4)$$

A rátafüggvényekre vonatkozóan négy feltevéssel élünk, melyeket ebben a kivonatban csak heurisztikusan írunk le.

- A $p, q : I \times I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ rátafüggvényekre

$$p(\omega^{\min}, \cdot) \equiv p(\cdot, \omega^{\max}) \equiv q(\omega^{\max}, \cdot) \equiv q(\cdot, \omega^{\min}) \equiv 0 \quad (3.5)$$

kell, hogy teljesüljön, ha ω^{\min} vagy ω^{\max} véges. A többi esetben vagy mind p és mind q szigorúan pozitívak, vagy az egyikük azonosan nulla. A folyamatot *teljesen aszimmetrikusnak* nevezzük, ha vagy $q \equiv 0$ vagy $p \equiv 0$.

- A dinamika az alábbi simító tulajdonsággal rendelkezik: a rátafüggvények növekményei olyan módon monotonok, hogy minél több részecske van egy csúcson, annál gyorsabban ugranak szét. A fal nyelven beszélve, minél magasabbak egy oszlop szomszédjai, annál gyorsabban nő és annál nehezebben távolítunk el belőle egy téglát. Ezt a fogalmat *attraktivitásnak* nevezzük.
- Két további technikai jellegű kritérium garantálja a az eltolásinvariáns szorzat formájú stacionárius eloszlás létezését. (Hasonló kritériumokat fogalmazott meg Coccozza-Thivent [26].)

Az a próbálkozás, hogy modellek ilyen széles családját egyszerre kezeljük, azt a kényes kérdést veti fel, hogy az egész modelleszaládra jelenleg még nincs egységes egzisztencia bizonyítás. Az irodalomban található különböző konstrukciók p -re és q -ra, valamint I -re vonatkozó különböző korlátossági ill. növekedési kritériumok mellett működnek, és a folyamat félcsoportjának különböző regularitási tulajdonságait eredményezik. (Többek között lásd a Liggett monográfiát [46], valamint a [4], [13] és [45] cikkeket.) Ezek az egzisztencia kérdések a jelenlegi tézis keretein túlmutatnak. Mindazonáltal, egy olyan általános bizonyítást adunk, mely elvben a modelleszalád bármely tagjára működhet, amennyiben a sokkal szigorúbb mikroszkopikus konkavitás feltételrendszer teljesül. A bizonyítás során alkalmazott technikák nem támasztanak igényt a félcsoport analitikus tulajdonságaira, vagy annak a folyamat generátorával való viszonyára. Mindössze csatolásokat, a részecskék számlálását és egyszerű Poisson korlátokat használunk.

A [14] cikkben található két azonosság kulcsszerepet játszik a bizonyításban. Ezen azonosságok a modelleszalád minden tagjára teljesülnek. Azonban, a bizonyításuk [14]-ben olyan, a folyamat generátorát felhasználó számolásokat tartalmaz, melyek nem feltétlen bizonyítottak az összes folyamatra. Ugyanakkor, ezen azonosságok a folyamat generátora felhasználásának kikerülésével, egyszerű részecske-számlálással és véges térfogatú modellek határértékének vételével is bizonyíthatóak ([15] tartalmaz egy ilyen példát). Egy ilyen bizonyítás keresztülvihető minden értelmes modellkonstrukció esetén, ezért nem tartózkodunk attól, hogy a [14] cikk eredményeit felhasználjuk.

3.2. Egyszerű csatolás

Az $\underline{\omega}^m(\cdot)$, $m = 1, \dots, n$ folyamatok közös fejlődésének *egyszerű csatolását* úgy definiáljuk, hogy a folyamatok "amikor csak lehet, együtt ugorjanak". A közös rátákat, a jelenlegi $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \dots, \underline{\omega}^n \in \tilde{\Omega}$ konfigurációra feltételezve, az alábbi módon kapjuk: Tekintsünk egy (3.1) típusú ugrást az $(i, i + 1)$ él felett. Legyen $m \mapsto \ell(m)$ az a permutáció, amely az egyes folyamatok aktuális ugrási rátáit nagyság szerinti sorrendbe rakja :

$$r(m) \equiv p(\omega_i^{\ell(m)}, \omega_{i+1}^{\ell(m)}) \leq p(\omega_i^{\ell(m+1)}, \omega_{i+1}^{\ell(m+1)}) \equiv r(m+1), \quad 1 \leq m < n.$$

Legyen továbbá $r(0) = 0$. Ezek után a szabály az, hogy egymástól függetlenül minden $m = 1, \dots, n$ -re, $r(m) - r(m - 1)$ rátával, pontosan az $\underline{\omega}^{\ell(m)}$, $\underline{\omega}^{\ell(m+1)}, \dots, \underline{\omega}^{\ell(n)}$ folyamatok hajtják végre a (3.1) lépést, a $\underline{\omega}^{\ell(1)}, \underline{\omega}^{\ell(2)}, \dots, \underline{\omega}^{\ell(m-1)}$ folyamatok pedig nem. Az ezen ugrási rátákból adódó ugrási ráták épp a megfelelő marginális ugrási rátákkal rendelkeznek, vagyis, a $\underline{\omega}^{\ell(m)}$ folyamat az ugrást épp $r(m)$ rátával hajtja végre.

A rátafüggvényekre vonatkozó monotonitási feltétel következménye, hogy $\underline{\omega}^a$ ugrása $\underline{\omega}^b$ nélkül csak akkor történhet, ha $p(\omega_i^b, \omega_{i+1}^b) < p(\omega_i^a, \omega_{i+1}^a)$, amely csak $\omega_i^a > \omega_i^b$ vagy $\omega_{i+1}^a < \omega_{i+1}^b$ esetén lehetséges. Vagyis, ezen (3.1) ugrás eredménye nem tudja a két folyamat közti különbséget növelni, innen az *attraktivitás* elnevezés. Az is látható, hogy a $\omega_i^a \leq \omega_i^b \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ koordinátánkénti rendezést az egyszerű csatolás megőrzi.

Két folyamat közti különbségeket *másodosztályú részecskéknek* neveziünk, melyek száma az attraktivitás miatt nemnövekvő. Pontosabban, amennyiben $\omega_i^a \geq \omega_i^b$ fennáll minden $i \in \mathbb{Z}$, akkor a másodosztályú részecskék megőrződnek. A (3.4)-t tekintve, ebben az esetben az $(1/2, 0)$ -ból a $(i + 1/2, t)$ -be menő egyenes tér-idő utat előjelesen metsző össz-másodosztályú részecskeszám megfelel a két fal közötti növekedés különbségének

$$(h_i^a(t) - h_0^a(0)) - (h_i^b(t) - h_0^b(0)) = h_i^a(t) - h_i^b(t) \quad (3.6)$$

az $\underline{\omega}^a(\cdot)$ és $\underline{\omega}^b(\cdot)$ folyamatokra.

Számunkra kulcsfontosságú az a szituáció, amikor két folyamat $\underline{\omega}^-(t)$ és $\underline{\omega}^+(t)$ közt egyetlen másodosztályú részecske található. A t időpontbeli pozícióját $Q(t)$ -vel jelöljük.

3.3. Results

Nagyon tömören, a fejezetben található $t^{1/3}$ -os fluktuációkra vonatkozó bizonyítás akkor működik, ha az alábbi, *mikroszkopikus konkavitásnak* nevezett feltételrendszer belátható egy adott modellről (a precíz megfogalmazást a kivonatban mellőzzük):

1. a sűrűbb $\underline{\omega}(t)$ folyamaton található $Q^\omega(t)$ másodosztályú részecske és az alacsonyabb sűrűségű $\underline{\eta}(t)$ folyamaton található Q^η másodosztályú részecske közti szigorú dominancia;
2. egy nem szigorú, de feszes eloszlásbeli dominancia az $\underline{\omega}(t)$ folyamaton található $Q(t)$ másodosztályú részecske és másodosztályú részecskék azon halmaza közt, mely $\underline{\omega}(t)$ és egy ritkább sűrűségű folyamat közt található;
3. szigorúan konkáv vagy konvex (a második derivált értelemben vett) hidrodinamikai fluxusfüggvény \mathcal{H} ;
4. egy, közel stacionárius folyamatban lévő másodosztályú részecske helyére vonatkozó lecsengési korlát.

A 1 és 2 tulajdonságok alkotják a mikroszkopikus konkavitást vagy konvexitás tulajdonságot. A fejezetben található érveléseket a konkáv esetre vonatkoznak, de a teljes bizonyítás szó szerint átfordítható a konvex esetre is.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a ρ sűrűségű modellre fenáll a mikroszkopikus konkavitás tulajdonság, valamint a 4 eloszlásbeli korlát is. Legyenek ekkor $(\underline{\omega}^-(t), \underline{\omega}(t))$ az egyszerű csatolás szerint együtt fejlődő, az origó kivételével stacionárius eloszlásból induló folyamatok (az origó beli eloszlás a tézisben definiált) valamint legyen $Q(t)$ az egyetlen másodosztályú részecske az $\underline{\omega}^-(t)$ és $\underline{\omega}(t)$ folyamatok között. ekkor léteznek $C_1 = C_1(\rho) \in (0, \infty)$ konstansok, hogy minden $1 \leq m < 3$ -re,*

$$\frac{1}{C_1} < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|Q(t) - V^{\rho t}|^m}{t^{2m/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|Q(t) - V^{\rho t}|^m}{t^{2m/3}} < \frac{C_1}{3 - m}. \quad (3.7)$$

A másodosztályú részecske szuperdiffuzivitása a legjobban az $m = 2$ választással látható: helyzetének szórása $t^{4/3}$ nagyságrendű. A továbbiakban a tétel következményei jönnek. Az $\lfloor X \rfloor$ jelölés X alsó egészrészét jelöli.

3.2. Következmény (A részecskeáram szórása). *A mikroszkopikus konkavitás feltételeinek fennállása esetén létezik $C_1 = C_1(\rho) > 0$ konstans, hogy*

$$\frac{1}{C_1} < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{Var}^\rho(h_{\lfloor V^{\rho t} \rfloor}(t))}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{Var}^\rho(h_{\lfloor V^{\rho t} \rfloor}(t))}{t^{2/3}} < C_1.$$

Ez a [14]-ben található $\mathbf{Var}^{\varrho}(h_i(t)) = \mathbf{Var}^{\varrho}(\omega_0) \cdot \mathbf{E}|Q(t) - i|$ azonosság illetve az előző tétel következménye az $m = 1$, $i = \lfloor V^{\varrho}t \rfloor$ választással.

3.3. Következmény (Nagy Számok Törvénye a másodosztályú részecskére). *A mikroszkopikus konkavitás feltételeinek fennállása esetén, a Nagy Számok Gyenge Törvénye teljesül a ϱ sűrűségű stacionárius folyamatban:*

$$\frac{Q(t)}{t} \xrightarrow{d} V^{\varrho}. \quad (3.8)$$

Ha a p és q rátafüggvények növekményei korlátosak, (vagyis $p(y+1, z) - p(y, z)$ és $q(y, z-1) - q(y, z)$ korlátosak), akkor majdnem biztos konvergencia is igaz (3.8)-ben (Nagy Számok Erős Törvénye).

A Gyenge Törvény a 3.1 Tétel egyszerű következménye, az Erős Törvényt külön bizonyítjuk.

3.4. Következmény (A részecskeáram kezdeti konfigurációtól való függése). *A mikroszkopikus konkavitás feltételeinek fennállása esetén, minden $V \in \mathbb{R}$ és $\alpha > 1/3$ -ra az alábbi L^2 értelemben vett határérték teljesül a ϱ sűrűségű stacionárius folyamatra:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_{\lfloor Vt \rfloor}(t) - h_{\lfloor Vt \rfloor - \lfloor V^{\varrho}t \rfloor}(0) - t(\mathcal{H}(\varrho) - \varrho \mathcal{H}'(\varrho))}{t^{\alpha}} = 0. \quad (3.9)$$

A (3.9) Következményben található limesz azt mutatja meg, hogy $t^{1/2}$ -es (diffúzív) skálázás esetén, csak az kezdeti konfiguráció fluktuációi láthatóak: ezeket a fluktuációk mereven, V^{ϱ} sebességgel tolja el a rendszer. (Vagyis, minden térbeli fluktuáció, mely nem az eredeti konfigurációból származik, kisebb nagyságrendű mint $t^{1/2}$, sőt, $t^{1/3+\varepsilon}$.)

Az (3.9) egyenlőség bizonyítása arra épül, hogy $h_{\lfloor Vt \rfloor}(t) - h_{\lfloor Vt \rfloor - \lfloor V^{\varrho}t \rfloor}(0)$ -t eltoljuk $h_{\lfloor V^{\varrho}t \rfloor}(t) - h_0(0) = h_{\lfloor V^{\varrho}t \rfloor}(t)$ -ba, majd a 3.2 Következményt alkalmazzuk. (3.9) és abból, hogy kezdeti $\{\omega_i\}$ -k független azonos eloszlásúak, következik a szórás határértéke és a Centrális Határeloszlás Tétel (CLT) is, amely az utolsó következményünk. Az állításban \tilde{X} az X valószínűségi változó centrálását jelöli.

3.5. Következmény (A részecskeáram Centrális Határeloszlás Tétele). *A mikroszkopikus konkavitás feltételeinek fennállása esetén, minden $V \in \mathbb{R}$ -re a ϱ sűrűségű stacionárius folyamatban*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{Var}^{\varrho}(h_{\lfloor Vt \rfloor}(t))}{t} = \mathbf{Var}^{\varrho}(\omega) \cdot |V^{\varrho} - V| =: D, \quad (3.10)$$

és a Centrális Határeloszlás Tétel szintén teljesül: a centrált és normalizált részecskeáram $\tilde{h}_{\lfloor Vt \rfloor}(t)/\sqrt{t \cdot D}$ eloszlásban standard normálisshoz konvergál.

Az ASEP-re vonatkozóan a CLT-t, a szórás limeszére (3.10) és a kezdeti fluktuációkra diffúzív skálán történő megjelenésére vonatkozó tételeket P. A. Ferrari és L. R. G. Fontes [32] bizonyította. A konvex rátájú zero range és kőművesfolyamatokra a 3.5. Következményt pedig Balázs [6].

3.4. Három példa, melyre a mikroszkopikus konkavitás fennáll

Jelenleg három különböző modelleszaládra ismerjük/bizonyítottuk a 3.1. Tétel feltételrendszerét

Aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Az aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamatot (ASEP) F. Spitzer [58] vezette be: legyen $\omega^{\min} = 0$, $\omega^{\max} = 1$, a rátafüggvények pedig

$$p(y, z) = p \cdot \mathbf{1}\{y = 1, z = 0\} \quad \text{and} \quad q(y, z) = q \cdot \mathbf{1}\{y = 0, z = 1\}.$$

Ebben a modellben $\omega_i \in \{0, 1\}$ jelöli, hogy az i koordinátán található-e részecske, $p(\omega_i, \omega_{i+1})$ a részecskének az i . csúcsról az $i + 1$ -re, $q(\omega_i, \omega_{i+1})$ az $i + 1$ csúcsról az i -re történő ugrási rátája. Ezek a ráták rendre p és q értékűek, amennyiben van részecske a kiinduló csúcson, aki ugorni tud és nincs részecske az érkezési csúcson. Legyen $p > q$, vagyis a részecskék általában jobban szeretnek jobbra haladni. Az invariáns szorzatmérték μ^ϱ egyszerű Bernoulli eloszlás $0 \leq \varrho \leq 1$ közti paraméterrel. A hidrodinamikai fluxusfüggvény szigorúan konkáv: $\mathcal{H}(\varrho) = (p - q)\varrho(1 - \varrho)$.

Balázs és Seppäläinen adta az ASEP-re vonatkozó első bizonyítását a 3.1. Tételnek [16]-ban. A jelenlegi bizonyítás ebből a bizonyításból fejlődött.

Teljesen aszimmetrikus zero range folyamat, exponenciálisan lecsengő ugrásirata-növekményekkel

A teljesen aszimmetrikus zero range folyamat (TAZRP), $\omega^{\min} = 0$, $\omega^{\max} = \infty$, és egy részecske az i csúcsról az $i + 1$ -re $f(\omega_i)$ rátával ugrik, valamint csak jobbra ugrások vannak ($p = 1 - q = 1$). Az ugrási rátafüggvény $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nemcsökkenő, $f(0) = 0$, valamint $f(z) > 0, z > 0$ esetén. Továbbá, legyen f konkáv. Ismét, ω_i az i . csúcson található részecskeszámot jelenti. Ettől a számtól függően, egy részecske ugrik az i . csúcsról eggyel jobbra $pf(\omega_i)$ rátával, $qf(\omega_i)$ rátával pedig balra.

Először megmutatjuk, hogy a másodosztályú részecskék rendezése ebben az esetben minden konkáv, nemcsökkenő f rátafüggvényre elérhető. Így, csak az egyetlen másodosztályú részecskére vonatkozó eloszlásbeli lecsengési korlát hiányzik. Ehhez azonban egyelőre egy erősebb feltevésre van szükségünk, mégpedig

3.6. Feltevés. Legyen $p = 1 - q = 1$. Tegyük fel, hogy a TAZRP ugrási rátájának f rátafüggvényére az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. $f(0) = 0 < f(1)$ és f nemcsökkenő: $f(z + 1) \geq f(z)$,
2. f konkáv, exponenciálisan csökkenő növekményekkel: létezik $0 < r < 1$, hogy minden $z \geq 1$ -re amelyre $f(z) - f(z - 1) > 0$,

$$\frac{f(z + 1) - f(z)}{f(z) - f(z - 1)} \leq r. \quad (3.11)$$

Az eset, amikor f valamely z_0 felett konstanssá válik, szintén ide tartozik.

Egy példa, melyre a 3.6 fennáll (a konstans rátán kívül)

$$f(z) = 1 - \exp(-\beta z^\vartheta), \quad \beta > 0, \vartheta \geq 1.$$

Teljesen Aszimmetrikus Exponenciális Kőművesfolyamat.

Legyen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nemcsökkenő és $f(z) \cdot f(1-z) = 1$ minden $z \in \mathbb{Z}$. A folyamat ugrási rátái legyenek

$$p(y, z) = pf(y) + pf(-z) \quad \text{and} \quad q(y, z) = qf(-y) + qf(z).$$

A kőművesfolyamat elnevezést az alábbi kép motiválja: minden i csúcson felett áll egy kőműves, aki a tőle balra lévő téglaszlopra $pf(-\omega_i)$, a tőle jobbra lévő oszlopra pedig $pf(\omega_i)$ rátával téglát pakol. Ugyanakkor, minden kőműves $qf(\omega_i)$ és $qf(-\omega_i)$ rátával leszed egy téglát a tőle balra illetve jobbra található oszlopokról. A teljesen aszimmetrikus *exponenciális* kőműves folyamatot úgy kapjuk, ha (TAEBLP) $p = 1 - q = 1$ és

$$f(z) = e^{\beta(z-1/2)}. \tag{3.12}$$

A rátáfüggvény növekményei ez esetben nemkorlátosak, ezért a másodosztályú részecske ugrási rátáit nem lehet egyszerű aszimmetrikus bolyongással dominálni. Ezért, a nehézség a $Q(t)$ pozíciójára vonatkozó lecsengésbeli korlát. A bizonyítás kulcsa [8, 1. Tétel].

Hivatkozások

- [1] David Aldous. Random walks on finite groups and rapidly mixing markov chains. In *Séminaire de Probabilités XVII 1981/82*, volume 986 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 243–297. Springer Berlin / Heidelberg, 1983.
- [2] David Aldous and James Allen Fill. *Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs*. University of California, Berkeley, 2002.
- [3] David J. Aldous. Some inequalities for reversible markov chains. *s2-25(3):564–576*, 1982.
- [4] E. D. Andjel. Invariant measures for the zero range processes. *Ann. Probab.*, 10(3):525–547, 1982.
- [5] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4):1119–1178, 1999.
- [6] M. Balázs. Growth fluctuations in a class of deposition models. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 39(4):639–685, 2003.

- [7] M. Balázs, E. Cator, and T. Seppäläinen. Cube root fluctuations for the corner growth model associated to the exclusion process. *Electron. J. Probab.*, 11:no. 42, 1094–1132 (electronic), 2006.
- [8] M. Balázs, Gy. Farkas, P. Kovács, and A. Rákos. Random walk of second class particles in product shock measures. *J. Stat. Phys.*, 139(2):252–279, 2010.
- [9] M. Balázs and J. Komjáthy. Order of current variance and diffusivity in the rate one totally asymmetric zero range process. *J. Stat. Phys.*, 133(1):59–78, 2008.
- [10] M. Balázs, J. Komjáthy, and T. Seppäläinen. Fluctuation bounds in the exponential bricklayers process. *Journal of Statistical Physics*, 147(1):35–62, 2012.
- [11] M. Balázs, J. Komjáthy, and T. Seppäläinen. Microscopic concavity and fluctuation bounds in a class of deposition processes. *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, 48(1):151–187, 2012.
- [12] M. Balázs, F. Rassoul-Agha, and T. Seppäläinen. The random average process and random walk in a space-time random environment in one dimension. *Comm. Math. Phys.*, 266(2):499–545, 2006.
- [13] M. Balázs, F. Rassoul-Agha, T. Seppäläinen, and S. Sethuraman. Existence of the zero range process and a deposition model with superlinear growth rates. *Ann. Probab.*, 35(4):1201–1249, 2007.
- [14] M. Balázs and T. Seppäläinen. Exact connections between current fluctuations and the second class particle in a class of deposition models. *J. Stat. Phys.*, 127(2):431–455, 2007.
- [15] M. Balázs and T. Seppäläinen. Fluctuation bounds for the asymmetric simple exclusion process. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, VI:1–24, 2009.
- [16] M. Balázs and T. Seppäläinen. Order of current variance and diffusivity in the asymmetric simple exclusion process. *Ann. of Math.*, 171(2):1237–1265, 2010.
- [17] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [18] A. L. Barabási, E. Ravasz, and T. Vicsek. Deterministic scale-free networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(3-4):559 – 564, 2001.

- [19] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [20] B. Bollobás. *Random Graphs*. Cambridge University Press, 2001.
- [21] B. Bollobás and O. Riordan. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, 24(1):5–34, 2004.
- [22] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, and G. Tusnády. The degree sequence of a scalefree random graph process. *Random Structures Algorithms*, 18(3):279–290, 2001.
- [23] Béla Bollobás, Svante Janson, and Oliver Riordan. The phase transition in inhomogeneous random graphs. *Random Struct. Algorithms*, 31(1):3–122, August 2007.
- [24] E. Cator and P. Groeneboom. Second class particles and cube root asymptotics for Hammersley’s process. *Ann. Probab.*, 34(4):1273–1295, 2006.
- [25] D. Champernowne. A model for income distribution. *Economic Journal*, 63:318–351, 1953.
- [26] C. Coccozza-Thivent. Processus des misanthropes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 70(4):509–523, 1985.
- [27] Persi Diaconis and Svante Janson. Graph limits and exchangeable random graphs. *Rendiconti di Matematica (7)*, 28:33–61, 2008.
- [28] J. Ding, Y. Peres, and J. R. Lee. Cover times, blanket times, and majorizing measures. *Annals of Mathematics*, 175(3):1409–1471, 2012.
- [29] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1275–1335, Oct 2008.
- [30] D. Dürr, S. Goldstein, and J. Lebowitz. Asymptotics of particle trajectories in infinite one-dimensional systems with collisions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 38(5):573–597, 1985.
- [31] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, pages 17–61, 1960.
- [32] P. A. Ferrari and L. R. G. Fontes. Current fluctuations for the asymmetric simple exclusion process. *Ann. Probab.*, 22(2):820–832, 1994.
- [33] P. A. Ferrari and L. R. G. Fontes. Fluctuations of a surface submitted to a random average process. *Electron. J. Probab.*, 3:no. 6, 34 pp. (electronic), 1998.

- [34] P. L. Ferrari and H. Spohn. Scaling limit for the space-time covariance of the stationary totally asymmetric simple exclusion process. *Comm. Math. Phys.*, 265(1):1–44, 2006.
- [35] James Fill and Jr. Clyde Schoolfield. Mixing times for markov chains on wreath products and related homogeneous spaces. *Electron. J. Probab.*, 6:no. 11, 1–22, 2001.
- [36] E. N. Gilbert. Random graphs. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30(4):pp. 1141–1144, 1959.
- [37] Remco Van Der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*. 2010.
- [38] S. Jung, S. Kim, and B. Kahng. Geometric fractal growth model for scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 65:056101, Apr 2002.
- [39] J. Komjáthy, J. Miller, and Y. Peres. Uniform mixing time for random walk on lamplighter graphs. <http://arxiv.org/pdf/1109.4281.pdf>, 2011.
- [40] Júlia Komjáthy and Yuval Peres. Mixing and relaxation time for random walk on wreath product graphs. <http://arxiv.org/abs/1208.5930>, 2012.
- [41] R. Kumar. Space-time current process for independent random walks in one dimension. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, IV:307–336, 2008.
- [42] Gregory F. Lawler. *Introduction to Stochastic Processes, Second Edition*. Chapman and Hall, CRC Probability Series, 2006.
- [43] D. Levin, Y. Peres, and E. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2008.
- [44] Nathan Levy. Mixing time for lamplighter graphs. Master’s thesis, University of California, Berkeley, 2006.
- [45] T. M. Liggett. An infinite particle system with zero range interactions. *Ann. Probab.*, 1:240–253, 1973.
- [46] T. M. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [47] László Lovász and Balázs Szegedy. Limits of dense graph sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(6):933 – 957, 2006.

- [48] László Lovász and Peter Winkler. Efficient stopping rules for markov chains. In *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '95, pages 76–82, New York, NY, USA, 1995. ACM.
- [49] László Lovász and Peter Winkler. Mixing times. *AMS DIMACS SERIES*, 41:189–204, 1998.
- [50] R. I. Oliveira. Mixing and hitting times for finite markov chains. <http://front.math.ucdavis.edu/1108.1708>.
- [51] Igor Pak. *Random Walks on Groups: Strong Uniform Time Approach*. PhD thesis, Harvard University, 1997.
- [52] Y. Peres and D. Revelle. Mixing times for random walks on finite lamplighter groups. *Electronic Journal of Probability*, 9:825–845, 2004.
- [53] Y. Peres and P. Sousi. Mixing times are hitting times of large sets. <http://arxiv.org/abs/1108.0133>.
- [54] Erzsébet Ravasz and Albert-László Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Phys. Rev. E*, 67:026112, Feb 2003.
- [55] T. Seppäläinen. Second-order fluctuations and current across characteristic for a one-dimensional growth model of independent random walks. *Ann. Probab.*, 33(2):759–797, 2005.
- [56] Herbert A. Simon. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, 42(3–4):425–440, 1955.
- [57] R.J. Solomonoff and A. Rapoport. Connectivity of random nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 13(2):107–117, 1951.
- [58] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Math.*, 5:246–290 (1970), 1970.
- [59] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world/' networks. *Nature*, 393(6684):440–442, June 1998.
- [60] Udny G. Yule. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of dr. j. c. willis, f.r.s. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Containing Papers of a Biological Character.*, 213:21–87, 1925.
- [61] Zhongzhi Zhang, Francesc Comellas, Guillaume Fertin, and Lili Rong. High dimensional apollonian networks, 2005.