



\bookfoldsheets-4

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
„Kandó Kálmán” Gépészeti Tudományok Doktori Iskola

A kezdeti nyomtérk gradiens hatása vékonyfalú szerkezetek rezgéseire és dinamikus stabilitására

Abbas Talimian

PhD jelölt

Témavezető:

Prof. Dr. Vörös Gábor

egyetemi tanár, az MTA doktora

BUDAPEST

Tartalomjegyzék

BEVEZETÉS _____	3
STATE OF ART _____	4
MEGFORMULÁZÁS _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
STABILITÁS FOGALOM _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
ELŐZETES EGYENLETEK _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
MODÁLIS ANALÍZIS _____	12
FREVENCIÁK _____	14
KRITIKUS KIHAJLÁS _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
GERJESZTETT REZGÉS _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
STABILITÁS ELEMZÉS _____	16
CSILLAPÍTATLAN ESET _____	17
CSILLAPÍTOTT ESET _____	17
ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
FELTÉTELEZÉSEK _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
CSATOLT FREKVENCIÁK ÉS KRITIKUS KIHAJLÁSI NYOMATÉK _____	18
<i>I. Tézis</i> _____	19
CSILLAPÍTOTT CSATOLT FREKVENCIÁK ÉS KRITIKUS KIHAJLÁSI NYOMATÉK _____	20
<i>II. Tézis</i> _____	20
DINAMIKAI STABILITÁS ELEMZÉS (CSILLAPÍTATLAN) _____	21
<i>III. Tézis</i> _____	22
DINAMIKAI STABILITÁS ELEMZÉS (CSILLAPÍTOTT) _____	23
<i>IV. Tézis</i> _____	23
AZ EREDMÉNYEK HASZNOSÍTÁSA _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.
HIVATKOZÁSOK _____	HIBA! A KÖNYVJELZŐ NEM LÉTEZIK.

walled structures, vol. 47, pp. 382-390, 2009.

- [20] G. M. Vörös, "On coupled bending-torsional vibrations of beams with initial loads," *Mechanics Research Communications*, vol. 36, pp. 603-611, 2009.
- [21] W. Chau xie, *Dynamic stability of structures*, New York: Cambridge University Press, 2011.
- [22] V. Z. Vlasov, *Thin-walled elastic beams*, Washington: National Science Foundation, 1961.
- [23] J. E. Brown, J. M. Hutt and A. E. Salama, "Finite element solution to dynamic stability of bars," *AIAA*, vol. 6, pp. 1423-1425, 1968.
- [24] S. Ganguly and P. K. Datta, "Study of second regions of dynamic instability of a uniform beam," *International Journal of Mechanical Education*, vol. 32, no. 4, pp. 292-299.
- [25] A. Talimian and G. M. Vörös, "Coupled bendin-torsion vibrations of beams with initial moment," in *XI Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolc, 2011.
- [26] A. Talimian and G. M. Vörös, "On damped torsional bending coupled vibration of beams with initial moment," in *13th International conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies (VSDIA)*, Budapest, 2012.
- [27] A. Talimian and G. M. Vörös, "Dynamic stability regions of a beam subjected to non-uniform periodic bending moment," *Periodica Polytechnica, Civil engineering*, 2012 (reviewed).
- [28] A. Talimian and G. M. Vörös, "Dynamic stability regions of a beam subjected to non-uniform periodic bending moment with damping," *International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E)*, 2012.

Bevezetés

A mérnöki tudományban a szakemberek fontos kívánalma a szerkezetek stabilitása. Sok szerkezeti meghibásodás (akár statikus, akár dinamikus) következik be a strukturális instabilitás miatt. A terhelés jellege határozza meg a megoldandó probléma természetét. Szerkezeteket terhelheti statikus, dinamikus vagy akár sztochasztikus terhelés, azonban ebben a dolgozatban a dinamikus terhelte szerkezet kerül tárgyalásra (*Leipholz*, 1980) (*Roorda*, *Buckling of Elastic Structures*, 1980) (*Timoshenko & Gere*, 1961) (*Bazhenov, Dekhtyaryuk, Nemchinova, & Obrashevskaya*, 2008).

A matematikai szempontból egy dinamikus rendszer azon alapvető tulajdonságát, hogy a rendszer trajektóriáinak kvalitatív viselkedését nem befolyásolják a C^1 -kis perturbációk, strukturális stabilitásnak nevezik. Bár a stabilitás terén jól ismert elmélet a *Ljapunov* stabilitás, mégis mondjuk ki, hogy ez a stabilitásfogalom a rögzített rendszer kezdeti feltételei kis perturbációinak vizsgálatát tekinti.

A stabilitás említése vissza térít bennünket kétszáz évvel ezelőltre, mikor *Euler* fejében megfogant a stabilitás elemzés alapja a 18. század negyvenes éveiben. A rugalmas rúd kihajlására ő javasolt megoldást. A 19. század végéig számtalan feladat megoldására került sor, amelyek a lineárisan rugalmas esetekhez kapcsolódtak.

A strukturális stabilitásra vonatkozó gondolatokat a 1960-as években *Stephen Smale* és az ő hiperbolikus dinamikai iskolája csoportja vezette be, *Marston Morse* és *Hassler Whitney* dolgozott ki párhuzamosan elméletet a stabilitásra, amely egy kulcsfontosságú részét hozta létre a szingularitás elméletnek. Munkásságukat *René Thom* fejlesztette tovább.

A szerkezet stabilitása kérdéssé válhat, ha periodikus terhelés hat rá. 1893-ban *Ljapunov* dolgozott a dinamikus instabilitások viselkedésén, hogy kidolgozzon egy általános stabilitáselméletet. Ez azt jelenti, hogy egy szerkezet mozgása stabil lehet, ha a kezdeti feltételben belépő bármely lehetséges kis változásra, a válaszban csak kis változás jelentkezik (*Ljapunov*, 1893) [5].

Amikor egy szerkezet dinamikus terhelés(ek)et vesz fel, a rendszert *parametrikusan gerjesztett rendszernek* hívjuk. A paraméteres instabilitás problémái nem korlátozódnak az említett helyzetre. A nemlineáris dinamikai rendszereknek állandósult állapotú mozgásai is ebbe a problémakörbe sorolhatóak. A parametrikusan gerjesztett rendszerek elemzésében a fő cél az, hogy találjunk a paramétertérben olyan tartományokat, amelyekbe eső paraméterek esetén a rendszer instabil lesz. Az utóbbi tartományok *dinamikai instabilitás-tartományokként* ismertek.

A fentiekben jelzett problémák megoldásának kereséséhez széles körben numerikus módszerek (eljárások) kerültek javaslatba. Az egyik ilyen a numerikus módszerek közül, amit már alkalmaznak különféle típusú szerkezetek, pl. kör vagy téglalap alakú lemezek esetében és a jelen kutatási ismertetőben a *sorfejtés* módszere.

State of the Art

Gerendákat széles körben használják a tömegközlekedési eszközök szerkezeti elemeként, például autóbussz vázagnál, vasúti járműszerkezeteknél, stb. Ezek az elemek különböző típusú terheléseket hordoznak, azaz statikus és dinamikus terhelések szerepelhetnek. Statikus terhelés a szerkezet, a motor és az utasok súlyához köthető. A dinamikus terhelések, amelyek sokkal fontosabbak, mint az előző, a gerendákra működő külső gerjesztő hatás, mint pl. a forgó alkatrészek rázóereje, illetve a mozgáspálya egyenetlenségek hatása (*Szóke, Lógó, & Dániel*, Optimal suspension settings for ride comfort of road vehicles, 2012) (*Gobbi &*

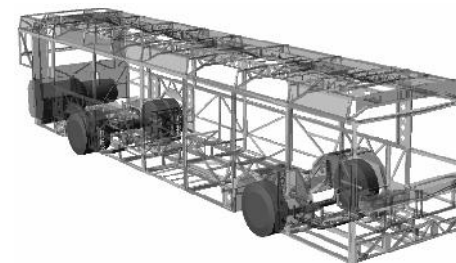
excitation," in *12th MINI Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*, Budapest, 2010.

- [11] h. Öztürk and m. Sabuncu, "Stability analysis of a cantilever composite beam," *Composites Science and Technology*, vol. 65, p. 1982–1995, 2005.
- [12] K. M. Liew, Y. G. Hu, T. Y. Ng and X. Zhao, "Dynamic stability of rotating cylindrical shells," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, p. 7553–7570, 2006.
- [13] T. H. Kumar and A. Mohammed, "Finite element analysis of dynamic stability of skeletal structures," *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, vol. 8, no. 2, pp. 245-256, 2007.
- [14] G. Sakar and M. Sabuncu, "Dynamic stability analysis of pretwisted aerofoil cross-section blade," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, pp. 1-13, 2008.
- [15] C. M. Sarvaia, S. P. Machado and V. H. Cortínez, "Free vibration and dynamic stability of rotating thin-walled composite beams," *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 30, pp. 432-441, 2011.
- [16] M. Sabuncu, H. Oztürk and S. Cimen, "OUT-OF-PLANE DYNAMIC STABILITY ANALYSIS OF CURVED BEAMS SUBJECTED," *International Applied Mechanics*, vol. 11, no. 46, pp. 1327-1337, 2011.
- [17] T.-. Z. Yang and B. Fang, "Stability in parametric resonance of an axially moving beam," *Arch Appl Mech*, vol. 82, p. 1763–1770, 2012.
- [18] G. M. Vörös, "Buckling and vibration of stiffened plates," *International Review of Mechanical Engineering*, vol. 1, no. 1, 2007.
- [19] G. M. Vörös, "Buckling and free vibration analysis of stiffened panels," *thin*

- [1] H. Leipholz, *Stability of Elastic Systems*, Netherlands: Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
- [2] J. Roorda, *Buckling of Elastic Structures*, Waterloo: Solid Mechanics Division, University of Waterloo Press, 1980.
- [3] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, Second ed., McGraw-Hill, 1961.
- [4] V. A. Bazhenov, E. S. Dekhtyaryuk, L. Y. Nemchinova and V. V. Obrashevskaya, "Stabilizing effect of stochastic vibrations on dynamic states," *Strength of Materials*, vol. 40, no. 2, pp. 269-274, 2008.
- [5] A. M. Liapunov, "Issledovanie odnogo iz ossobenykh sluchaev zadachi ob ustoychivosti dvizhenia," *Matem. Sbornik*, vol. 17, pp. 253-333, 1893.
- [6] D. Szőke, J. Lógó and B. M. Dániel, "Optimal suspension settings for ride comfort of road vehicles," *Periodica polytechnica-civil engineering*, vol. 54, no. 2, pp. 73-78, 2012.
- [7] M. Gobbi and G. Mastinu, "Analytical description and optimisation of the dynamic behaviour of passively suspended road vehicles," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 245, no. 3, pp. 457-481, 2001.
- [8] H. Nakamura, K. Nakano and M. Otori, "Vibration analysis of railway vehicles using independent component analysis," in *12th MINI Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*, Budapest, 2010.
- [9] A. Szabó, "Lateral dynamic and stability of a four-axle freight car equipped with a novel block brake system," in *12th MINI Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies*, Budapest, 2010.
- [10] D. Szőke and P. Székely, "Stress Characteristics of the vehicle structure as a function of the passenger model in the case of stochastic road irregularity

Mastinu, 2001) (Nakamura, Nakano, & Otori, 2010) (Szabó, 2010) (Szőke & Székely, Stress Characteristics of the vehicle structure as a function of the passenger model in the case of stochastic road irregularity excitation, 2010).

Sok gép és szerkezeti elem modellezhető, mint különböző geometriájú gerenda, például egyenes (konstans) keresztmetszetű, kúpos és elcsavart gerendaszerkezet. Ezeknek az összetevőkre az alkalmazásuktól függően különböző peremfeltételek lehetnek előírva.



1. ábra Busz vázszerkezet

Az utóbbi években több kutató a figyelmét a szerkezetek stabilitás zónáinak felkutatására fordította, mint a következők, akiket kiválasztottunk a tömegnyi irodalmi forrásból. Általában többen közülük a radiális, axiális és sztochasztikus terhelés esetére fordították figyelmüket, míg mások úgy döntöttek, hogy a különböző típusú anyagok, mint például a funkcionális anyagok kutatásával foglalkoznak.

Öztürk és Sabuncu 2005-ben egy rétegelt kompozit konzolos gerenda lineáris elmozdulás és torziós rugós megtámasztás melletti statikus és dinamikus stabilitásának kimutatásán dolgozott. A rúd periodikus axiális terhelésnek volt kitéve. Euler-gerendát, végeelemes módszert és a *Bolotin*

féle megközelítéshez kapcsolódó energia-kifejezéseket használták. A tanulmányban a gerjesztésre nézve több olyan frekvencia-tartományt találtak, amelybe eső gerjesztő frekvenciákra a rúd instabillá válik (Öztürh & Sabuncu, 2005) [11].

Liew et.al periodikus axiális erőt alkalmazott a forgó hengeres héjra és a Ritz módszer valamint a Bolotin első közelítésének a segítségével a dinamikus stabilitást vizsgálta. Mathieu-Hill egyenletet kapott, ezt Ritz energia minimalizálási eljárásra vezetve kezelte (Liew, Hu, Ng, & Zhao, 2006) [12].

Kumar és Mohammed 2007-ben a tengelyirányú periodikus terhelésnek kitett oszlopok és keretek dinamikai stabilitását tanulmányozta. Analízisükben végeelem módszert használtak, két csomópontos gerenda elemekkel. Stabilitás tartományokat határoztak meg az oszlopra a gerjesztő jel Fourier sorfejtésével. A diszkrét rendszer mozgásegyenleteinek közvetlen integrálását is alkalmazták. Newmark módszerrel ellenőrizték az eredményeket (Kumar & Mohammed, 2007) [13].

2008-ban Bazhenov et.al tanulmányozta a dinamikai állapotok stabilizálásának lehetőségét, amely megvalósulhat determinisztikus periodikus parametrikus terhelés esetén [4]. Sakar és Sabuncu 2008-ban publikálta kutatási eredményeit, amelyek végeelemes modell alkalmazásával foglalkoztak, elődeformált és forgó szárnyrács statikus és dinamikus stabilitás elemzésével (Sakar & Sabuncu, 2008) [14].

Saravia et.al vékony falú kompozit gerenda dinamikai stabilitással kapcsolatos viselkedésével foglalkozott 2011-ben. Végeelem módszert alkalmaztak a kutatásban. A vizsgálat alapjául Bolotin módszer szolgált, axiális periodikus terheléssel. Az instabilitási zónákat dimenzió nélküli alakban adták meg (Sarvaia, Machado, & Cortínez, 2011) [15].

Dinamikai Stabilitás Elemzés (Csillapított)

A csillapítás hatása a stabilitás tartományokra került tanulmányozásra a jelen kutatás utolsó részben. A megoldáshoz teljes periódusú trigonometrikus függvények sora került bevezetésre.

IV. Tézis

IV.a) A ζ Rayleigh csillapítási tényező növekedésével, az időfüggő nem egyenletes nyomtáknak kitett, csuklós megfogású gerenda stabilitása javul (Talimian & Vörös, Dynamic stability regions of a beam subjected to non-uniform periodic bending moment with damping, 2012).

IV.b) A Rayleigh csillapítási tényezőnek nincs hatása a λ statikus kihajlási nyomták százalékra, nem okozza a gerenda instabilitását. Nagyobb értékek a gerenda stabilitását csökkentik.

Az eredmények hasznosítása

A jelen kutatás mechanikai modellezés, matematikai és mérnöki számítások felhasználásával került végrehajtásra. Ezt követte a számítógépes programozás az egyenletek értékeléséhez. Az eredmények hasznosak lehetnek azon iparágakban, ahol szükséges a periodikus terheléssel számolni a termék tervezési folyamatában. Különösen, járműszerkezetekben, amelyek gerenda elemekkel kerülnek modellezésre (pl. hajók, vasúti járművek, autóbuszok és repülőgépek). A jelenlegi eredmények értékesek teherautó vázszerkezetek gyártói számára, repülőgépek, űrjárművek és szerszám gép vonatkozásában, az iparban dolgozó tervezők részére, hogy jobban megértsék az alkalmazott vagy felmerülő terhelés típusok hatását.

Hivatkozások

feltevést adó függvény (Ansatz) periodikus kezdeti terheléssel ellátott módosított egyenletbe való behelyettesítésével a két független sor került leszámraztatásra. Ezeket a sorokat szinuszos és koszinuszos tagokra lehet bontani, melyek lineárisan függetlenek. Amíg ezek a sorok végtelen számú tagot tartalmaznak, addig korlátozást kell tenni az optimális megoldás eléréséhez. A ψ nyomaték gradiens paraméter és a λ statikus kihajlási nyomaték százalék instabilitási tartományokra gyakorolt hatását lehetett kimutatni. Az ábrák egyszerűbbé tétele érdekében rajzoláshoz a μ frekvencia arány (a gerjesztő frekvencia és az első keresztirányú hajlító vagy torziós sajátfrekvencia, a gerenda hajlító vagy torziós módusaira vonatkozóan) került bevezetésre.

III. Tézis

- III.a) Több mint két tag szerepeltetésének a szinuszoidális alakú megoldást kereső kísérletező feltevés (Ansatz) függvényben nincs jelentős hatása az első közelítésű stabilitásvizsgálathoz tartozó első instabilitási tartományra (Talimian & Vörös, Dynamic stability regions of a beam subjected to non-uniform periodic bending moment, 2012 (reviewed)).
- III.b) A domináns hajlító módus kiválasztásával, az aszimmetrikus nyomaték esetére, a gerenda bármely μ frekvencia arány esetén stabil, amíg az első instabilitási zóna körül veszi fel értékét (Talimian & Vörös, Dynamic stability regions of a beam subjected to non-uniform periodic bending moment, 2012 (reviewed)).
- III.c) Instabil zónák jelentkeznek bármilyen nyomaték gradiens paraméter esetén, ha a dominánsnak a csavaró módust tekintjük.
- III.d) A λ statikus kihajlási nyomaték százalék növelése a kezdeti időfüggő nyomaték terhelésben a gerenda erősebb instabilitását okozza.

Sabancı és kollegái 2011-ben végeelem modellt használtak vékony keresztmetszetű íves rudak síkon kívüli stabilitás-elemzéshez, melyben a rudakat egyenletesen megoszló sugárirányú terhelés érte. Bolotin eljárását alkalmazták a dinamikai stabilitás elemzéséhez és elsőként beszéltek instabil tartományokról. Ebben a cikkben a síkon kívüli rezgés és kihajlás is megvitatásra került [16].

2012-ben Yang és Fang axiálisan mozgó különböző anyagú részekből összeállított gerenda stabilitását vizsgálták parametrikus rezonanciális állapotokban. Newton második törvényét és a tört rendszámú deriváltakat alkalmazták a Kelvin-féle alkotó-függvények keretében. Azt feltételezték, hogy az időfüggő axiális sebesség harmonikusan változik egy állandó középérték körül [17].

2007-ben Vörös hét szabadságfokú rendszert vezetett be a merevített lemezek kihajlása és rezgése során létrejövő vetemedés leírására [18]. 2009-ben a mindkét végén egyenletesen nyomatékkal terhelt rúd csavaró és hajlító kapcsolt vetemedésével foglalkozott [19]. A következő kérdések merültek fel: ha egy rúd kezdetben lineáris gradiens nyomatékkal terhelt a végein és vetemedés is fellép, mi történik a sajátfrekvenciákkal? Továbbá a szerkezet stabilitása hogyan változik?

Első lépésként egy vékony falú prizmatikus gerenda került vizsgálatra állandó keresztmetszettel, mint a témavezetőm legutóbbi cikkében [20]. Virtuális munka elvét használva a vetemedést is figyelembe véve három differenciálegyenlet adódik a folyamat leírására. Az egyik egyenlet a rúd lehajlását adja meg, ez nem csatolt. Ebben a kutatásban a másik két, csatolt egyenlet megoldása szerepel.

A jelen kutatást két részre lehet osztani. Az első részben az előbb említett kérdés megoldását keressük meg és meghatározzuk a kezdeti nyomaték

terhelés hatását, amikor az egyenletes és aszimmetrikus. Aztán felhasználva ezeket az értékeket és a *Mathieu-Hill* egyenletet segítségül hívva meg lehet határozni a stabilitás térképét. Összefoglalva, a kutatás második része a terhelés típus hatását mutatja meg az instabilitási határgörbékre.

A görbék megrajzolásához a *Maple* szoftver került használatra. Néhány vékony falú¹ keresztmetszet került kiválasztásra példaként. A görbék dimenzió nélküli illetve részben dimenzió nélküli formában lettek megadva az anyagtulajdonságoktól függetlenné tétel célját követve. Itt kell megjegyezni, hogy a megadott görbék gyakorlati alkalmazásakor az anyagtulajdonságokra vonatkozó korlátokat tekintetbe kell venni.

Gyors áttekintésként következő eljárás került megvalósításra a jelen kutatás a céljának megvalósításához:

- A gerenda csatolt hajlító-csavaró lengési frekvencia-viszonyainak megvitatása, ha gradiens nyomaték-terhelés hat rá.
- A *Reyleigh* csillapítás hatásának megadása a csatolt hajlító-torziós lengésekre, ha kezdeti gradiens nyomaték-terhelés is figyelembe van véve.
- A stabilitás térkép határgörbék megadása a gerendára parametrikus gradiens nyomaték gerjesztés esetére.

¹Nincs tiszta különbségtétel vékonyfalú és vastagfalú keresztmetszetek között, néha a $t/d < 0.1$ szabályt használják a vékonyfalúság megadására, ahol d a szelvényre jellemző valamely méret. A vékony falú gerendák keresztmetszetei két osztályba sorolhatók: a zárt és a nyitott keresztmetszetek osztályába. Tipikus zárt szelvények a kör, a négyzetes és téglalap-szelvényű csövek. Nyitott keresztmetszetek az I-gerendák, a T-gerendák, az L-gerendák, stb. A vékonyfalú gerendák hasznosak a mérnöki szerkezetekben, mert a hajlítási merevségük egységnyi keresztmetszeti felületre vonatkoztatva sokkal nagyobb, mint tömör keresztmetszetű rudaké. Ily módon merev szerkezet érhető el a lehető legkisebb súllyal.

tolódik (Talimian & Vörös, On damped torsional bending coupled vibration of beams with initial moment, 2012).

- II.c)** A μ_c kritikus állandósult állapotbeli nyomaték tényező μ_c^d –re lett módosítva, hogy a csillapítási tényező hatását is figyelembe vegyünk.
- II.d)** Frekvencia és kevert-mód arány eloszlás természete a ψ nyomaték gradiens paraméter függvényeként és a μ állandósult állapotbeli nyomaték terhelés tényezőként nem változott (Talimian & Vörös, On damped torsional bending coupled vibration of beams with initial moment, 2012). Azonban az amplitúdók csökkentek mind a domináló hajlító mind a torziós esetben.
- II.e)** A kevert mód arányszámok növekedtek a ζ csillapítási tényező növelésével, miközben a hajlító módus tekintetbe van véve [46]. Eközben ez az arányszám csökken a csillapítatlan esethez képest, ha a torziós módus a domináns mozgásforma.

Dinamikai stabilitás elemzés (csillapítatlan)

A gerendaszerkezet instabil tartományainak vizsgálata céljából a gerenda mátrixosan felírt mozgásegyenlete volt tekintetbe véve. Amennyiben a dinamikai stabilitás volt kiválasztva további elemzésre, a kezdeti nyomatékterhelést fel kell szorozni egy periodikus időfüggést mutató függvénnyel. Az utóbb említett egyenlet alakzat *Mathieu-Hill* egyenletként ismert. A jelen tanulmányban – a jelentőségük miatt - az első közelítésű stabilitásvizsgálathoz tartozó első instabilitás tartományok nyertek különös megvilágítást.

Ily módon a trigonometrikus függvény teljes periódussal került tekintetbe vételre, mint lehetséges megoldás. A megoldásra vonatkozó kísérletező

(Talimian & Vörös, Coupled bending-torsion vibrations of beams with initial moment, 2011).

- I.d)** Azok a keresztmetszeteknél amelyek dominálónan csavaró lengést végeznek, a csatolás bekövetkezik a nyomaték gradiens paraméter és a μ állandósult állapotbeli nyomatéki tényező bármely értéke esetén.

Csillapított csatolt frekvenciák és kritikus kihajlási nyomaték

Tárgyalásra került Rayleigh csillapítás hatása a szerkezet frekvenciáira és lengésképeire, a korábban a csillapítás-mentes esetre levezetett egyenletek módosítása céljából, hozzávéve csillapítási tagot a mátrix formulázású egyenlethez. Definiálva relatív csillapítási tényezőt, ennek segítségével dimenzió nélküli alakba írhatóak az egyenletek, ami kényelmesebb az eredmények összehasonlításához. A megoldás általánossága nem változott ezen értelmű átalakításnál. Exponenciális „Ansatz”-ot alkalmazva, mint matematikai transzformációt a csillapított és csillapítatlan eset között, felhasználva a modális analízist a sajátérték probléma megoldására, meghatározásra került a csillapított frekvencia és a kritikus nyomaték. Az utóbbi két kiadódott egyenletet behelyettesítve a karakterisztikus egyenletbe lehetővé vált a gerenda frekvenciájának és alak módusának vizsgálata, miközben a csillapítás is figyelembevételre került.

II. Tézis

- II.a)** A $C(\dots)$ nyomaték gradiens együttható $C(\dots)$ alakban tovább lett fejlesztve, figyelembe véve a csillapítási tényezőt [26].
- II.b)** A Rayleigh csillapítási tényezőt nagyobbra választva, a $C(\dots)$ csillapított nyomaték gradiens együttható is értékében felfelé

MEGFORMULÁZÁS

Stabilitás fogalom

A rendszert a (Chau xie, 2011) –szerint a következő jellemző egyenlettel vesszük figyelembe:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad f(0, t) = 0 \quad (1)$$

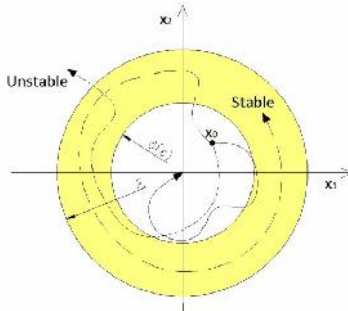
Itt x jelöli az állapotvektort és $f(0,t)$ jeleníti meg a kezdeti feltételt. A cél, hogy megtaláljuk az állandósult állapothoz tartozó megoldást, mikor is $\dot{x} = 0$. Ha feltesszük, hogy (1) egy lineáris rendszert jelenít meg, akkor a linearitás miatt az állandósult állapotot megadó megoldás egyértelmű. Amikor $\dot{x} = 0$, akkor látható, hogy az állandósult állapotok nem időfüggők, amíg gerjesztés nem működik. A Lyapunov elmélet értelmében, az (1) stabil megoldása a következő módon definiálható; ha $x(t; x_0)$ az (1) dinamikai rendszer megoldása, mely az $x(t)|_{t=0} = x_0$ kezdeti feltételnek tesz eleget, akkor a megoldás stabil lesz, ha adott $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\delta > 0$ hogy,

$$\|x(t; x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0, \quad \text{ha} \quad \|x_0\| < \delta(\varepsilon) \quad (2)$$

Itt meg kell említeni, hogy $\|\bullet\|$ egy megfelelő vektor norma az adott dinamikai rendszer számára.

A rendszert aszimptotikusan stabilnak hívjuk, ha

$$\|x(t; x_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{midőn} \quad t \rightarrow \infty. \quad (3)$$



2. Ábra Lyapunov stabilitás

Ha a rendszer x_0 kezdőállapota a $\delta(\varepsilon)$ tartományban van, és a következőkben az említett $x(t; x_0)$ megoldás az ε tartományon belül marad minden időpillanatban, akkor a rendszer *stabil*. Azonban ha az $x(t; x_0)$ a tér origójába tart növekvő időpontokban, azaz $t \rightarrow \infty$ esetén, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil. Amíg véges méretű a rendszerekről van szó, az összes norma egyenértékű. Ez azt jelenti, hogy ha az (1) rendszer stabil egy alkalmas apt normában, akkor minden más normában is stabil. Végtelen dimenziós rendszerekben a stabilitást egy megadott normában kell definiálni. Például egy rugalmas kontinuum esetén az alábbi energia norma megfelelő,

$$\|u\|^2 = \frac{1}{V} \int_V u u \, dV \quad \|\dot{u}\|^2 = \frac{1}{M} \int_V \dots \dot{u} \dot{u} \, dV \quad (4)$$

Itt $u(x, t)$ az elmozdulásmező és $\dot{u}(x, t)$ a sebességi mező. A továbbiakban ρ , V és M a sűrűség, a térfogat és a tömeg. Koiter szerint, a rugalmas kontinuum stabil ha adott ε és ε' -höz, létezik olyan $\delta(\varepsilon, \varepsilon')$ és $\delta'(\varepsilon, \varepsilon')$ amelyre ha

$$\|u\| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \|\dot{u}\| < \varepsilon' \quad \forall t > 0$$

akkor $\|u(x_0, 0)\| \leq u$ és $\|\dot{u}(x_0, 0)\| \leq u'$ (5)

jelenlétének hiányában. Az első keresztirányú hajlító lengés és első csavaró lengés frekvenciájának arányát tekintve, két elkülönült lengésmódot lehet definiálni a korábban említett feltételek szerinti gerendára. Ha ez az arány nagyobb egynél, akkor dominálón csavaró lengésről beszélünk, míg ha kisebb egynél, akkor dominálón hajlító-lengésről. A kritikus kihajlási nyomaték is meghatározásra került. A $C(\)$ nyomaték gradiens definiálásra került, mint az egyenletes terheléshez tartozó kihajlási nyomaték és a vizsgált most meghatározott kritikus kihajlási nyomaték hányadosa. Utolsó előtti lépésként a karakterisztikus egyenlet módosítva lett a saját-frekvenciák, a kritikus kihajlási nyomaték és a μ állandósult nyomaték tényező (amelyik megjeleníti a kritikus kihajlási nyomaték elemre való megosztását) segítségével, és gerjesztett rezgés elemzés került végrehajtásra.

I. Tézis

- I.a) Az Ritz-értelemben történő optimális együttható megválasztás két kifejezést ad a keresztirányú behajláshoz, és egy kifejezést ad a csavaráshoz. Magasabb tagoknak nincs jelentős hatásuk a $C(\)$ nyomaték gradiens együtthatóra, [25].
- I.b) Dominálón hajlító lengést tekintve, ha a rudat egyenletes nyomaték terheli, ez a szerkezet frekvenciái közötti csatolást okoz [25].
- I.c) Amikor aszimmetrikus nyomaték hat a rúdra, definiálásra került a μ_c kritikus állandósult állapotbeli nyomaték tényező. A frekvencia egyenlő az első keresztirányú hajlító lengés sajátfrekvenciájával egészen μ_c – ig és aztán csatolt lengés alakul ki a μ állandósult állapotbeli nyomatéki tényező egészen egységnyi értékig való növelésekor (a teljes terhelésig)

Új tudományos eredmények

Feltételezések

Vékony falú rúdmodell szimmetrikus keresztmetszettel (a nyírási középpont és a keresztmetszet középpontja egybeesik) került alkalmazásra⁴. Az alap feltételezések a következők: a gerenda egyenes és prizmatikus. A keresztmetszet nagysága állandó a hossz mentén, és merev a síkjában, de vetemedés léphet fel, elfordulások nagyok, alakváltozások kicsik, az anyag homogén, izotróp és lineárisan rugalmas. A rúd két végén villaszerű kényszerek kerültek alkalmazásra, amelyek megengedik a szabad vetemedést, de gátolják a csavarodó elfordulást.

Kezdeti koncentrált nyomatékok működtek a gerenda végpontjaira (elméletileg a felületekre, ahol geometriai határfeltételek voltak előírva) a legerősebb főtengelyre. A jelen szövegben, míg ezek a tengelyirányban működő nyomatékok megegyezők, a feltételt aszimmetrikus terhelésnek nevezzük. Másik esetként az egyenletes terhelés volt használva arra a szituációra, hogy ha a tengelyirányban működő végnyomatékok ellentett értelműek.

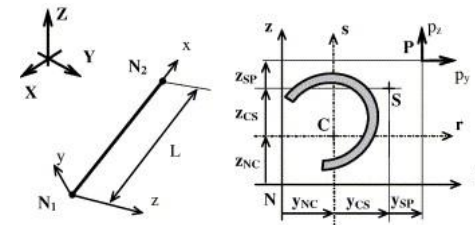
Csatolt frekvenciák és a kihajlás kritikus nyomatéka

Az egyenletrendszer Ritz-módszer és a potenciális energia elv segítségével került levezetésre, a növekmény-operátort alkalmazva. Ezen egyenletek kiadódott mátrixos alakja úgy ismert, mint a szerkezet mozgásegyenlet rendszere. A modális analízis technikáját alkalmazva a kiadódó sajátérték feladat megoldására a gerenda karakterisztikus egyenlete újból belépett, a gerenda sajátfrekvenciái meghatározásra kerültek a külső nyomatékok

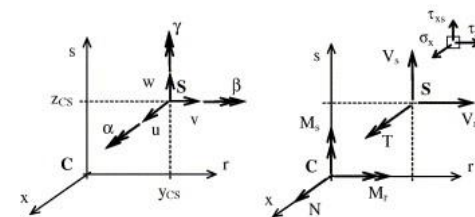
⁴ Ezen feltételezésnek megfelelően négy keresztmetszet két családba sorolva került bevezetésre (CS1, CS2, CS3 and CS4).

Előzetes egyenletek

A *Saint-Venant* szabad csavarás elméletével összhangban, a keresztmetszet nem marad sík és a pontjai szabadon mozoghatnak a rúd irányában és az elcsavarodás szöge lineárisan változik konstans rátával. A csavarási vetemedést belső vagy külső kényszerekkel megszorítva, csavarási ráta is változik a rúd hossza mentén. A gátolt csavarás vizsgálatát *Vlasov* fejlesztette ki [22]. A *Bernoulli-Vlasov* elmélet kerül használatra, a jelen kutatás fő célkitűzése miatt, ami a korlátozott csavaró hatás vizsgálata. A frissített Lagrange eljárásban (UL) a rendszer mennyiségei az utolsó ismert egyensúlyi konfigurációra hivatkoznak, amelyeket itt a kezdeti állapotoknak nevezünk. Ebben a munkában az alapvető feltevések a következők: a rúd egyenes és prizmatikus, a keresztmetszet a saját síkjában merev, de vetemedésre képes, az elfordulások nagyok, de a nyúlások kicsik, az anyag homogén, izotróp és lineárisan rugalmas. A kezdeti nyomaték a legerősebb tengelyre hat.



3. ábra A rúd elem, a lokális rendszerek és excentricitások



4. ábra A helyi elmozdulás paraméterek és feszültség eredők

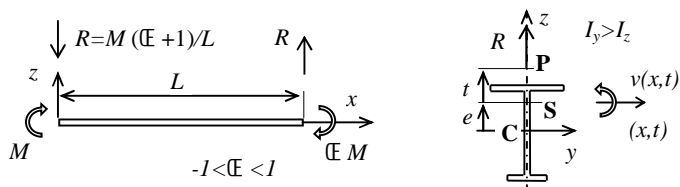
Linearizált virtuális munka - (6)-ban megfogalmazott - elvét használva a kezdeti feszültségnek kitett gerenda szerkezetre, a gerenda szerkezet mozgásegyenlete levezethető. A L , G_i és G_e jelölések a rugalmas alakváltozási munkát adják

meg tekintettel a kezdeti feszültségekre, valamint az excentrikus kezdeti terhelések másodrendű hatásait. A M mennyiség a tehetetlenségi erők virtuális munkája és W_a külső terhelések virtuális munkáját adja meg (Vörös, Buckling and free vibration analysis of stiffened panels, 2009), (Vörös, On coupled bending-torsional vibrations of beams with initial loads, 2009).

$$u [\Pi_L + \Pi_{G1} + \Pi_{G2} + \Pi_{Ge} - R] = 0 \quad (6)$$

Modális analízis

Ahogy korábban említésre került, az első feladat az egyenletek felírása után a különleges terhelési típusok hatásának vizsgálata (kezdeti gradiens nyomaték) a szerkezet frekvenciára és a kritikus kihajlási nyomatéokra.



5. ábra Elmozdulások, elfordulások és koordináta rendszer (minta keresztmetszet)

A Ritz módszer volt számításba véve a mono-szimmetrikus keresztmetszet $v(x,t)$ keresztirányú elmozdulásra és az $\alpha(x,t)$ csavarásra vonatkozó (7) szerinti próbafüggvényeinek definiálásakor, melyek kielégítik határfeltételeket a mindkét végén egyszerű megtámasztás esetén².

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n F_i(t) f_i(x) \quad , \quad \alpha(x,t) = \sum_{i=1}^m V_i(t) g_i(x) \quad (6)$$

Beírva (6)-et a **Hiba! A hivatkozási forrás nem található.**-ba további lehetséges egyszerűsítések után megkapjuk a gerenda mozgásegyenletet mátrixos alakban.

² A villaszerű megtámasztás kizárja a torziós elfordulást és megengedi a szabad vetemedést

Jelölje \underline{M} , \underline{S} és \underline{K}_e a tömeg, stabilitás és merevségi mátrixot, és legyen M a rúd végein működő kezdeti nyomaték, (lásd az 5. ábrát). Ezekkel:

Felhasználva (17)-at és (18)-et, és tekintetbe véve, hogy a trigonometrikus függvények lineárisan függetlenek a (18) megoldásához két különböző determináns egyenlet fejezhető ki a (19) figyelembe vételével, mely determinánsok zéróval kell, hogy egyenlők legyenek, hogy kiadódjanak a nem-triviális megoldások és így megkaphatóak legyenek az instabilitás határok.

$$\det \left(-\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \underline{M} + \underline{K}_e + M_{cr} \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \underline{S} \right) = 0 \quad (19)$$

Itt az ábrák készítéséhez egy dimenzió nélküli Ω paramétert kellett definiálni, ami a bemeneti frekvencia és az első hajlító vagy csavaró lengés frekvencia hányadosa. Visszatérve (18)-hoz világos, hogy csillapítás-mentes esetben a λ statikus kihajlási nyomaték százalék és a ψ gradiens nyomatéki faktor befolyásolja a szerkezet stabilitását az instabilitás görbék használatával, mely utóbbiakat szükséges volt figyelembe venni.

Csillapított eset

Az egyik és nem utolsó tényező, amely befolyásolja a stabilitási határ alakulását a csillapítási tényező. Itt egy pont, amelyet hivatkozni kell a (21) által megtalált stabilitás tartományokra vonatkozik.

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$a = -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \underline{M} + \underline{K}_e + M_{cr} \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \underline{S} \quad , \quad c = \Omega < \underline{M} \quad \dots(21)$$

$$b = -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \underline{M} + \underline{K}_e + M_{cr} \left\{ +\frac{1}{2} \right\} \underline{S}$$

keresztirányú hajlítási frekvenciával vagy az első csillapítatlan csavarási frekvenciával, megadja a frekvencia eloszlást a μ és λ terhelési paraméterek ellenében.

Stabilitás elemzés

A frekvenciák és a kritikus nyomaték megadása után a stabilitás térkép előállítása szükséges. A kutatás ezen szintjén csupán a dinamikai stabilitással foglalkozunk. Ez okból a kezdeti nyomaték helyett egy időfüggő nyomaték kerül bevezetésre:

$$M = M_{cr}(\lambda) + \lambda \cos(\Omega t) \quad (16)$$

Itt λ , a statikus kihajlási nyomaték százalék és κ a dinamikus érték. A λ és μ értékek zérus és egy között változnak. Az egyenlet így alakul:

$$\underline{M} \underline{\ddot{X}} + \underline{D}_a \underline{\dot{X}} + \left(\underline{K}_e + M_{cr}(\lambda) + \lambda \cos(\Omega t) \right) \underline{X} = 0 \quad (17)$$

Számtalan közelítő eljárás található az irodalomban, úgy, mint *Bolotin*-módszer, *Galerkin*-módszer, *Lyapunov* második módszere, *Krylov* aszimptotikus módszere és perturbációs valamint iteratív módszerek. Az egyik legtöbbet használt eljárás az, amikor periodikus függvény kerül alkalmazásra. A sok lehetséges periodikus időfüggvény közül a legtöbb kutató a szinuszoidális sorokat alkalmazza.

Csillapítatlan eset

A jelen tanulmányban *Brown* [23] cikke alapján egy időfüggő periodikus függvény kerül használatra 2T periodussal (első stabilitás tartomány). A javasolt periodikus közelítő megoldás (Ganguly & Datta) szerint:

$$\underline{X} = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) \quad (18)$$

³ μ az állandósult állapotú nyomaték terhelési tényező és λ a gradiens nyomaték tényező

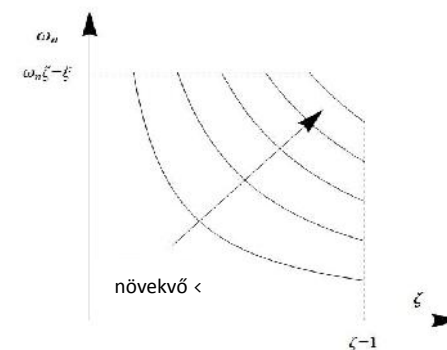
$$\underline{M} \underline{\ddot{X}} + \left(\underline{K}_e + M \underline{S} \right) \underline{X} = 0 \quad (7)$$

A megoldás általánosságának megszorítása nélkül a Rayleigh csillapítás a következő formában hozható be a (7) egyenletbe:

$$\underline{D}_a = 2 \zeta \underline{M} \quad (8)$$

Bevezetve a csillapítási arányt (relatív csillapítás) a következők szerint,

$$\zeta = \zeta' \xi \quad \text{és} \quad 0 < \zeta' < 1 \Rightarrow 0 < \zeta < \xi \quad (9)$$



3. ábra Frekvencia vs. csillapítás arány különböző csillapítási tényezők esetén

és alulcsillapított esetet feltételezve ($0 < \zeta < 1$), a kapcsolat a csillapítatlan és a csillapított megoldás között a következő matematikai transzformációval fejezhető ki:

$$\underline{X}(t) = e^{-\zeta t} \underline{q}(t) \quad (10)$$

Az 5. ábrán feltételezett gerendára a mozgásegyenlet végső formája a következő lesz:

$$\underline{M} \ddot{q}(t) + (-\kappa^2 \underline{M} + \underline{K}_e + M \underline{S}) q(t) = 0 \quad (11)$$

Frekvenciák

A frekvencia meghatározásához elegendő feltételezni, hogy a gerenda terheletlen (szabad rezgés lép fel). Ez azt jelenti, hogy az M kezdeti nyomaték (12)-ben zérus. Modális analízis módszerével meghatározhatók a sajátfrekvenciák. Összhangban a terhelés jellegével, minimális tagszám volt figyelembe véve a (7) szerinti próba-függvényekkel történő közelítésben. Ily módon két keresztirányú hajlító lengési és egy csavaró lengési frekvencia adódott ki a gerendára.

$$\begin{aligned} (\omega_{b1}^d)^2 &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI_z}{\rho A} - \xi^2, & (\omega_{b2}^d)^2 &= 16 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI_z}{\rho A} - \xi^2 \\ (\omega_{t1}^d)^2 &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{GJ}{\rho I_{ps}} \left[1 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{EI_\omega}{GJ} \right] - \xi^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Az anyagtulajdonságokat az E Young-modulusz, a G csúsztató rugalmassági modulusz és a ρ sűrűség jeleníti meg. A képletben A , I_z , I_{ps} és I_ω a keresztmetszeti felület területe, főmásodrendű nyomatéka, poláris másodrendű nyomatéka és a nyírási középpontra vett vetemedési állandója.

Az első hajlító lengés frekvenciáját elosztva az első csavaró lengésével világossá válik, hogy a hossz egy bizonyos értékéig a gerenda legkisebb sajátfrekvenciája a torziós lengéshez tartozik, majd a változik a helyzet és hajlító lengés lesz mérvadó csillapítás hiányában.

Kritikus kihajlás

Amíg a rúd rezgéseit nem vesszük figyelembe, addig a kihajláshoz tartozó kritikus nyomaték sajátérték feladat megoldásaként megkapható. Első lépésként a gradiens nyomaték tényező értéke -1 , ez az egyenletesen megoszló nyomaték terhelést adja. Ebben az esetben a kihajláshoz tartozó kritikus nyomaték M_{cr0}^d .

Az eljárás folytatásra került azon esetekre, amikor a gradiens nyomaték tényező nem volt korlátozva. Ebben az esetben az M_{cr}^d kritikus nyomatéokra általános képlet fejezhető ki. Az Eurocode 3-ban van egy fontos paraméter, a $C(\psi, \zeta)$ nyomaték gradiens együttható, ami megadja a most említett két nyomaték között a kapcsolatot:

$$(M_{cr}^d)^2 = C^2(\psi, \zeta) (M_{cr0}^d)^2. \quad (13)$$

Ez a csillapítatlan esetre van definiálva. Ebben a munkában adunk javított formulát, amikor a csillapítás is tekintetbe van véve.

Amíg a csillapítási tényező zérus (csillapítatlan eset), addig az egyenletes terhelésre vonatkozó M_{cr0} kritikus nyomaték megadható a csillapítatlan eset frekvenciáira támaszkodva²:

$$M_{cr0}^2 = \dots^2 AI_{ps} \left(\frac{L}{f}\right)^4 \check{S}_{b1}^2 \check{S}_{t1}^2 \quad (14)$$

Gerjesztett rezgés

A gerenda rezgésével is foglalkozni kellett, miközben azt kezdeti gradiens nyomaték terheli. Ily módon a külső nyomatékokat valahogy úgy kell definiálni, hogy változása (a szabad rezgés) a teljes terhelésig⁴ (kihajlás). Ezzel a bevezetéssel a külső nyomaték (16) szerint definiált, ahol μ az állandósult állapotbeli nyomaték terhelési tényező.

$$M = \mu M_{cr0}^d C_d, \quad C_d = C(\psi, \zeta) \quad (15)$$

Behelyettesítve (15)-öt (11)-be és felhasználva (12)-at, a szerkezet karakterisztikus egyenletéhez jutunk. Az utóbbi egyenletet dimenziótlanítása az első csillapítatlan

² =0 (12)-ban, ⁴ kihajlás