Lorentz folyamatok és néhány kapcsolódó modell aszimptotikus tulajdonságai

TÉZISFÜZET

Nándori Péter

Matematika Intézet,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető:
Szász Domokos
professzor

Bevezetés

A determinisztikus rendszerekben megjelenő kaotikus, „sztochasztikus” viselkedés mind az elméleti matematika, mind az alkalmazások szempontjából rendkívül érdekes kutatási téma. Alapvető fontosságú példa az ilyen rendszerekre a *Szinaj biliárd* - vagy ennek periodikus megfelelője, a *Lorentz folyamat*. A Szinaj biliárd definíciója a következő. Rögzítsünk néhány sima határú szigorúan konvex halmazt a d dimenziós tóruszon (jelölje ezeket $B_1, \dots B_k$), és gondoljunk ezekre a halmazokra úgy, mint szórótestek. A *biliárd folyam* egy pontszerű részecske mozgását írja le a szórótestek között: a részecske egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, amíg el nem éri valamelyik szórótestet, amikor is a mechanika klasszikus törvényei szerint visszaverődik. A részecske sebességének nagysága konstans egy, így a dinamika fázistere egy d dimenziós pozícióból, és egy egység hosszúságú vektorból áll (ez utóbbi $d-1$ dimenziós). A Lebesgue mérték természetesen invariáns mindkét koordinátában. Ha csak az ütközési időpontokat tekintjük (Poincaré szelés), akkor a *biliárd leképezést* kapjuk, ami nyilván ugyanazt a mozgást hivatott leírni. A biliárd leképezés fázisterének dimenziója tehát $2d-2$, a legegyszerűbb, síkbeli esetben ez történetesen két dimenzió.
A síkbeli Szinaj biliárdok elmélete rengeteget fejlődött az utóbbi évtizedekben (részletes leírást talál az olvasó itt: [6]). Az alapvető fontosságú ergodicitáson és hiperbolicitáson kívül a legfontosabb statisztikus tulajdonságok az exponenciális korreláció lecsengés és a centrális határeloszlás-tétel (CHT), vagy más szóval diffúzió. Egy $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mu)$ absztrakt dinamikai rendszerre az előbbi azt jelenti, hogy $\int f(g \circ \mathcal{F}^n) d\mu$ exponenciálisan kicsi n-ben, ha $\int f d\mu = \int g d\mu = 0$, továbbá f és g egy megfelelő függvényosztály tagjai (mely tartalmazza a szabad repülési vektort a biliárd leképezés esetén). Ezekkel a jelölésekkel a CHT azt jelenti, hogy $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f \circ \mathcal{F}^k$, mint μ-szerinti valószínűségi változó sorozat, gyengén konvergál egy normális eloszláshoz.
A CHT-t először [1]-ben igazolták Szinaj biliárdra (azaz Lorentz folyamatra). Mint kiderült, maga az állítás csak akkor igaz, ha a szabad repülés korlátos.

1. Definíció. *Egy Szinaj biliárd (vagy Lorentz folyamat)* véges horizontú*, ha a szabad repülési függvény korlátos. Ekvivalens módon* végtelen horizontú*, ha található olyan végtelen egyenes, amely diszjunkt az összes szórótest belsejéhez.*

1998-ban Young bevezette a torony módszert, [27], amivel be tudta bizonyítani a biliárd leképezés exponenciális korreláció lecsengését, és egyúttal a CHT-re adott egy új, egyszerűbb bizonyítást. A torony módszert Szász és Varjú alkalmazták a végtelen horizontú esetre [26]. A cikk tanulsága, hogy a végtelen horizont miatt a részecske viselkedése enyhén szuperdiffúzív, azaz az n ütközés utáni pozíció $\sqrt{n \log n}$ skálázás mellett konvergál Gauss eloszláshoz. Továbbá itt a határeloszlás-tétel lokális változatát is igazolták, melyet a véges

horizont esetén is beláttak [25]-ben.
Csernov és Dolgopjat tovább egyszerűsítették a CHT bizonyítását az úgynevezett „standard pár” módszerükkel. Ez a módszer rendkívül hasznosnak bizonyult más feladatokban is. A határeloszlás-tétel bizonyításán kívül (mind véges, mind végtelen horizont esetén [3, 4]), finomabb statisztikus tulajdonságokat is beláttak (pl. Brown mozgáshoz való konvergenciát, iterált logaritmus törvényt [3]), illetve egyéb, kapcsolódó modelleket is tárgyaltak (pl. olyan rendszert, ahol két mozgó részecske egymással is ütközik, [5], vagy külső teres biliárdokat). A módszer segítségével néhány valószínűségszámítási érvelést át lehetett emelni Szinaj biliárdokra. Dolgopjat, Szász és Varjú [9]-ben finom visszatérési tulajdonságokat igazoltak a véges horizontú periodikus Lorentz folyamatra. Ugyanezek a szerzők egy olyan véges horizontú modellre is igazolták a CHT-t ([10]), ahol a szórótest konfigurációt egy kompakt tartományon perturbálják, tehát egy nem periodikus modellre. Egy kapcsolódó sejtés a következő.

1. Sejtés. *Egy kompakt tartományon módosítsuk a végtelen horizontú periodikus Lorentz folyamat szórótest konfigurációját (a perturbáció is tegyen eleget a Szinaj biliárd alapfeltevéseinek). Ekkor a szuperdiffúzív határeloszlás-tétel érvényben marad.*

Az utóbbi években a periodikus Lorentz folyamat néhány más, nem homogén verzióját és elkezdték vizsgálni (lásd pl. [24]). Mint láthatjuk, a periodikus eset finom statisztikus tulajdonságai, illetve a nemperiodikus verziók alapvető tulajdonságai igen aktív kutatási területet képeznek, rengeteg izgalmas, nehéz kérdéssel. Néhány ilyen kérdést tárgyalunk a dolgozatban.
A dolgozat 2. és 3. fejezete a periodikus eset finom tulajdonságairól szól - elsősorban kapcsolódó, sztochasztikus modellekben (melyek motivációja a Lorentz folyamat jobb megértése). A 4. és 5. fejezetek bizonyos inhomogenitásokkal foglalkoznak (Lorentz folyamatokban, illetve egydimenziós tágító leképezések esetén). A 6. és 7. fejezetek kettő, illetve magasabb dimenziós végtelen horizontú periodikus Lorentz folyamatokról szólnak. A 3. és 7. fejezet további motivációja, hogy segítségükkel később esetleg tárgyalható lesz az 1. Sejtés is.
A dolgozat elsősorban négy megjelent folyóirat cikken [15, 16, 17, 18], és egy kéziraton [19] alapszik. A bevezetésen kívül 6 fejezetet tartalmaz. Az 5.,6. és 7. fejezetek (Szász Domokos témavezetőmön kívül) Varjú Tamással is közös munkákról számolnak be. Ezért helyénvalónak találtam ezen eredmények felét emelni ki a tézisfüzetbe: pontosabban az 5. fejezetet, és a 6. fejezet felét.

1. Belső állapotú bolyongások által meglátogatott pontok száma

Bolyongások esetén felmerülő érdekes kérdés, hogy a bolyongó hány pontot látogat meg n ideig, ha n nagy. A kérdéssel először Dvoretzky és Erdős foglalkoztak a sokat hivatkozott [11] cikkben. Itt sok kapcsolódó kérdést megválaszoltak egyszerű szimmetrikus bolyongásra. A dolgozat 2. fejezetében ugyanezeket a kérdéseket tárgyaljuk belső állapotó bolyongásokra (RWwIS). Ezekre a bolyongásokra érdemes úgy gondolni, mint a véges horizontú periodikus Lorentz folyamat sztochasztikus megfelelőire (lásd [23]). Speciálisan, ahol szükséges, feltesszük harmadik és negyedik momentumok végességét. Ugyanezeket a kérdéseket síkbeli periodikus Lorentz folyamtra Pène tárgyalta [20]-ban. A fejezet a [15] cikken alapul.

2. Definíció. *Legyen E véges halmaz. Ekkor a $H = \mathbb{Z}^d \times E$ $(d = 1, 2, ...)$ halmazon tekintett $\xi_n = (\eta_n, \varepsilon_n)$ Markov láncot belső állapotú bolyongásnak (RWwIS) nevezzük, ha $\forall x_n, x_{n+1} \in \mathbb{Z}^d, \quad j_n, j_{n+1} \in E$ esetén*

$$P(\xi_{n+1} = (x_{n+1}, j_{n+1}) | \xi_n = (x_n, j_n)) = p_{x_{n+1}-x_n, j_n, j_{n+1}}.$$

Néhány alapfeltevést teszünk, melyek a következők:

(i) A belső állapotok $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ...)$ Markov lánca irreducibilis és aperiodikus (stacionárius mértékét jelölje μ)

(ii) az aritmetika triviális ([13] jelölésével, $L = \mathbb{Z}^d$)

(iii) egy lépés várható értéke nulla, ha az ε_0 belső állapot eloszlása stacionárius (azaz μ)

(iv) A σ kovariancia mátrix (pontos definíciót lásd pl. [13]-ban) létezik és nem elfajult.

Legyen $L_d(n)$ a meglátogatott pontok száma n ideig, azaz

$$L_d(n) = |\{v \in \mathbb{Z}^d : \exists k \leq n, \eta_k = v\}|.$$

Jelölje $L_d(n)$ várható értékét $E_d(n)$, szórásnégyzetét pedig $V_d(n)$. A fő eredményeket a következőképp foglalhatjuk össze.

2. Tétel. *Bármilyen eloszlású ε_0 esetén*

$$\begin{aligned} E_3(n) &= n\gamma_3 + O(\sqrt{n}) \\ E_4(n) &= n\gamma_4 + O(\log n) \\ E_d(n) &= n\gamma_d + \beta_d + O(n^{2-d/2}) \quad \text{ha } d \geq 5 \\ V_d(n) &= O\left(n^{1+\frac{2}{d}}\right) \end{aligned}$$

valamely γ_d, β_d, csak a RWwIS paramétereitől függő konstansokkal.

3. Tétel. *$d \geq 3$ dimenziós RWwIS-re igaz a nagy számok erős törvénye, azaz*

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{L_d(n)}{E_d(n)} = 1\right) = 1.$$

4. Tétel. *Legyen $d = 2$. Ekkor bármilyen eloszlású ε_0 esetén*

$$E_2(n) = \frac{2\pi\sqrt{|\sigma|}n}{\log n} + O\left(\frac{n\log\log n}{\log^2 n}\right).$$

5. Tétel. *Bármilyen eloszlású ε_0 esetén*

$$V_2(n) = O\left(\frac{n^2\log\log n}{\log^3 n}\right),$$

ahol a konvergencia egyenletes a kezdő állapoton vett eloszlásokban.

6. Tétel. *$d = 2$ dimenziós RWwIS-re igaz a nagy számok erős törvénye, azaz*

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{L_2(n)}{E_2(n)} = 1\right) = 1.$$

7. Állítás. *Bármilyen eloszlású ε_0 esetén*

$$E_1(n) \sim \sqrt{\frac{8\,|\sigma|}{\pi}}n^{1/2}.$$

Hasonlóan az egyszerű szimmetrikus bolyongáshoz, a RWwIS is rekurrens 1 és 2 dimenzióban, magasabb dimenzióban viszont tranziens. A síkbeli rekurrencia azonban bizonyos értelemben gyenge, nagyon sokat kell várni, amíg a részecske visszatér az origóba. Emiatt a síkbeli eset tárgyalása lényegesen nehezebb a többi dimenziónál. Speciálisan a fenti eredmények igazolásához becsülni kell a RWwIS-re vonatkozó lokális határeloszlás-tétel hibatagját (a főtagot [13]-ben számolták ki). Ezért bizonyítunk néhány ilyen becslést, melyek esetleg önmagukban is érdekesek lehetnek. A tézisfüzetben csak egy ilyet említünk, a többi megtalálható a dolgozatban.

8. Tétel. *Egydimenziós RWwIS esetén, ha a megfelelően definiált harmadik momentum létezik, akkor*

$$\begin{aligned} P(\xi_n &= (x,k)|\xi_0 = (0,j)) - \\ &- \mu_k\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right)\left[1 - \frac{ir_3}{6}x\left(3\sigma^2 n - x^2\right)\frac{1}{\sigma^6}\frac{1}{n^2}\right] = o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

ahol a konvergencia egyenletes x-ben.

2. Egy súlyos farkú bolyongás visszatérési tulajdonságai

A dolgozat 3. fejezetében egy speciális, „súlyos farkú bolyongás” visszatérési tulajdonságaival fogalkozunk. A bolyongás lépéseinek eloszlása olyan, mint a végtelen horizontú periodikus Lorentz folyamaté. Pontosan azokat a visszatérési tulajdonságokat vizsgáljuk, melyeket Dolgopjat, Szász és Varjú tárgyaltak [9]-ben (és melyek hasznosnak bizonyultak a lokálisan perturbált véges horizontú Lorentz folyamat tárgyalásánál [10]-ben). Ezek a kérdések az origóba való visszatérés farokeloszlása, a lokális időre vonatkozó határeloszlás-tétel, és az origó első elérési idejének vizsgálata, amint a bolyongó messziről indul. Az alábbi eredmények némelyike analóg módon igazolható Lorentz folyamatra, némelyike azonban Lorentz folyamatra nyitott. A fejezet eredményei megjelentek a [16] cikkben.
Legyenek $X_1, X_2...$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre

$$\mathbb{P}\left(X_i = n\right) = c_1 |n|^{-3},$$

ha $n \neq 0$ és E_i egyenletes eloszlású $\mathbb{Z}^2$ négy egységvektorán. Legyen továbbá $\xi_i = X_i E_i$. (Itt nyilván $c_1 = \frac{1}{2\zeta(3)}$, de ez a konstans nem lesz fontos.) Definiáljuk a „súlyos farkú bolyongást”(HTRW) az $S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ formulával.
A fenti eloszlás olyan, mint a végtelen horizontú Lorentz folyamat szabad repülési vektoráé (lásd [26]). Az a feltétel, miszerint a bolyongó csak tengelyirányokba léphet, nem jelent lényeges megkötést, hiszen a Lorentz részecske is csak véges sok irányba léphet tetszőlegesen messzire (itt ez a véges sok irány történetesen a koordináta tengelyek iránya, azonban ez nem lényeges).
Definiáljuk továbbá az 1 dimenziós HTRW-ot:

$$Q_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

3. Definíció. *Legyen τ_2 az origóba való első visszatérés ideje 2 dimenzióban, azaz*

$$\tau_2 = \min\{n > 0 : S_n = (0,0)\}.$$

9. Tétel. $\mathbb{P}(\tau_2 > n) \sim \frac{4\pi c_1}{\log\log n}$.

10. Tétel. *Legyen $N_2^n = \#\{k \leq n : S_k = (0,0)\}$. Ekkor*

$$\frac{N_2^n}{\log\log n}$$

gyengén konvergál egy $\frac{1}{4\pi c_1}$ várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változóhoz.

4. Definíció. *Legyen t_v az origó első elérési ideje, feltéve, hogy a bolyongó $v \in \mathbb{Z}^2$ pontból indul, vagyis*

$$t_v = \min\{k \geq 0 : S_k = (0,0) | S_0 = v\}.$$

11. Tétel.

$$\frac{\log\log t_v}{\log\log |v|} \Rightarrow \frac{1}{U}$$

amint $|v| \to \infty$, ahol U egyenletes eloszlású $[0,1]$-en ($\Rightarrow$ pedig gyenge konvergenciát jelent).

5. Definíció. *Legyen τ_1 az origóba való első visszatérés ideje 1 dimenzióban, azaz*

$$\tau_1 = \min\{n > 0 : Q_n = 0\}.$$

12. Tétel. $\mathbb{P}(\tau_1 > n) \sim \frac{2\sqrt{c_1}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\log n}{n}}$.

13. Tétel. *Legyen $N_1^n = \#\{k \leq n : Q_k = 0\}$. Ekkor*

$$\frac{N_1^n \sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}$$

konvergál az $1/2$ és $(2\sqrt{c_1})^{-1}$ paraméterekkel definiált Mittag-Leffler eloszláshoz, azaz ahhoz az eloszláshoz, melynek k-adik momentuma

$$\frac{1}{(2\sqrt{c_1})^k} \frac{k!}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}.$$

Az első ilyen jellegű eredmények természetesen egyszerű szimmetrikus bolyongásra születtek ([12], [7]). A 11. Tétel bizonyításához (a 2. fejezethez hasonlóan) becsülni kell a lokális határeloszlás-tétel hibatagját. Ezért igazoljuk a következő tételt.

14. Tétel. *Egydimenziós HTRW-ra a következő becslés x-ben egyenletesen igaz:*

$$\mathbb{P}(Q_n = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2c_1}\sqrt{n\log n}} \exp\left(-\frac{x^2}{4c_1 n \log n}\right) = O\left(\frac{\log\log n}{\sqrt{n\log^3 n}}\right).$$

Kétdimenziós HTRW-ra a következő becslés $x \in \mathbb{Z}^2$-ben egyenletesen igaz:

$$\mathbb{P}(S_n = x) - \frac{1}{2\pi 2c_1 n \log n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4c_1 n \log n}\right) = O\left(\frac{\log\log n}{n\log^2 n}\right)$$

Végül kiterjesztjük a fejezet eredményeit olyan bolyongásokra, ahol az n hosszúságú lépés valószínűsége csak aszimptotikusan egyenlő c/n^3-vel.

3. Lorentz folyamat kvázi visszaverő fallal

Tekintsünk egy síkbeli véges horizontú periodikus Lorentz folyamatot, melyet megszorítunk egy végtelen vízszintes sávra. Ebben az esetben a pozíció vízszintes komponense, diffúzív skálázás esetén, konvergál az egydimenziós Brown mozgáshoz (a síkbeli állítás következményeként). Ha egy függőleges falat rakunk a nulladik cellába, akkor a trajektória a tükrözött Brown mozgáshoz tart, ha viszont egy fix méretű lyuk van a falon - amin így a részecske előbb-utóbb átjut-, akkor a limesz újra a Brown mozgás ([10]). A dolgozat 4. fejezetében (és a [17] cikkben) azt bizonyítjuk, hogy ha egy időben csökkenő méretű lyukat vágunk a falon, akkor a limesz az ún. kvázi tükrözött Brown mozgás, ami a Brown mozgás és a tükrözött Brown mozgás egy közös általánosítása. Érdekesség, hogy ez a folyamat Markov, de nem erősen Markov.
A következőkben formalizáljuk a feladatot. Legyen a fal nélküli konfigurációs tér $\mathcal{D} := (\mathbb{R} \times [0,1]) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} O_i$. Itt $\{O_i\}_i$ a $\mathbb{Z}$-periodikus kiterjesztett változata egy, a tóruszon értelmezett szórótest konfigurációnak, ahol a szórótestek szigorúan konvexek, diszjunktak, C^3 sima a határuk, és a görbületük alulról korlátos. Feltesszük továbbá, hogy $\cup_{i=1}^{\infty} O_i$ szimmetrikus az y tengelyre. A lyuk nélküli fal a $W_\infty = \{(x,y) \in \mathcal{D} | \, x = 0\} = \cup_{k=1}^{K} [\mathcal{J}_{k,l}, \mathcal{J}_{k,r}]$ halmaz, ahol $[\mathcal{J}_{k,l}, \mathcal{J}_{k,r}]$ az y tengely intervallumait jelöli, melyek W_∞ összefüggő részei.
A *lyukak* bizonyos $I_n \subset W_\infty$ részintervallumok lesznek, tehát falak egy $\{W_n = W_\infty \setminus I_n\}_n$ sorozatát tekintjük. A *biliárd folyam* n-edik konfigurációs tere tehát $\mathcal{D}_n := (\mathbb{R} \times [0,1]) \setminus (W_n \cup \cup_{i=1}^{\infty} O_i)$. Azaz egy pontszerű részecske repül egynes vonalú egyenletes mozgással $\mathcal{D}_n$ belsejében ($t = 0$ időpontban az első lyuk van a falon, tehát $n = 1$) amíg el nem éri a biliárdasztal határát, azaz a $\partial \mathcal{D}_n$ halmazt. Ekkor a mechanika klasszikus törvényei szerint visszaverődik (vagyis a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel), és szabadon repül tovább $\mathcal{D}_{n+1}$-ben. Más szóval minden ütközési időpontban lecseréljük a lyukat. Megemlítjük továbbá, hogy a sáv határán történő ütközések nem játszanak lényeges szerepet. Azaz ha a sáv határát periodikusan definiálnánk (formálisan $[0,1]$-et S^1-re cserélnénk $\mathcal{D}$ és $\mathcal{D}_n$ definíciójában), ugyanazt az eredményt kapnánk (egy másik szórással).
Mivel az ütközések pillanatában módosítjuk a konfigurációs teret, kézenfekvőbb a biliárd folyam szokásos Poincaré metszetét, a biliárd leképezést tekinteni. Definiáljuk tehát a biliárd leképezés *fázistereit*:

$$\mathcal{M}_n = \{x = (q,v), q \in \partial \mathcal{D}_n, v \in S^1, \langle v, u \rangle \geq 0 \text{ ha } q \in \partial \mathcal{D} \},$$

ahol u a $\partial \mathcal{D}$ halmaznak a $q \in \partial \mathcal{D}$ pontban vett „befelé" (azaz a konfigurációs tér felé) mutató egységvektora. Itt q jelöli a részecske ütközéskor vett pozícióját, v pedig az ütközés utáni sebességvektorát. Ha $q \in \partial \mathcal{D}$, v természetes módon paraméterezhető u és v szögével, ami a $[-\pi/2, \pi/2]$ intevallum eleme. Ha $q \in \partial W_n = W_n$, paraméterezzük v-t a vízszintes tengellyel bezárt szöggel.

Tehát ha ez a szög a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumban van, a részecske a fal jobb oldalán található, ha pedig a $[\pi/2, \pi]$ vagy a $(-\pi, -\pi/2]$ intervallumok valamelyikében, akkor a bal oldalon.
Tehát a biliárd folyamot leírhatjuk a következő *biliárd leképezésekkel* $\mathcal{F}_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$. Legyen továbbá $\kappa_n : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ az $\mathcal{M}_n$-ból $\mathcal{M}_{n+1}$-ba mutató *szabad repülési vektor* vízszintes vetülete (azaz ha $x = (q, v) \in \mathcal{M}_n$ és $\mathcal{F}_n(x) = (\tilde{q}, \tilde{v})$, akkor $\kappa_n(x)$ a $\tilde{q} - q$ vektor vízszintes vetülete). Feltesszük továbbá, hogy a szórótest konfiguráció véges horizontú. Legyen végül $\mathcal{I}_n = \{I_k\}_{1 \le k \le n}$ az első n lyuk halmaza, és

$$S_n(x, \mathcal{I}_n) = S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \kappa_k \mathcal{F}_{k-1} \dots \mathcal{F}_1(x),$$

ahol $x \in \mathcal{M}_1$.
Egyedül a lyukak (azaz I_n) definícióját kell még megadnunk. Legyen $\underline{\alpha} = (\alpha_n)_{n \ge 1}$, $\alpha_n \to 0$ egy fix sorozat, és válasszunk független, egyenletes eloszlású véletlen ξ_n, $n \ge 1$ pontokat a $\cup_{i=1}^{K} [\mathcal{J}_{i,l}, \mathcal{J}_{i,r}]$ halmazon. A következő három speciális esetet tekintjük:

1. Tegyük fel, hogy $\xi_n \in [\mathcal{J}_{i,l}, \mathcal{J}_{i,r}]$, és legyen $l_n = \mathcal{J}_{i,r} - \xi_n$. Ha $l_n > \alpha_n$, akkor legyen $I_n = (\xi_n, \xi_n + \alpha_n)$, egyébként $I_n = (\xi_n, \mathcal{J}_{i,r}) \cup (\mathcal{J}_{i,l}, \mathcal{J}_{i,l} + \alpha_n - l_n)$, ami W_∞ részhalmaza, ha n elég nagy. Vezessük be ezen speciális választással az
$$S_n^{\searrow}(x, \underline{\alpha}) = S_n^{\searrow}(x) = S_n(x, \mathcal{I}_n)$$
és a
$$\mathcal{F}_n^{\searrow} = \mathcal{F}_n$$
jelöléseket.

2. Minden $1 \le k \le n$-hoz válasszunk független $\xi_n^{(k)}$ valószínűségi változókat, melyek olyan eloszlásúak, mint ξ_n. Tegyük fel, hogy $\xi_n^{(k)} \in [\mathcal{J}_{i,l}, \mathcal{J}_{i,r}]$, és legyen $l_n^{(k)} = \mathcal{J}_{i,r} - \xi_n^{(k)}$. Ha $l_n^{(k)} > \alpha_n$, legyen $I_n^{(k)} = (\xi_n^{(k)}, \xi_n^{(k)} + \alpha_n)$, egyébként pedig $I_n^{(k)} = (\xi_n^{(k)}, \mathcal{J}_{i,r}) \cup (\mathcal{J}_{i,l}, \mathcal{J}_{i,l} + \alpha_n - l_n^{(k)})$, végül legyen $\mathcal{I}_n = (I_n^{(k)})_{1 \le k \le n}$. Vezessük be ezen speciális választással az
$$S_n^{\equiv}(x, \underline{\alpha}) = S_n^{\equiv}(x) = S_n(x, \mathcal{I}_n)$$
jelölést.

3. Legyen $I_n = W_\infty$. Vezessük be ezen speciális választással az
$$S_n^{(per)}(x) = S_n(x, \mathcal{I}_n)$$

jelölést, valamint fix x-re legyen $S_t^{(per)}(x)$, $t \geq 0$-ra a $S_n^{(per)}(x)$ függvény szakaszonként lineáris, folytonos kiterjesztése. Legyen végül

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(per)} &= \mathcal{F}_1,\\ \mathcal{M}^{(per)} &= \mathcal{M}_1.\end{aligned}$$

A fentiek közül az első választás (ami az egyetlen valóban időfüggő) a legérdekesebb. A második esetben minden n-re újra kell definiálnunk a $S_1^{\equiv}, \dots S_n^{\equiv}$ trajektóriát, tehát lényegében biliárdok egy sorozatával dolgozunk (más szóval $S_n^{\equiv}$ növekményei szériasorozatot alkotnak). A harmadik választás a szokásos periodikus Lorentz folyamat.
A természetes invariáns mérték a biliárd folyamra a *Liouville mérték*, melynek vetülete $\mathcal{M}^{(per)}$-ra invariáns mértéke $\mathcal{F}^{(per)}$-nak. Szorítsuk meg ezt a mértéket az origóval szomszédos két négyzetre, és normalizáljuk úgy, hogy valószínűségi mértéket kapjunk. Jelöljük ezt a mértéket $\mathbf{P}$-vel.
Végül legyen $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}^{(per)}$ az a részhalmaza a fal nélküli diszkrét fázistérnek, melyről a részecske a következő ütközés előtt átrepül az y tengelyen, azaz a $\cup_{i=1}^{K}(\mathcal{J}_{i,l}, \mathcal{J}_{i,r})$ halmazon. A véges horizont miatt $\mathcal{J}$ korlátos.

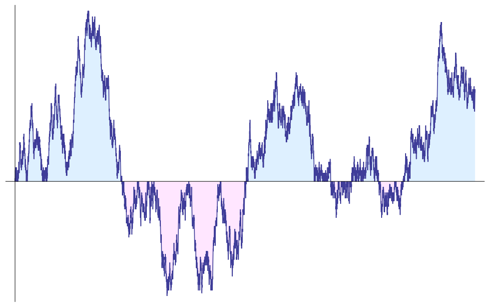
A következőkben definiáljuk a határfolyamatokat. Két nagyon hasonló folyamatot definiálunk, így mindkettőt kvázi tükrözött Brown mozgásnak nevezzük, és csak a rövidítésükben teszünk különbséget.
Legyen $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_t)_{t\in[0,1]}$ egy σ paraméterű Brown mozgás (BM) a $[0,1]$ intervallumon. Az origóban vett lokális idejét jelölje $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_t)_{t\in[0,1]}$. Azaz

$$\mathfrak{L}_t = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{|\mathfrak{B}_S|<\varepsilon\}} ds.$$

Feltéve, hogy adott $\mathfrak{B}$, tekintsünk egy Π Poisson pontfolyamatot, melynek intenzitásmértéke $cd\mathfrak{L}$, valamely c pozitív konstanssal. Ilyenkor egy valószínűséggel a $cd\mathfrak{L}$ mérték tartója $\mathfrak{Z} = \{s : 0 \leq s \leq 1 : \mathfrak{B}_s = 0\}$, a $\mathfrak{B}$ BM zérushalmaza. Jelölje Π pontjait csökkenő sorrendben $P_1, P_2, \ldots$ Valójában Π-nek véges sok pontja van. Ha m pontja van, akkor legyen $P_{m+1} = P_{m+2} = \ldots = 0$. Legyen továbbá $P_0 = 1$ és legyen η egy $1/2$ paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó, mely független $\mathfrak{B}$-től és Π-től.
Ekkor a $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_t)_{t\in[0,1]}$ folyamatot, melyre $\mathfrak{Q}_0 = 0$ és

$$\mathfrak{Q}_t = \begin{cases} (-1)^{\eta}|\mathfrak{B}_t| & \text{ha } \exists n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} : t \in (P_{2n+1}, P_{2n}] \\ (-1)^{1-\eta}|\mathfrak{B}_t| & \text{egyébként} \end{cases}$$

c és σ paraméterű kvázi tükrözött Brown mozgásnak nevezzük, és qRBM(c,σ)-val jelöljük (lásd az 1. ábrát).
A QRBM folyamat definíciója hasonló a qRBM folyamatéhoz. A különbség, hogy a $c(d\mathfrak{L})$ mértéket $c\frac{1}{\sqrt{t}}(d\mathfrak{L}_t)$-re kell cserélni. Ennek eredményeként a



1. ábra. qRBM

Poisson pontfolyamatnak végtelen sok pontja lesz, melyek csak a nullában torlódnak. Jelölje ezeket a pontokat csökkenő sorrendben $P_1, P_2, \ldots$ (n.b.: nincs közöttük legkisebb). Legyen $P_0 = 1$. Ezután definiáljuk η-t és QRBM(c,σ)-t, mint az előbb.

Mint általában, $C[0,1]$ jelöli a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények terét. Definiáljuk a $\mathbf{W}_n^{\searrow}$ függvényt az alábbi módon: $\mathbf{W}_n^{\searrow}(k/n) = S_k^{\searrow}/\sqrt{n}$ ha $0 \le k \le n$, és legyen $\mathbf{W}_n^{\searrow}(t)$, $t \in [0,1]$ az előző függvény szakaszonként lineáris, folytonos kiterjesztése. Jelölje $\mu_n^{\searrow}$ a $\mathbf{W}_n^{\searrow}$ által $C[0,1]$-en indukált mértéket, ahol a kezdeti eloszlás (azaz x eloszlása) $\mathbf{P}$. Hasonlóan definiáljuk a $\mu_n^{\equiv}$ mértéket $\mathbf{W}_n^{\equiv}$ segítségével, ahol $\mathbf{W}_n^{\equiv}(k/n) = S_k^{\equiv}/\sqrt{n}$.

Most megfogalmazzuk a 4. fejezet főeredményét.

15. Tétel. *Léteznek σ és c_2, csak a periodikus szórótest konfigurációtól függő pozitív konstansok, hogy*

1. *ha $\exists c > 0 : \alpha_n\sqrt{n} \to c$, akkor $\mu_n^{\searrow}$ gyengén konvergál a $QRBM(c_2c, \sigma)$ által generált mértékhez.*

2. *ha $\exists c > 0 : \alpha_n\sqrt{n} \to c$, akkor $\mu_n^{\equiv}$ gyengén konvergál a $qRBM(c_2c, \sigma)$ által generált mértékhez.*

3. *ha $\alpha_n\sqrt{n} \to 0$, akkor $\mu_n^{\searrow}$ és $\mu_n^{\equiv}$ gyengén konvergálnak a tükrözött Brown mozgás, és a negatív tükrözött Brown mozgás által generált mértékek átlagához.*

4. *ha $\alpha_n\sqrt{n} \to \infty$, akkor $\mu_n^{\searrow}$ és $\mu_n^{\equiv}$ gyengén konvergálnak a Wiener mértékhez.*

A bizonyítás legfontosabb eszköze a periodikus Lorentz folyamat lokális határeloszlás-tétele (melyet Szász és Varjú igazoltak [26]-ben). Ebben a fejezetben szintén belátjuk a globális határeloszlás-tétel egy kibővített változatát, ami önmagában is érdekes lehet. Legyen L_{nt} a fázistér egy kompakt részhalmazába tett látogatások száma az $[1, \lfloor nt \rfloor]$ időintervallumban (ezt a kompakt halmazt praktikusan $\mathcal{J}$-nek választjuk). Ekkor a következő állítás igaz.

16. Állítás.
$$\left(\frac{S_{nt}^{(per)}}{\sqrt{n}}, \frac{L_{nt}}{\sqrt{n}}\right)_{t\in[0,1]} \Rightarrow (\mathfrak{B}_t, c_0\mathfrak{L}_t)_{t\in[0,1]},$$

valamely $c_0 > 0$ konstanssal, amint $n \to \infty$, és a bal oldal egy valószínűségi változó a $\mathbf{P}$ mértékre nézve. Itt $\Rightarrow$ gyenge konvergenciát jelent a $D_{\mathbb{R}^2}[0,1]$ Szkorohod térben.

4. Nem autonóm dinamikák

Az 5. fejezetben egy, nem autonóm (időfüggő) dinamikai rendszerekre vonatkozó CHT-t bizonyítunk. Az eredmény jelen formájában csak egydimenziós dinamikákra alkalmazható, azonban az időbeli inhomogenitás meglehetősen általános. Ez utóbbi azt jelenti, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén leképezések egy fix sorozatát tekintjük (nem pedig leképezések tipikus sorozatait). A feltételek összefüggésben állnak az autonóm esetre vontkozó kohomológia feltétellel. Ez a fejezet a [18] cikk eredményeit tartalmazza.
Legyen A egy számhalmaz, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ pedig egy valószínűségi mező. Minden $a \in A$-ra tekintsünk egy $T_a : X \to X$ leképezést. Tegyük fel, hogy μ invariáns minden T_a-ra. Tekintsük A-beli számok egy $\underline{a} : \mathbb{N} \to A$ sorozatát. A célunk CHT-t bizonyítani a
$$f \circ T_{a_1}, f \circ T_{a_2} \circ T_{a_1}, ...$$
sorozatra, ahol $f : X \to \mathbb{R}$ valamilyen reguláris függvény.
Ahogy az szokásos, legyen
$$\hat{T}_a g(x) = g(T_a x)$$
és $\hat{T}^*$ a $\hat{T}$ operátor $L^2(\mu)$-adjungáltja (ez az úgynevezett Perron-Frobenius operátor). Vezessük be továbbá a következő jelölést:
$$\hat{T}_{[i..j]} = \begin{cases} \hat{T}_{a_i} \dots \hat{T}_{a_j} & \text{ha } i \le j \\ Id & \text{egyébként,} \end{cases}$$
és legyen $\hat{T}_{[j]} = \hat{T}_{[1..j]}$.
Hasonlóan, definiáljuk a következő operátorokat
$$\hat{T}^*_{[i..j]} = \begin{cases} \hat{T}^*_{a_j} \dots \hat{T}^*_{a_i} & \text{if } i \le j \\ Id & \text{egyébként,} \end{cases}$$
és legyen $\hat{T}^*_{[j]} = \hat{T}^*_{[1..j]}$.
Definiáljuk továbbá a következő σ-algebrákat: $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i = (T_{a_1})^{-1} \dots (T_{a_i})^{-1}\mathcal{F}_0$.
Feltétel lesz, hogy ezek a σ-algebrák csökkenő sorozatot alkossanak (vö. 17.

Tétel 2. feltevés), tehát csak nem invertálható leképezésekkel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy található $\mathcal{F}$-mérhető függvények egy $\mathcal{B}$ Banach tere, hogy $\|g\| := \|g\|_{\mathcal{B}} \geq \|g\|_\infty$ minden $g \in \mathcal{B}$-re.
Végül egy fix f függvényre legyen

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} \hat{T}^*_{[i+1..k]} f.$$

A fenti jelölésekkel a célunk határeloszlás-tétel bizonyítása az $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \hat{T}_{[k]} f(x)$ sorozatra.

17. Tétel. *Tegyük fel, hogy f, $\underline{a}$ és T_b, $b \in A$ teljesítik az alábbiakat.*

1. $\int f d\mu = 0$.
2. *T_b nem invertálható ráképezés minden $b \in A$-ra.*
3. *$f \in \mathcal{B}$ és létezik $K < \infty$, illetve $\tau < 1$, hogy minden $\underline{b}$ sorozatra és minden k-ra $\|\hat{T}^*_{b_1} ... \hat{T}^*_{b_k} f\| < K\tau^k \|f\|$.*
4. (akkumulált transzverzalitás) *Legyen χ_k az u_k függvény és a $(T_{a_{k+1}})^{-1}\mathcal{F}_0$-mérhető függvények altere közötti L^2-szög. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{N} \min_{j \in \{k,k+1\}} (1 - \cos^2(\chi_j))$$

   végtelenhez tart, amint $N \to \infty$.

A fenti feltételek teljesülése esetén

$$Var(S_n) \to \infty$$

és

$$\frac{S_n(x)}{\sqrt{Var(S_n)}}$$

gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, ahol x eloszlása μ.

A 3. feltevés bizonyos értelemben azt mondja, hogy az $\hat{T}^*_{a_j}$ operátoroknak spektrális résük van, mely elég természetes feltétel. A 4. feltevés azt garantálja, hogy S_n tagjai nem ejtik ki egymást, speciálisan f nem lehet a konstans nulla függvény kohomológia osztályában, ha $|A| = 1$.
Az alábbiakban két konkrét példát mutatunk, ahol a tétel feltételei teljesülnek.

18. Példa. *Legyen* $(X, \mathcal{F}, \mu) = (S^1,$ *Borel, Leb*$)$, $A = \{2, 3, \dots\}$, $T_a(x) = ax($ mod $1)$, $\mathcal{B} = C^1 = C^1(S^1)$,

$$\|g\| := \sup_{x \in S^1} |g(x)| + \sup_{x \in S^1} |g'(x)|.$$

Legyen $f \in C^1$ *egy nem konstans függvény, melyre* $\int f dx = 0$. *Ekkor található olyan* $L = L(f)$ *pozitív egész, hogy minden olyan* $\underline{a}$ *sorozatra, amelyre*

$$\#\{k : \min\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\} > L\} = \infty,$$

a 17. Tétel feltételei teljesülnek.

19. Példa. *Legyen* $X, \mathcal{F}, \mu, A, T_b, \mathcal{B}$ *mint a 18. Példában. Ha* $\underline{a}$ *egy olyan sorozat, melyhez található egy* $b \in A$ *azzal a tulajdonsággal, hogy minden* K*-ra létezik* k*, hogy*

$$a_k = a_{k+1} = ... = a_{k+K-1} = b,$$

továbbá $f \in \mathcal{B}$, $\int f = 0$ *olyan függvény, melyre az* $f = \hat{T}_b u - u$ *egyenletnek nincs megoldása* u*-ban, akkor a 17. Tétel feltételei teljesülnek.*

5. Dettmann Horizont Sejtéseiről

A dolgozat 6. fejezete $d \geq 3$ dimenziós végtelen horizontú Lorentz folyamatokról szól. Fontos megjegyezni, hogy a magas dimenziós eset sokkal nehezebb, mint a síkbeli. Véges horizont esetén is sokkal kevesebbet lehet precízen igazolni, mint a síkban (lásd [2]), a végtelen horizont esete azonban még bonyolultabb. Ahogy már korábban említettük, végtelen horizontnál a síkban a skálázás szuperdiffúzív. A magas dimenziós esetben az első lépés az lehet, hogy meghatározzuk a szabad repülési vektor eloszlásának aszimptotikus lecsengését. Ha ez ugyanolyan nagyságrendű, mint a síkban (azaz $\sim C/t$), akkor jogosan sejthetjük, hogy a szuperdiffúzív skálázás is azonos. Dettmann [8]-ban megfogalmazott sejtéseket, melyek ezt az aszimptotikus nagyságrendet tárgyalják lényegében teljes általánosságban. A sejtések lényege, hogy szuperdiffúzió pontosan akkor várható, ha található egy maximális (azaz $d-1$ dimenziós) nem elfajult horizont. Meglehetősen könnyű bizonyítani, hogy ha van egy ilyen horizont, akkor a t-nél hosszabb szabad repülés mértéke legalább $1/t$, tehát szuperdiffúziót várunk. Ha azonban a $d-1$ dimenziós horizont elfajult, a kérdés már sokkal nehezebb, és mint kiderült, egy érdekes geometriai problémához vezet. Ezt a kérdést válaszoljuk meg, ami egyben Dettmann 2. sejtésének bizonyítása. Érdekesség, hogy a bizonyításunk használja a periodikus Lorentz folyamatok kis méretű szórótestnél vett limeszét, lásd [14]. Ez a fejezet a [19] kéziraton alapul.

Legynek $\{O_i\}_{i=1,\dots,n}$ a d dimenziós tórusz nyílt részhalmazai (szórótestek), melyek határai $\mathcal{C}^3$-sima hiperfelületek. Nem követeljük meg, hogy a szórótestek diszjunktak legyenek (n.b. különböző szórótestek vezethetnek ugyanarra a konfigurációs térre, ha a különbségeket kitakarják szórótestek). A határok metszetein lévő $q \in \partial O_i \cap \partial O_j$ pontokat sarokpontoknak nevezzük. Feltesszük továbbá, hogy a ∂O_i határ tetszőleges pontján a K görbületi operátor egyenletesen korlátos felülről, azaz létezik olyan $\kappa_{\max}$ univerzális konstans, hogy minden a ∂O_i hiperfelület minden v érintővektorára $0 \le K(v,v) \le \kappa_{\max}\|v\|^2$. Fontos, hogy itt nem követelünk meg alsó korlátot. (Ezt a modellt egyébként *félig szóró biliárdnak* nevezik, és alapvető fontosságú az ún. Boltzmann-Szinaj Ergodikus Hipotézis tárgyalásánál, vö. [22], [21].)
A biliárd folyam konfigurációs tere $\tilde{Q} = \mathbb{R}^d \setminus \cup_{i=1}^{\infty} O_i$, ahol $\{O_i\}_{i=n+1,\dots}$ az $\{O_i\}_{i=1,\dots,n}$ szórótestek egész koordinátájú vektorokkal eltolt kópiái. A fázistér $\tilde{M} = \tilde{Q} \times S^{d-1}$, ahol S^{d-1} a lehetséges sebességvektorok halmaza. A biliárd folyam $\tilde{M}$-n értelmezett, és a Lebesgue mérték (mindkét koordinátában) nyilvánvalóan invariáns. A biliárd folyamot analóg módon definiálhatjuk a $M = Q \times S^{d-1} = (\tilde{Q}/\mathbb{Z}^d) \times S^{d-1}$ kompakt téren. Legyen μ a Lebesgue mérték M-en. A fenti jelölésekkel a szabad repülési vektor farokeloszlása:

$$F(t) = \mu\{(q,v) : \tau(q,v) > t\},$$

ahol $\tau(q,v) = \inf_{s>0}\{q + sv \in \cup_{i=1,2,\dots} O_i\}$.
A „elfajult $d-1$ dimenziós horizont” jelentése a következő. Tegyük fel, hogy létezik olyan $d-1$ dimenziós affin altér $\mathbb{R}^d$-ben, amely diszjunkt minden szórótesthez. Továbbá tegyük fel, hogy minden ilyen alteret mindkét oldalról érintenek szórótestek (azaz minden $q+V$ ütközőmentes affin altérre, ha $\dim V = d-1$, akkor minden elég kis $v \notin V$ vektorral $q+v+V$ belemetsz valamely szórótestbe). A fenti feltételek esetén a következő tétel teljesül.

20. Tétel. *Amint $t \to \infty$, a következő becslés igaz:*

$$F(t) = \begin{cases} O(t^{-2}), & 3 \le d \le 5 \\ O(t^{-2}\log t), & d = 6 \\ O\left(t^{\frac{2+d}{2-d}}\right), & d > 6. \end{cases}$$

Továbbá, ha azt is feltesszük, hogy a szórótestek görbületei egyenletesen el vannak választva a nullától (szóró eset), akkor

$$F(t) \asymp \begin{cases} t^{-2}, & 3 \le d \le 5 \\ t^{-2}\log t, & d = 6 \\ t^{\frac{2+d}{2-d}}, & d > 6. \end{cases}$$

A kitevőben szereplő $\frac{2+d}{2-d}$ nem jelent meg Dettmann sejtéseiben. Igazából a tételt kicsit általánosabban igazoljuk: a biliárdasztal nem csak $\mathbb{Z}^d$-periodikus lehet, hanem $\mathcal{L}$-periodikus, ahol $\mathcal{L}$ egy tetszőleges nem elfajult d dimenziós rács.
Végül megemlítünk egy saját sejtést, aminek bionyítása az első lépés lehet az olyan d dimenziós periodikus Lorentz folyamatokra vonatkozó szuperdiffúzív viselkedés bizonyításában, ahol van egy nem elfajult $d-1$ dimenziós horizont.

21. Sejtés. *Egy d dimenziós szóró biliárd konfiguráció esetén, ahol van $d-1$ dimenziós nem elfajult horizont, ha τ nagy, akkor a következő szabad repülés hossza tipikusan $\tau^{1/d}$ nagyságrendű.*

Hivatkozások

[1] Bunimovich, L. A., Sinai, Ya. G.: Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Comm. Math. Phys.* **78** 479–497, (1981).

[2] Bálint, P., Tóth, I. P.: Exponential Decay of Correlations in Multi-dimensional Dispersing Billiards. *Annales Henri Poincaré* **9** 1309–1369, (2008).

[3] Chernov, N.: Advanced statistical properties of dispersing billiards, *Journal of Stat. Phys.* **122**, 1061-1094 (2006).

[4] Chernov, N., Dolgopyat, D.: Anomalous current in periodic Lorentz gases with infinite horizon. *Russian Math. Surveys* **64** 73–124, (2009).

[5] Chernov, N., Dolgopyat. D.: Brownian Brownian Motion–1. *Memoirs of American Mathematical Society* 198 no. 927 (2009).

[6] Chernov, N., Markarian, R.: Chaotic billiards *Mathematical Surveys and Monographs* **127** AMS, Providence, RI (2006).

[7] Darling, D.A., Kac, M.:On occupation times for Markoff processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **84** 444-458 (1957).

[8] Dettmann, C. P.: New horizons in multidimensional diffusion: The Lorentz gas and the Riemann Hypothesis, *J. Stat. Phys.* **146** 181–204, (2012).

[9] Dolgopyat, D., Szász, D., Varjú, T.: Recurrence Properties of Planar Lorentz Process, *Duke Mathematical Journal* **142** 241-281 (2008)

[10] Dolgopyat, D., Szász, D., Varjú, T.: Limit Theorems for Locally Perturbed Planar Lorentz Process, *Duke Mathematical Journal* **148** 3 459-449 (2009)

[11] Dvoretzky, A., Erdős, P.: Some Problems on Random Walk in Space, Proc. 2^{nd} *Berkeley Sympos. Math. Statis. Probab.*, 353-367 (1951)

[12] Erdős, P., Taylor, S. J.: Some Problems Concerning the Structure of Random Walk Paths, *Acta Mathematica Hungarica* (1960)

[13] Krámli, A., Szász, D.: Random Walks with Internal Degrees of Freedom, I. *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **63** 85-95 (1983).

[14] Marklof, J., Strömbergsson, A.: The distribution of free path lengths in the periodic Lorentz gas and related lattice point problems. *Annals of Mathematics* **172** 1949–2033, (2010).

[15] Nándori, P.: Number of distinct sites visited by a random walk with internal states, *Probability Theory and Related Fields* **150** 3: 373-403, (2011).

[16] Nándori, P.: Recurrence properties of a special type of Heavy-Tailed Random Walk, *Journal of Statistical Physics* **142** 2: 342-355, (2011).

[17] Nándori, P., Szász, D.: Lorentz Process with shrinking holes in a wall *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **22** 2, 026115, (2012).

[18] Nándori, P., Szász, D., Varjú, T.: A central limit theorem for time-dependent dynamical systems *Journal of Statistical Physics* **146** 6: 1213-1220, (2012).

[19] Nándori, P., Szász, D., Varjú, T.: Tail asymptotics of free path lengths for the periodic Lorentz process. On Dettmann's geometric conjectures. Preprint, http://arxiv.org/abs/1210.2231

[20] Pène, F.: Asymptotic of the number of obstacles visited by a planar Lorentz process, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, series A, vol. **24** 567-588 (2009).

[21] Simányi, N.: Conditional Proof of the Boltzmann-Sinai Ergodic Hypothesis. *Inventiones Mathematicae* **177** 2 381-413 (2009).

[22] Sinai, Ya. G.: On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics (in Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **153** 6 1261-1264 (1963).

[23] Sinai, Ya. G.: Random walks and some problems concerning Lorentz gas, *Proceedings of the Kyoto Conference*, 6-17 (1981).

[24] Stenlund, M., Young, L.S., Zhang, H.: Dispersing billiards with moving scatterers, Preprint http://arxiv.org/abs/1210.0011

[25] Szász, D., Varjú, T., Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24** 257-278 (2004).

[26] Szász, D., Varjú, T.: Limit Laws and Recurrence for the Planar Lorentz Process with Infinite Horizon. *Journal of Stat. Phys.* **129** 59–80, (2007).

[27] Young, L.S.: Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Annals of Mathematics* **147** 585–650, (1998).