Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Üzleti Tudományok Intézet
Menedzsment és Vállalatgazdaságtan Tanszék

Menedzsmentdöntések támogatása matematikai programozási modellekkel

Ph.D. értekezés

Készítette: Tatay Viola

Tudományos témavezető: Dr. Koltai Tamás
egyetemi tanár

Budapest
2013.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS

A vállalati siker egyik kulcsa az uralkodó menedzsmentparadigma gyors, sikeres gyakorlati megvalósítása. Azok a vállalatok, amelyek felismerik a versenyelőnyt biztosító menedzsmentparadigmát és a vállalati működés szerves részévé teszik, hosszútávon lehetnek sikeresek. A költség- és minőségalapú versenyzés után jelenleg az élenjáró vállalatok egy része az időalapú versenyzés által meghatározott menedzsmentparadigmára épülő vállalati működést valósít meg. Sokan az élenjáró vállalatok közül azonban már a különböző kvantitatív eszközök egész vállalatra kiterjedő alkalmazásában látják a tartós versenyelőny forrását. Ezt nevezi a magyar szakirodalom – az angolul compeeting on analytics kifejezés alapján – kvantitatív alapú versenyzésnek (Davnenport, 2006). A gyakorlatban jól alkalmazható kvantitatív eszközök egyik nagy csoportja az operációkutatás tárgykörébe tartozik. Éppen ezért szükség van az operációkutatás elméleti eszköztárának alapos tanulmányozására és gyakorlati alkalmazásának elősegítésre.

Kutatásaim során olyan – a termelés- és szolgáltatásmenedzsment körébe tartozó – kérdésekkel foglalkoztam, amelyek matematikai programozási modellekkel vizsgálhatóak. A matematikai programozást a második világháború után kezdték el alkalmazni a hadseregen kívüli problémák optimalizálására, így ekkorra tehető a vállalati környezetben való megjelenése.

A matematikai programozás egyik legrégebben alkalmazott területe a lineáris programozás. A lineáris programozási feladatok megoldására az 1940-es években kidolgozták a szimplex módszert (Dantzig, 1951). A számítási teljesítmény fejlődésével pedig a megoldható lineáris programozási feladatok mérete megnőtt. A termelés- és szolgáltatásmenedzsment döntések lineáris programozási modellek segítségével történő támogatását a különböző döntéstámogatási szoftverek megjelenése, majd elterjedése tette lehetővé. A számítástechnika fejlődése, az új számítási algoritmusok megjelenése és a meglévő algoritmusok finomodása, valamint a felhasználóbarát szoftverek lehetővé teszik nagyméretű, valós problémák megoldását. A szoftverek által szolgáltatott információk a termelés- és szolgáltatásmenedzsment döntéseket támogathatják.

A lineáris programozási feladatok megoldásának fontos része az érzékenységvizsgálat, amelynek segítségével a modell paramétereiben bekövetkező változások optimális megoldásra gyakorolt hatásai könnyen kiértékelhetők. A kereskedelmi forgalomban kapható kvantitatív döntéstámogatási eszközök menedzsment szempontból félrevezető érzékenységvizsgálati eredményeket határozhatnak meg, ha a feladat degenerált. A degeneráció problémája a szakirodalomban ismert. Matematikai nézőpontból a jelenség nem jelent problémát, kezelése többféleképpen lehetséges. Menedzsment szempontból azonban a szoftverek által szolgáltatott információk nem korrektek.

Menedzsment szempontból *nem tekintem korrektnek* az érzékenységvizsgálati információt, ha az a feltett menedzsmentkérdésre nem ad teljes körű választ és ezért kedvezőtlen következményekkel járó menedzsmentdöntéshez vezethet. Ha például egy termeléstervezési probléma célfüggvény-együtthatójaként szereplő költség adat változásának az optimális megoldásra kifejtett hatását vizsgáljuk, akkor degenerált esetben szűkebb tartományt kaphatunk a ténylegesnél. A szűk tartomány *matematikai szempontból helyes* eredmény, mert a kapott érvényességi tartományon kívülre kerülve már új bázis tartozik az optimális megoldáshoz. Az információ tehát matematikai szempontból korrekt. Az új bázishoz azonban ugyanazon mennyiségek gyártása tartozhat, mint az előző bázishoz, tehát a menedzsmentnek a költségadat kismértékű változása esetén nem kell a termelési tervén változtatnia. Tehát a menedzsment szempontú költségadat érvényességi tartomány nagyobb, a matematikai szempontokat figyelembe vevő érvényességi tartománynál. Az értekezésemben következetesen az ilyen és ehhez hasonló problémákra használom a *menedzsment szempontból korrekt* érzékenységvizsgálat kifejezést. Menedzsment szempontból korrekt az érzékenységvizsgálati eredmény, ha az menedzsmentdöntésekhez felhasználható. A menedzsment szempontból félrevezető érzékenységvizsgálati eredmények tehát matematikai szempontból helyesek, csak menedzsmentdöntésekhez nem használhatóak fel.

A lineáris programozási modellek gyakorlati alkalmazását elősegítené, ha a rendelkezésre álló kvantitatív döntéstámogatási szoftverek képesek lennének meghatározni a menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredményeket. A degenerált lineáris programozási modellek érzékenységvizsgálatával kapcsolatos kutatásaim fő céljai az alábbiakban foglalhatóak össze:

- A degenerált lineáris programozási feladatok problémájának áttekintése; a matematikai és menedzsment szempontú érzékenységvizsgálat közötti különbség feltárása.
- Egy olyan számítási módszer kidolgozása, amellyel bármilyen lineáris programozási modell esetében a menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredmények meghatározhatóak.
- Egy olyan számítástechnikai eszköz létrehozása, amellyel a menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredmények meghatározhatóak és azok felhasználóbarát formában kerülnek rendszerezésre.

A számítástechnika fejlődésével egyre bonyolultabb feladatok megoldására nyílt lehetőség. A bináris programozási feladatok azért speciálisak, mert a lineáris programozási feladat változóinak egy része vagy egésze csak nulla vagy egy értéket vehet fel. Ennek megoldásához speciális megoldó algoritmusokra van szükség.

A termelés- és szolgáltatásmenedzsment egyik tipikus problémája, a gyártósor-kiegyenlítés bináris programozási modellekkel jól vizsgálható. A gyártósor-kiegyenlítés matematikai modellezésével kapcsolatos kutatások kezdetben a megoldó algoritmusok fejlesztésére koncentráltak. Ma már a kiforrott számítástechnikai eszközök és a megnövekedett számítási teljesítmény lehetővé teszik a nagyméretű, valós problémák megoldását és a modellek gyakorlati alkalmazását. A gyártósor-kiegyenlítéssel kapcsolatos kutatásaim fő céljai az alábbiakban foglalható össze:

- A gyártósor-kiegyenlítés matematikai modelljeinek áttekintése és a modellek eredményeinek menedzsment alkalmazási lehetőségeinek feltárása.
- A gyakorlati alkalmazást elősegítő számítások és a valóságot jobban leíró modellek készítése.
- Egy valós vállalati folyamat vizsgálata és alapos elemzése különböző gyártósor-kiegyenlítési modellekkel.

A megfogalmazott célkitűzések megkövetelik a szakirodalmi források áttekintését. A kapcsolódó szakirodalom áttanulmányozása után kerülhet sor a célok gyakorlati megvalósítására. Az értekezés felépítése ennek megfelelően a következő:

- A 2. fejezet ismerteti a menedzsmentparadigmák változását az idők folyamán és rávilágít arra, hogy az időalapú versenyzés után a jövőben a kvantitatív módszerek alkalmazása lehet a megkülönböztető előny forrása. A kvantitatív versenyzés bemutatása után a lineáris programozáshoz és gyártósor-kiegyenlítéshez kapcsolódó szakirodalmat tekinti át.
- A 3. fejezet a degenerált lineáris programozási feladatok érzékenységvizsgálatának menedzsment jelentőségével foglalkozik. A probléma bemutatása után a degenerált esetben menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredményeket adó számítási módszer bemutatására, gyakorlati megvalósítására és szemléltetésére kerül sor.
- A 4. fejezet a gyártósor-kiegyenlítés matematikai modellezésével foglalkozik. Az alapmodellek ismertetése után két gyakorlati szempontból fontos problémát tárgyal. Először a gyártási mennyiség érzékenységvizsgálatát mutatja be. Ez után

a különböző képzettségű alkalmazottak gyártósoron való alkalmazásának optimális megoldásra kifejtett hatása kerül vizsgálatra.

– Végül az értekezés 5. fejezete összefoglalja a főbb megállapításokat és ismerteti a téziseket.

2. HÁTTÉRISMERETEK, IRODALMI ÁTTEKINTÉS

A stratégiai versenyelőny forrása időről időre ugyanúgy változik, ahogy a vállalatok működési környezete is. Jelenleg az időtényezők csökkentése áll az élenjáró vállalatok fókuszában. Egy új stratégiai versenyforrás lehet a kvantitatív módszerek egész vállalatra kiterjedő, komplex alkalmazása. A fejezetben a kvantitatív versenyzést és annak egy markáns területét, a matematikai programozási modellekkel történő optimalizálást tekintem át.

2.1. A kvantitatív eszközökkel történő versenyzés, mint menedzsmentparadigma

2.1.1. A vállalati működést meghatározó versenystratégiák és menedzsmentparadigmák

A vevői érték előállítása a mai gyorsan változó világban nem egyszerű feladat. A termékek és szolgáltatások előállításával foglalkozó vállalatok felfokozott piaci versenykörnyezetben működnek. A verseny igen erős – vállalati mérettől függetlenül. A versenyben való helytállást segítheti a környezet minél alaposabb megismerése és ez alapján egy megfelelő versenystratégia kialakítása. A jó versenystratégia irányt ad a működésnek és versenyképessé teszi a vállalatot, vagyis eredményessé azon szervezetekhez képest, akik ugyanazzal a termékkel vagy szolgáltatással vannak jelen a piacon (Vörös, 2010).

A vállalatok működési környezete különböző szintekre bontható (Porter, 2006). Az iparági környezetben az azonos fogyasztói igényeket kielégítő vállalatok működnek. Az azonos iparági környezetben működő vállalatok még nem feltétlenül közvetlen versenytársai egymásnak, hiszen ugyanazt a fogyasztói igényt különböző helyettesítő termékekkel elégíthetik ki. A vállalat és valóságos versenytársai stratégiai csoportot alkotnak (Marcsa, 2009). Az egy stratégiai csoportba tartozó vállalatok azonos fogyasztói igényeket szolgálnak ki, azonos piaci szegmenst céloznak meg. Tevékenységeik sikertényezői megegyeznek, így a követett versenystratégiájuk is hasonló.

A versenyben való helytálláshoz és a versenyelőny megszerzéséhez elengedhetetlen fontosságú a stratégiaalkotás. Számos kutatás alátámasztotta (Ward-Duray, 2000; Meredith-Vineyard, 1993), hogy a stratégiaépítéssel szorosan összefügg a vállalati versenyképesség, a vállalati teljesítmény és az elért sikerek. A versenystratégia kialakításának lényege a vállalat környezetben való elhelyezése. Bár a stratégia megalkotását döntően befolyásolják a társadalmi tényezők, a gazdaság helyzete, a politikai környezet és a technológiai fejlettség szintje, közvetlen meghatározója mégis az a környezet, ahol a vállalat versenyez. Versenystratégiája minden vállalatnak van – akár nyíltan, akár burkoltan kerül az megfogalmazásra (Porter, 2006). A versenystratégia tartalmazza a vállalat jövőbeli elképzeléseit, rögzít bizonyos elemeket, amelyek meghatározzák rövid- és hosszútávú működését és segíti a vállalati környezet változásához való alkalmazkodást (Marosán, 2001; Marcsa, 2009). A vállalati stratégia megfogalmazása számos előnyt nyújt a vállalatok számára, mert a funkcionális részlegek vállalatpolitikai viselkedési normáit összehangolja, elősegíti a közös cél érdekében való tevékenykedést. A versenystratégia tartalmazza a vállalat által megfogalmazott célokat és az azok eléréséhez szükséges eszközöket (Gyökér, 2003).

Porter (2006) a vállalatok közötti versenyt öt tényezőtől teszi függővé: a versenytársaktól, a helyettesítő terméket előállítóktól, a lehetséges belépőktől, a szállítóktól és a vevőktől. Porter (2006) szerint az öt versenytényezővel való küzdelemben alapvetően háromféle stratégia alkalmazható sikerrel és ezek valamelyikével nyílhat lehetőség stratégiai előnyre szert tenni. Porter úgy véli, a vállalatok stratégiai előnye alapvetően kétféle forrásból származhat: a vevőknek kínált alacsony árból vagy a vevő által érzékelt egyéb más különlegességből. A másik dimenzió, amely mentén a vállalati stratégiák osztályozhatóak, a stratégia cél: a vállalatoknak el kell dönteniük, hogy egy egész iparágban versenyeznek és így minden szegmenst kiszolgálnak, vagy csak egy vagy néhány szegmensben versenyeznek. A Porter-féle versenystratégiákat az 1. ábra szemlélteti.

	A vásárló által érzékelt különlegesség	**Alacsony költségpozíció**
Minden szegmens	Megkülönböztető	Költségdiktáló
Egy (vagy néhány) szegmens	Összpontosító	

1. ábra: Porter versenystratégiái
(Porter, 2006)

A vállalatok stratégiai célja, hogy olyan megkülönböztető előnyre tegyenek szert, amelyet a vásárló egyfajta különlegességként, egyediségként érzékel. Ez a különlegesség az idők folyamán változik, ahogy a vásárlók által érzékelt egyediséggel egyre több vállalat rendelkezik és az megszűnik speciális tulajdonságnak lenni. Ezek a különlegességek a vállalati működést meghatározó menedzsmentparadigmák, amelyek dinamikusan változtak az idők folyamán.

Az egyik első menedzsmentparadigma a második világháború utáni évtizedekben a költségalapú versenyzés volt (Cost Based Competition). Ekkor a vállalatok a költségek minimalizálására fókuszáltak (Stalk, 1988). Kezdetben a vállalatok a gyártás közvetlen költségeinek csökkentésére koncentráltak. Ezt a rendelkezésre álló olcsó, nagytömegű munkaerő és a különböző folyamatracionalizálási lépések biztosították. A közvetlen költségek után az általános költségek csökkentése is előtérbe került. Ezt jellemzően a gyártási volumen növelésével érték el. A költségek alacsony szinten tartása leginkább azt biztosította, hogy az élenjáró vállalatok alacsony piaci árat tudtak meghatározni. A mérsékelt költségek ugyanakkor a magasabb haszon révén további költségcsökkentésre kínáltak lehetőséget.

A hetvenes években az élenjáró vállalatok kizárólag a költségek előtérbe helyezésével egyre kevésbé tudták megkülönböztetni magukat versenytársaiktól. Ennek oka egyrészt az volt, hogy egyre több vállalat sajátította el a költségminimalizálás gyakorlatát, ezáltal egyre inkább kiegyenlítődtek a vállalati költségek és a piaci árak; másrészt pedig kezdtek kimerülni a költségcsökkentés lehetőségei. Az élenjáró vállalatoknak más különlegességet kellett keresniük, amivel meg tudták különböztetni magukat versenytársaiktól. Ekkor következett a minőségalapú versenyzés (Quality Based Competition) időszaka. Természetesen a költségek alacsony szinten tartása továbbra is fontos volt, de e mellett egyre nagyobb hangsúlyt kapott a minőség is. A csak a végtermékre fókuszáló minőség-ellenőrzés után egyre kiterjedtebben jelent meg a vállalati gyakorlatban a minőségszabályozás és annak különböző eszközei (Topár, 2003). A statisztikai módszerek használata ekkor kezdett el sikeres versenytényezővé válni – holott már a harmincas években rendelkezésre álltak ezek az eszközök és elszórtan találhatóak példák is ezek alkalmazására (például Shewhart ellenőrzőkártyái (Shewhart, 1939)). A különböző minőségügyi rendszerek megjelenésével a minőség a vállalaton belüli alrendszerré fejlődött (Kövesi-Topár, 2007). A minőségalapú versenyzés utolsó állomása a teljes körű minőségmenedzsment (Total Quality Management), amely a minőségre közvetlenül ható tényezők mellett a minőségre közvetve ható tényezőket is a minőségjavítás szolgálatába állította (Kövesi, 2007).

A kilencvenes években a minőségjavítás közvetlen és közvetett lehetőségeinek részbeni kimerülése, valamint a vállalati gyakorlatok egymáshoz közelítése miatt a minőség hangsúlyozása egyre kevésbé tudott stratégiai versenyelőnyt nyújtani az élenjáró vállalatoknak. A költségek alacsony szinten tartása és a minőség folyamatos javítása mellett új különlegességet kellett keresniük az élenjáró vállalatoknak. A technológiai fejlődés hatásának következtében megnőtt az idő és a gyorsaság jelentősége (Chikán-Demeter, 2001). A megkülönböztető előny új forrásává a különböző időtényezők váltak. Az időalapú versenyzés (Time Based Competition) korszakában – a minőségalapú verseny időszakához hasonlóan – először a vevők által közvetlenül érzékelhető, külső időtényezők csökkentésére törekedtek a vállalatok. Ezután következett a közvetett hatással bíró, belső időtényezők redukálása (Suri, 1998).

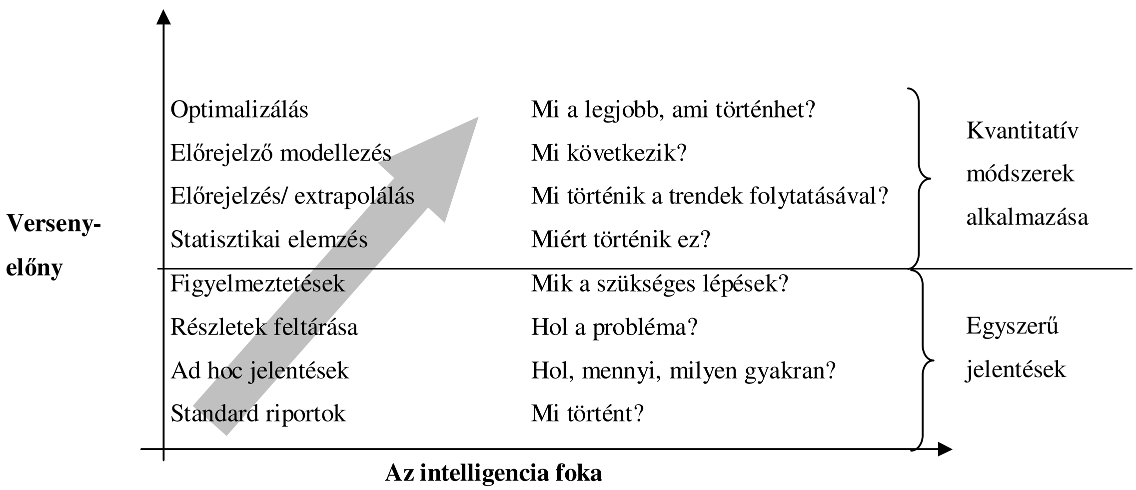
Ahogy végmenet a vállalatok közötti kiegyenlítődés a költségek és a minőség területén, úgy várhatóan az időtényezők csökkentése sem lehet örökké a stratégiai versenyelőny forrása. A költség, a minőség és az idő mellett várható egy olyan új tényező megjelenése, amely alapvető fontosságú lesz az élenjáró vállalatok működésében. Ahogy Stalk és Hout írják (1990) a kompetitív stratégiáknak a termékekhez hasonlóan életciklusuk van. Ahogy megjelenik egy új tényező, amely képes lehet arra, hogy megkülönböztesse az élenjáró vállalatokat egymástól, a vállalatok menedzsmentje megpróbálja elsajátítani és tökéletesíteni azt. Egyre szélesebb körben kerül alkalmazásra az új innováció és egyre inkább kiaknázzák az új menedzsmentparadigma nyújtotta lehetőségeket. Miután az élenjáró vállalatok elsajátítják a legújabb menedzsmentparadigmát és egyre kevésbé tudják magukat versenytársaiktól megkülönböztetni, új stratégiai versenyforrás felkutatása válik szükségessé.

Davenport szerint (2006) a különböző kvantiatív eszközök egész vállalatra kiterjedő alkalmazása lehet az egyik következő forrása a versenyelőnynek. A mai informatikai és technológiai fejlettség lehetővé teszi a vállalatoknak, hogy a rendelkezésükre álló nagymennyiségű adatot összegyűjtsék és feldolgozzák, amely biztosítja számukra a termelési, szolgáltatási környezet alaposabb megismerését.

2.1.2. Kvantitatív eszközök alkalmazása, mint új stratégiai versenyforrás

Egy élenjáró vállalat sikeresen alkalmazza a kvantitatív módszereket, ha széleskörűen felhasználja a rendelkezésére álló nagymennyiségű vállalati információt, különböző kvantitatív eszközöket használ az adatok elemzésére, magyarázó és előrejelző modelleket készít, továbbá menedzsmentjének döntései tényeken és nem intuíciókon, megérzéseken alapulnak (Davenport-Harris, 2007). Számos tanulmány alátámasztja, hogy a logikusnak tűnő válaszok alapján meghozott döntésekkel szemben jobb gazdasági eredmény érhető el, amennyiben a menedzsment döntései statisztikai elemzésekkel, illetve különböző kvantitatív módszerek alkalmazásával kerülnek alátámasztására (Overby, 2005; Davenport-Harris, 2007; Hitt et al., 2002). Hazánkban is több kutatás témája a különböző kvantitatív eszközök vállalati gyakorlatban való alkalmazása a versenyképesség növelése érdekében (lásd pl.: Kalló, 2010; Sebestény-Tóth, 2012; Jónás (2011); Jónás-Tóth (2011)).

A kvantitatív módszerek alkalmazása az üzleti intelligencia (Business Intelligence) részét képezi (Davenport-Harris, 2007). Az üzleti intelligencia az adatok gyűjtését, tárolását és különböző kvantitatív módszerekkel történő feldolgozását jelenti, tehát olyan folyamatok és technológiák összessége, amelyek célja az üzleti teljesítmény megértése, javítása (Negash, 2004). Így az adatok beszerzésétől, azok dokumentumokba és riportokba strukturált rendezésén keresztül, egészen a különböző statisztikai, operációkutatási és előrejelzési módszerekkel történő feldolgozásig és alkalmazásig mindent magába foglal. Mint az üzleti intelligencia része, a kvantitatív módszerek vállalati gyakorlatban való alkalmazása is a különböző üzleti tevékenységekkel foglalkozik, azonban a magasabb értéket, proaktív megközelítést igénylő kérdéseket helyezi fókuszba. A 2. ábra az üzleti intelligencia és a kvantitatív módszerek kapcsolatára világít rá.



2. ábra: Az üzleti intelligencia és a kvantitatív módszerek alkalamzásának viszonya (Davenport-Harris, 2007)

A kvantitatív módszerek gyökerei az 1900-as évek közepéig nyúlnak vissza. A Carnegie Institute of Technology és a Massachusetts Institute of Technology tudósai az ötvenes évek közepén alkalmazták először a számítógépeket, mint a döntéstámogatás kezdetleges eszközeit (Buchanan-O'Connell, 2006). Ezek a kutatások a mesterséges intelligencia tanulmányozásával foglalkoztak, magát a döntéshozatali mechanizmust helyezték fókuszba. A döntéstámogató rendszerek (Decision Support Systems) a hatvanas évek végén jelentek meg. Ezeket a nagyvállalatoknál alkalmazott döntéstámogató rendszereket már a döntéshozatal serkentésére használták. Jellemzően a vállalati működés olyan szűkebb, ismétlődő jelleggel előforduló tevékenységeinek elemzésében bizonyultak ezek az eszközök hasznosnak, mint a termeléstervezés, a beruházások portfolió menedzsmentje vagy a szállítási útvonalak optimalizálása (Davenport-Harris, 2007). Miután az operatív döntéseket a számítástechnika és a technológia segítségével megfelelően tudták tökéletesíteni, megjelent az igény a stratégiai jellegű döntések számítógépes támogatására is. Ez indította el a vezetői információs rendszerek (Enterprise Resource Systems) fejlődését. A vezetői információs rendszereket kifejezetten a csúcsszintű stratégiai döntések támogatására hozták létre (Buchanan-O'Connell, 2006). Az üzleti intelligencia kifejezés a nyolcvanas évek második felében terjedt el – holott az üzleti intelligenciát Luhn már 1958-ban definiálta (Luhn, 1958). Az üzleti intelligencia a teljes vállalati működést lefedi és segíti a döntéshozókat a vállalat különböző operatív és stratégiai döntéseiben. A kvantitatív módszerek vállalati gyakorlatban való alkalmazása – mint az üzleti intelligencia része – a korábbi stratégiai versenyforrások élenjáró vállalatok közötti kiegyenlítődésével válik egyre hangsúlyosabbá. Azok a vállalatok, amelyek felismerték a kvantitatív módszerek alkalmazásában rejlő lehetőségeket, a rendelkezésükre álló nagymennyiségű vállalati adatokat elkezdték különböző kvantitatív eszközök alkalmazásával feldolgozni és hosszú évek kitartó munkája után elkezdtek kiemelkedni versenytársaik közül (pl.: Google, Amazon, Procter & Gamble,…) (Davenport-Harris, 2007).

Kvantitatív megközelítéssel a vállalati működést érintő kérdések széles spektruma vizsgálható. A vállalati működést érintő kérdések két dimenzió mentén vizsgálhatóak: idő és innováció (Davenport et al., 2010). Az időtáv szerint egy kérdés érintheti a vállalat múltját, jelenjét vagy jövőjét. Az innováció pedig arra vonatkozik, hogy ismert adatokkal vagy a különböző adatfeldolgozási és -elemzési módszerek segítségével kapott új információkkal alapozza meg a vállalat döntéseit. A két dimenzió mentén felmerülő különböző kérdéseket a 3. ábra szemlélteti.

	Múlt	**Jelen**	**Jövő**
Információ	Mi történt? (Jelentés)	Mi történik most? (Figyelmeztetések)	Mi fog történni? (Extrapoláció)
Elemzés	Hogy és miért történt? (Statisztika)	Mi a következő legjobb alternatíva? (Javaslat)	Mi a legjobb/legrosszabb, ami történhet? (Optimalizálás, szimuláció,…)

3. ábra: Kvantitatív módszerek alkalmazása a vállalati működés elemzésére (Davenport et al., 2010)

Azok a tradicionális vállalatok, amelyekre a különböző kvantitatív eszközök egész vállalatra kiterjedt alkalmazása nem jellemző hajlamosak kevesebb figyelmet szentelni a jövőt érintő kérdéseknek, jellemzően a múltban történt eseményekkel foglalkoznak. A különböző kvantitatív módszerekkel a rendelkezésre álló adatok elemezhetőek, ezáltal jobban megérthető a vállalat környezetének és működésének dinamikája. Azok a vállalatok, amelyek a különböző kvantitatív eszközöket sikerrel alkalmazzák a múlt és a jelen mellett a jövőben várható eseményeknek is megfelelő figyelmet szentelnek, továbbá különböző professzionális adatelemző módszereikkel az adatokba mélyebb betekintést nyernek.

2.1.2.1 A kvantitatív módszereket sikeresen alkalmazó vállalatok

A kvantitatív módszereket eredményesen alkalmazó élenjáró vállalatok sikere abban rejlik, hogy hosszútávon, következetesen, egész vállalatra kiterjedően alkalmazzák a különböző kvantitatív eszközöket. A kvantitatív alapokon versenyző vállalatok mindegyike rendelkezik a következő négy tulajdonsággal: menedzsment elkötelezettsége; vállalati szintű megközelítés; versenytársaiktól a kvantitatív módszerek alkalmazásával különböztetik meg magukat; kvantitatív eszközök alkalmazására építő, törekvő vállalati stratégia (Davenport-Harris, 2007).

Ahogy sok sikert eredményező menedzsmenteszköznek (Rodgers et al., 1993; Lester, 1998), úgy a kvantitatív szemléletű vállalati működésnek is az *elkötelezett menedzsment* az alapja. Egy kvantitatív alapokon nyugvó, élenjáró vállalatnál a vállalati kultúra, a vállalati folyamatok részét kell, hogy képezzék a különböző adatgyűjtési és feldolgozási módszerek. A menedzsment a vállalat stratégiai és operatív működéséhez kapcsolódó döntéseinél elsősorban tényekre hagyatkozik – nem intuíciókra – és a döntések különböző számításokkal, elemzésekkel kerülnek alátámasztásra. A menedzsmentnek ki kell nyilvánítania elkötelezettségét a kvantitatív módszerekkel történő döntéstámogatás iránt, és a különböző kvantitatív modellek alkalmazásában, kidolgozásában aktív szerepet kell vállalnia.

A *vállalati megközelítés* lényege, hogy nem egy vagy néhány elszigetelt vállalati folyamatot elemeznek kvantitatív módszerekkel, hanem az egész vállalati működést áthatják a különböző kvantitatív eszközök. Ez azért fontos, mert egy vagy néhány terület kiemelése a vállalati folyamatok egészéből azt okozhatja, hogy a fókuszba helyezett területen elért esetleges sikerek mellett az egész folyamat más részein rosszabb lehet a teljesítmény, amely vállalati szinten az eredetinél kedvezőtlenebb helyzetet eredményezhet. A vállalati megközelítés megköveteli az adatok egységes gyűjtését, tárolását, rendszerezését, felhasználását, vagyis a vállalati adatbázisok egységes kezelését.

A sikeresen versenyző kvantitatív módszereket alkalmazó vállalatok megkülönböztető előnye *a különböző kvantitatív eszközök széleskörű alkalmazásá*ból fakad. Ezek a vállalatok a stratégiai és operatív működésükhöz kapcsolódó döntéseiket különböző előrejelző, előíró és leíró modellekkel támasztják alá. Ez jóval több annál, minthogy egyszerű leíró statisztikai elemzéseket készítenek egy-egy tevékenységükről. A vállalati stratégiájuk a kvantitatív módszerek alkalmazására épül, vagyis minden külső és belső forrásból származó adatot összegyűjtenek és alapos elemzésnek vetnek alá, így részletes információval rendelkeznek a vállalati működés minden területéről: a vevőkről, az ellátási láncuk minden eleméről, az árakról,... A kvantitatív módszerek stratégiai szintű kezelése hosszútávú, kitartó munka eredményeként, jelentős ráfordításokkal alakítható ki. A különböző modellek kialakítása, tesztelése, javítása időt, állandó figyelmet és megfelelő szakemberek alkalmazását követeli meg. Jellemzően egy vagy néhány terület alapos kvantitatív elemzésével indul a kvantitatív megközelítés kialakulása, majd az elért sikerek után az elemzési, tanulási, tesztelési tevékenységek beépülnek a kultúrába és átterjednek más tevékenységekre is. Így válik a kvantitatív módszerek alkalmazásában élenjáró vállalatok megkülönböztető előnyévé a kvantitatív eszközök és módszerek széleskörű alkalmazása.

Az kvantitatív módszereket alkalmazó élenjáró vállalatok kvantitatív eszközöket fókuszba helyező stratégiájukban olyan *nagymérvű, ambiciózus stratégiai célok*at tűznek ki, amelyek kvantitatív módszerek épülnek és a standard iparági gyakorlattól eltérnek. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy minden megfogalmazott és kinyilvánított célt sikerrel el is ér az adott vállalat, de a kitartó, következetes, kvantitatív alapokon nyugvó stratégiai megközelítés sikere messze felülmúlhatja a szokásos stratégiai célok segítségével elérhető sikereket. A kvantitatív versenyzésben elöljáró vállalatok stratégiájukat olyan hangzatos elnevezésekkel is illetik, mint például információ alapú stratégia (Information-Based Strategy – Capital One) vagy információ alapú ügyfélmenedzsment (Information-Based Costumer Management – Barclay Bank).

A kvantitatív eszközök alkalmazásában élenjáró vállalatok a fenti négy ismertetőjeggyel rendelkeznek. Különböző mértékben, de mindegyik kvantitatív módszereket alkalmazó versenyzőnek megvannak ezek a jellemzői. Ezek a tulajdonságok egymástól nem függetlenek, hiszen nehezen képzelhető el például, hogy egy kvantitatív eszközök alkalmazása iránt elkötelezett menedzsmenttel, kvantitatív alapokon nyugvó vállalati stratégiával és kvantitatív módszerek széleskörű alkalmazásával jellemezhető vállalatnál ne terjedjen el előbb vagy utóbb a vállalati szintű megközelítés.

2.1.2.2 A fejlődés mérföldkövei és menete

Attól függően, hogy a 2.1.2.1 pontban ismertetett négy tulajdonság milyen erősen van jelen, a vállalatok különböző kategóriákba sorolhatóak (Davenport-Harris, 2007). Ez a csoportosítás egyben a kvantitatív alapon versenyző vállalatok fejlődési stádiumait is jelenti. A *kvantitatív módszereket nem alkalmazó vállalatok* nem alkalmaznak semmilyen kvantitatív eszközt a vállalati működés és a környezetük elemzésére. A mai információalapú, kiélezett versenyben az ilyen vállalatok egyáltalán nem vagy csak igen kivételes esetben tudnak a piacon életben maradni. A kvantitatív eszközök alkalmazása a *kvantitatív módszereket elszigetelten alkalmazó vállalatok*nál jelenik meg. Ezek a vállalatok a vállalati működés egy-egy különálló elemére alkalmaznak valamilyen kvantitatív döntéstámogatási módszert. Céljuk egy vagy néhány funkcionális tevékenység javítása, fejlesztése. A számítástechnika és a technológia fejlettségi szintje ma már legalább ezt a szintet megköveteli a vállalatoktól. A fejlődés következő állomása a *különböző kvantitatív eszközöket alkalmazó vállalatok* szintje. Ezeknek a vállalatoknak már szándékukban áll az adatok és a különböző kvantitatív eszközök alkalmazási területeinek integrálása. Itt jelenik meg először, hogy a vállalat nem csak a jelenre fókuszál, hanem próbál a jövőre vonatkozóan is becsléseket végezni. A következő fejlettségi szinten a *kvantitatív megközelítésű vállalatok* állnak. Az említett négy tulajdonság majdnem mindegyike megjelenik magatartásukban, de még van hova fejlődniük. Ezek a vállalatok igen közel vannak a kvantitatív módszerek alkalmazásában élenjáró, *kvantitatív versenyzőkhöz*, akik a különböző kvantitatív eszközöket vállalati szintre kiterjedően, professzionálisan alkalmazzák operatív és stratégiai döntéseik alátámasztására.

Kvantitatív versenyzővé válni nem egyszerű feladat. Kemény elhatározás, elkötelezett menedzsment, kitartó alkalmazottak és hosszú évek munkájának eredményeként válhat egy vállalat professzionális adatelemzővé. A vállalat kvantitatív megközelítése a DELTA modell (a Data – adat, Enterprise – vállalat, Leadership – vezetőség, Targets – célok, Analysts – elemzők kezdőbetűkből összetett mozaikszó) segítségével fejleszthető (Davenport et al., 2010). Ahogy a DELTA a matematikában az egyenletekben, kifejezésekben történő változás kifejezésére használatos, úgy szimbolikusan a vállalat kvantitatív megközelítésében bekövetkező változást jelenti. A pontos, vállalati szinten egységes *adat* a professzionális elemező vállalatok működésének az alapja. Azok az élenjáró vállalatok, amelyek sikeresen alkalmazzák a kvantitatív módszereket az iparági átlagtól eltérően tárolják, rendszerezik és dolgozzák fel a rendelkezésre álló adatokat, amellyel új információ kinyerésére is képesek. A *vállalat* szó a vállalati megközelítés fontosságát hangsúlyozza. Vagyis azt, hogy a kvantitatív eszközök alkalmazása hassa át a vállalati működést és terjednek ki annak minden területére és ne csak néhány elszigetelt területen kerüljenek alkalmazásra. Az elkötelezett *menedzsment* talán a legfontosabb eleme a kvantitatív módszereket kiterjedten alkalmazó vállalatok működésének, hiszen e nélkül nem lehet a vállalati kultúrában, szokásokban, működésben változást elérni. A különböző kvantitatív eszközök alkalmazásában jártas *elemző szakemberek* pedig a kvantitatív módszereket alkalmazó vállalatok elengedhetetlen kellékei.

A kvantitatív módszereket alkalmazó élenjáró vállalatok sikerességének számos forrása van (Davenport, 2006). Ezek a vállalatok egyrészt erőforrásaikat a különböző vállalati funkciók között optimálisan osztják el, vagyis a megfelelő tevékenységek kerülnek fókuszba. Az erőforrások kihelyezésénél figyelembe veszik, hogy mely területek kulcsfontosságúak a vállalat működése szempontjából, illetve mely területek alkalmasak leginkább a mélyebb analízisre. A kvantitatív eszközök alkalmazásában élenjáró vállalatok erősségének további forrása a megfelelő kultúra. Ez azt jelenti, hogy a vállalatnál mindenki tisztában van azzal, hogy a döntéseket számadatokkal kell alátámasztani és tények alapján kell meghozni. A teljesítmény – legyen az alkalmazotti, menedzsment vagy pénzügyi, vállalati – mérésére különböző kvantitatív eszközöket alkalmaznak. A kvantitatív eszközök különböző területeken történő alkalmazásánál fontos, hogy a menedzsment példát mutat, kimutatja elkötelezettségét. A kvantitatív módszereket kiterjedten alkalmazó élenjáró vállalatok sikerének további forrása a megfelelő szakapparátus összeállításában rejlik. A különböző kvantitatív módszerek alkalmazása komoly szaktudással rendelkező emberek alkalmazását, megfelelő informatikai és technológia felszereltséget igényel.

Azok a vállalatok, amelyek a különböző kvantitatív eszközök alkalmazásával tudják magukat versenytársaiktól megkülönböztetni olyan stratégiai versenyelőnyre tesznek szert, amely hosszútávon kihat a vállalati működésre. Egyrészt azért, mert egy vállalat kvantitatív megközelítését igen nehéz utánozni. Ez abból fakad, hogy pusztán az informatikai alkalmazások és különböző kvantitatív módszerek átvétele nem elegendő ahhoz, hogy egy vállalat egy kvantitatív versenyző versenytársával megegyező kvantitatív megközelítéssel rendelkezzen. A vállalati kultúra és a különböző elemzési folyamatok – amelyek a siker magját képezik – nem másolhatóak. Azért is nehéz a kvantitatív eszközök alkalmazásában sikeres élenjáró vállalatokat utolérni, mert alkalmazott stratégiájuk egyedi. A professzionális, kvantiatív alapokon nyugvó vállalati stratégiát ugyanis számos olyan tényező befolyásolja (iparági környezet, versenyben elfoglalt hely, megcélzott vevőkör, alkalmazott elemzési és modellezési módszerek,…), amely egyedivé és megismételhetetlenné teszi a vállalatok működését. Az a stratégia, amellyel egy kvantitatív versenyző hosszútávon sikeresen helyt áll a piacon, közel sem biztos, hogy a versenytársnál is sikert eredményez. A kvantitatív alapokon versenyző vállalatok képességei könnyen alkalmazkodnak a környezet változásaihoz, amely elősegíti képességeik kiaknázását. A kvantitatív módszerek alkalmazásában élenjáró vállalatok azáltal, hogy minden külső és belső forrásból származó vállalati információt elemeznek, feldolgoznak, kiértékelnek, olyan többletinformációra tesznek szert, amely kvantitatív módszerek alkalmazásában kevésbé jártas versenytársaknak nem áll a rendelkezésére. Az így nyert többletinformáció segítségével a vevői érték előállításában előnyre tesznek szert a versenytársakhoz képest.

2.1.3. A vállalati folyamatok kvantitatív elemzése

2.1.3.1 A belső és külső vállalati folyamatok vizsgálata

Kvantitatív eszközök a vállalati működés számos területén alkalmazhatóak. Davenport és Harris (2007) külső és belső folyamatokra különítik el a vállalati működést. A külső vállalati folyamatok nem állnak teljesen a vállalat befolyása alatt, így a vevőkkel és a beszállítókkal kapcsolatos folyamatok a külső, míg az egyéb folyamatok a belső folyamatokhoz tartoznak. A különböző kvantitatív módszerek leggyakoribb alkalmazási területeit a 4. ábra mutatja be.

Belső folyamatok	**Külső folyamatok**
Pénzügy és számvitel Kutatás-fejlesztés Humán erőforrás Termelés/szolgáltatás	Vevők Beszállítók

4. ábra: A kvantitatív eszközök lehetséges alkalmazási területei (Davenport-Harris, 2007)

A pénzügyekkel és számvitellel kapcsolatos kvantitatív módszereknek van a legközvetlenebb kapcsolata a vállalat pénzügyi teljesítményével. A különböző jelentések és mutatószámok (Balanced Scorecard) – a vállalat pénzügyi és egyéb működési területeiről – a kvantitatív döntéstámogatás legtipikusabb módszerei. Megjegyzendő, hogy ha egy vállalat csupán különböző jelentéseket és mutatószámokat generál, attól még nem feltétlenül lesz sikeres a kvantitatív módszerek alkalmazásában. Azonban ha ehhez megfelelő vállalati kultúra és menedzsment, egységes vállalati adatbázisok, valamint pontos információkra felépített előrejelző és magyarázó modellek társulnak, akkor azok a kvantitatív módszerekre építő megkülönböztető stratégia részévé válhatnak. A pénzügyekkel és számvitellel kapcsolatos kvantitatív eszközök közül nagy jelentőségű a költségelemzés, amely azt mutatja, hogy a költségek monitorozása még mindig fontos részét képezi a versenyképességnek. A költségek alapos vizsgálata hozzásegítheti a vállalatokat a megfelelő árazási politika kialakításához, a legkedvezőbb értékesítési hálózat megválasztásához, továbbá pontos alapokra helyezheti a vállalati költségekre, árakra és profitokra építő optimalizáló modelleket. Pénzügyi kvantitatív eszközre lehet példa a tevékenységalapú költségszámítás vagy a beruházások, illetve befektetések portfolióinak vizsgálata.

A kutatás-fejlesztés a vállalati működés azon területei közé tartozik, ahol számos kvantitatív eszköz alkalmzaható. Itt alkalmaztak először olyan módszereket, mint a hipotézisvizsgálatok, a kontrollcsoportok vagy a különböző statisztikai elemzések. A számítástechnika és az informatika fejlődésének következtében mára a kutatások jelentős többsége matematikai és statisztikai alapokon nyugszik, így az itt alkalmazott módszerek sikeresen járulhatnak hozzá egy élenjáró kvantitatív alapokon versenyző vállalat működéséhez.

Számos olyan emberi erőforrással kapcsolatos kvantitatív eszköz létezik, amely sikeresen támogathatja egy vállalat versenystratégiáját (Davenport, 2010). Ma már rengeteg olyan adat és információ áll a vállalatok rendelkezésére, amely hozzájárulhatna ezeknek a módszereknek az alkalmazásához, azonban ez a terület még messze kiaknázatlan. A nagyvállalatok jellemzően olyan alkalmazotti információs adatbázisokkal rendelkeznek, amelyek olyan lényeges információkat tartalmaznak a munkavállalókról, mint felvételük ideje, előléptetéseik, jutalmaik és különböző teljesítménymutatóik. De néha még ezen is túlmennek az adatbázisok és nyilvántartják az alkalmazottak képzettségi szintét és azt, hogy milyen továbbképzéseken, programokon vettek részt, hogy fejlesszék magukat különböző területeken. Néhány vállalat felismerte, hogy a humán erőforrás a vállalat egyik legfontosabb és legdrágább erőforrása és ezek a vállalatok olyan emberi erőforrás-menedzsmenthez kapcsolódó kvantitatív módszereket kezdtek el alkalmazni, amelyekkel a vállalati alkalmazottak viselkedése, múltbeli, jelenlegi és jövőbeli teljesítménye érthetőbbé válik. De a humán erőforrásokhoz kapcsolódó kvantitatív eszközök jelentőségét a vállalatok többsége még nem ismerte fel, így ez a terület egy jövőbeli potenciális versenyforrás lehet. Emberi erőforrás-menedzsmenthez kapcsolódó kvantitatív elemző módszerre lehet példa a 360 fokos értékelés, a teljesítményértékelés különböző módszerei vagy a rangsorolás.

A termelési vagy szolgáltatási folyamatok megértésére és optimalizálására régóta alkalmaznak különböző kvantitatív döntéstámogatási módszereket. A kutatás-fejlesztés mellett ez a kvantitatív módszerek alkalmazásának legtipikusabb területe. A vevői értéket előállító termelési és szolgáltatási folyamatok optimalizálására lehet példa a termékszerkezet-vizsgálat, az ütemezés, a különböző hatékonyságvizsgálatok vagy a sorállási rendszerek. A termelés- és szolgáltatásmenedzsment mellett a minőséghez kapcsolódó különböző statisztikai elemzések is ide tartoznak. Jó példája ennek a ma sok vállalatnál alkalmazott Six Sigma módszer.

Azok a vállalati folyamatok, amelyek nem állnak teljes mértékben a vállalat befolyása alatt, külső vállalati folyamatok. A vevőkkel kapcsolatos külső folyamatok nagy része a marketingmenedzsmenthez kötődik. Olyan kvantitatív eszközök alkalmazhatóak a vevőkkel kapcsolatos információk elmélyítésére, mint például a conjoint-elemzés, az ügyfél-életciklus vizsgálat, a hozammenedzsment vagy az igény előrejelzés. A beszállítókkal kapcsolatos vállalati folyamatok elemzésére, vizsgálatára alkalmaznak talán legrégebben kvantitatív eszközöket. Olyan kvantitatív módszerek tartoznak ide, mint például a készletgazdálkodás, a szállítási útvonalak optimalizálása vagy a gyárak telepítési problémája.

2.1.3.2 Kvantitatív eszközök alkalmazása a vállalati gyakorlatban

A különböző kvantitatív módszerek a vállalati működés számos területén sikerrel alkalmazhatóak. Mégis azt tapasztaljuk, hogy a kvantitatív módszerek alkalmazása egyelőre csupán egy potenciális stratégiai versenyforrás, vagyis a különböző kvantitatív eszközök használata még nem terjedt el a vállalati gyakorlatban. Ennek több oka is van. A menedzsment egyrészt túl bonyolultnak tartja a különböző kvantitatív összefüggéseket és úgy véli, hogy logikailag kikövetkeztethető a különböző problémák megoldása. Másrészt azon a véleményen van, hogy a vállalati működés egyes elemei nem modellezhetőek megfelelően, mert vagy túlságosan leegyszerűsítik a valóságot és elnagyoltan képesek csak a probléma megragadására, vagy túlságosan bonyolultak és éppen ezért nehezen vagy egyáltalán nem megoldhatóak. Ezek miatt a tévhitek miatt a kvantitatív eszközök kiterjedt alkalmazása nem jellemző a vállalati gyakorlatban (Koltai, 2003b).

Azok a vállalatok, amelyek felismerték a kvantitatív módszerek alkalmazásának előnyeit, tisztában vannak a különböző kvantitatív módszerek alkalmazási feltételeivel, az általuk nyújtott információkkal és azok felhasználásával, valamint esetleges korlátaival. A kvantitatív elemzéseket használó vállalatok a modellek eredményeit figyelembe veszik adott döntési szituációban. Ez azonban nem azt jelenti, hogy a kapott optimális megoldást egy az egyben alkalmazzák a gyakorlatban, hiszen ennek számos akadálya lehet. Például, hiába számoljuk ki, hogy mennyi egy adott alkatrészből az optimális rendelési tételnagyság, ha a beszállító csak e feletti mennyiséget hajlandó kiszállítani. Azonban ha tisztában vagyunk azzal, hogy mi az optimum és a jelenlegi működés milyen távol esik az optimumtól, akkor ennek gazdasági következményei is számszerűsíthetők. Annak ismeretében pedig, hogy a vállalat hogyan teljesít egy területen az optimálishoz képest, lehetőséget ad a vállalatnak arra, hogy teljesítményét javítsa (például szerződési feltételek módosítása, új beszállító keresése,…) (Koltai, 2003b).

Az optimális megoldás megtalálása nem kizárólagos eredménye a kvantitatív eszközök alkalmazásának. A modellépítés során ugyanis a résztvevők alaposabban megismerik az adott problémát, a vállalat vizsgált működési területét, a különböző tényezők közötti kapcsolatokat és azok egymásra gyakorolt hatását (Farkas et al., 1993; Hillier-Liebermann, 1995; Inczédy et al., 2010). A kvantitatív módszerek alkalmazásában élenjáró vállalatok tehát a modellek optimális megoldásait nem alkalmazzák mindenképpen a gyakorlatban. Az adatok és információk gyűjtése, a probléma megoldási lehetőségeinek számbavétele, a modell felépítése és megoldása hozzásegíti a vállalatot a kérdéskör alaposabb megismeréséhez és a megfelelő megoldás megtalálásához.

Gyakori az a tévhit is, hogy a kvantitatív modellek alkalmazását a számítások elvégzéséhez szükséges adatok hiánya teszi lehetetlenné (Koltai, 2003b). A mai vállalatirányítási rendszerek olyan nagymennyiségű adatot és információt tartalmaznak a vállalati működés minden területéről, amely megkönnyíti a kvantitatív eszközök használatát. A modellépítéshez a vállalatirányítási rendszerből közvetlenül is felhasználhatóak az adatok, de különböző számításokkal további információk nyerhetőek. A kvantitatív eszközök szükségessé teszik, hogy a modell által igényelt információk rendelkezésre álljanak, azonban nem jelent problémát, ha ezek az adatok pontatlanok, mert például számítás vagy becslés útján kaptuk azokat. A pontatlanság hatása ugyanis érzékenységvizsgálattal könnyen kiértékelhető.

Az érzékenységvizsgálat célja annak meghatározása, hogy a modell mennyire érzékeny egy adat, paraméter megváltozására. Az érzékenységvizsgálat gyakran képezi részét a kvantitatív eszközök alkalmazásának (Koltai et al., 2009a). Ez része lehet magának a számításnak (például lineáris programozás) vagy külön vizsgálatot igényelhet (például készletgazdálkodás). Az érzékenységvizsgálatnak két számítási módja van: az analitikus és az empirikus érzékenységvizsgálat. Analitikus esetben a kérdéses paraméter változásának hatása valamilyen képlet segítségével felírható, számítható. Empirikus esetben nem adható meg a vizsgált adat és az eredmény között számszerűsíthető kapcsolat, így a kérdéses paraméter különböző értékeivel elvégezve a számítást megkapható a paraméter változásának eredményre kifejtett hatása.

A kvantitatív eszközök sikeres alkalmazásának két lényeges feltétele van (Koltai, 2003b). Egyrészt fontos, hogy a különböző kvantitatív eszközök alkalmazásába fektetett energia megtérüljön. Ez azt jelenti, hogy a modellel kapott megoldásnak sokkal jobbnak kell lennie, mint ami a modell megoldása nélkül, tiszta logikai úton kikövetkeztethető. És itt kell megemlíteni a különböző számítások gazdaságosságának kérdését is. A kvantitatív számításokhoz szükséges adatokat nem szabad sem túl részletesen, sem túl elnagyoltan kezelni. Az aprólékos adatgyűjtés és a minden részletre kiterjedő vizsgálat olyan méretű modellhez vezethet, amelynek megoldása nehézkes vagy egyáltalán nem lehetséges. Esetleg a kapott megoldás nehezen értelmezhető vagy az aprólékosan felépített és megoldott modell eredményei nem nyújtanak annyival többet, amely kompenzálhatna a pontosság által megkövetelt többlet ráfordításért. Nem érdemes tehát túlságosan részletekbe menően gyűjteni az adatokat, mert úgy a modellezésbe fektetett energia nagy valószínűséggel nem térül meg. Az adatok elnagyolt kezelése ugyanakkor hasonlóan problémás lehet. Előfordulhat, hogy a nagyvonalú adatkezelés miatt a modell is elnagyolt lesz és nem képes a probléma összefüggéseinek leírására és logikailag könnyebben, gyorsabban, kevesebb energia befektetéssel megkapható lenne a megoldás. A modell részletességének is van egy optimuma tehát. A megfelelő méretű modell hatékony segítséget nyújthat a menedzsmentdöntések támogatására. A modell megoldása után érzékenységvizsgálattal vagy egy részterület kiragadásával a problémás paraméterek, területek alaposabban vizsgálathatóak. Így a problémához illeszkedő mélységű analitikai vizsgálat megfelelő információval szolgálhat a döntésekhez. Ebből adódóan egy túl egyszerű kérdést nem érdemes alapos kvantitatív vizsgálatnak alávetni, mert valószínűleg logikus gondolkodással hamarabb megkapható az eredmény. Azonban ha a probléma nagy jelentőséggel bír, újszerű, bonyolult, ismétlődő jelleggel fordul elő, vagy esetleg a menedzsment nem rendelkezik kellő tapasztalattal (Anderson et al., 1994), akkor érdemes a megfelelő részletességű kvantitatív módszerhez fordulni. A kvantitatív módszerek sikeres alkalmazásának további feltétele, hogy a kvantitatív eszközök iránt elkötelezett menedzsmentnek ismernie kell a használt módszerek elméleti hátterét, azok alkalmazási feltételeit, az eredmények érvényességét és a módszerek korlátait.

A következő fejezetben a kvantitatív módszerek egyik legnagyobb területét az operációkutatást és a matematikai programozást tekintem át. Ezen belül a lineáris programozással és az egészértékű programozás egy gyakorlati alkalmazási területével, a gyártósor-kiegyenlítéssel foglalkozom részletesen.

2.2. Optimalizálás matematikai programozási modellekkel

Az operációkutatás, mint alkalmazott tudomány bonyolult rendszerek struktúrájának elemzésével, fejlesztésével foglalkozik (Rapcsák, 1988). Központi problémája a vizsgált rendszer működésének javítása, optimalizálása, valamint a rendszert irányítók döntéseinek támogatása. Az angolszász irodalomban több szinonimát is használnak (management science, operations research, decision science) utalva ezzel a tudományterület fő feladataira, technikáira.

Az operációkutatás megjelenését jellemzően a második világháború idejére datálják, holott már az első világháború alatt voltak olyan események, amelyek alapján megjósolható volt a tudományterület megjelenése. McCloskey (1987) három meghatározó első világháborús technológiai vívmányról ír, amelyek az operációkutatás kialakulásához vezettek: az anyahajókról, a repülőgépekről és a tengeralattjárókról. A jól felszerelt anyahajók segítségével kisebb méretű, de ugyanakkor jobban szervezett flottákkal hatékonyabb támadásokat tudtak végrehajtani. A sikeres ütközetek elérésében a légvédelemnek egyre nagyobb szerepet tulajdonítottak. A tengeralattjárók által kezdeményezett támadásokat pedig elkezdték statisztikai eszközök segítségével elemezni. A két világháború között az operációkutatás területén nem történt említésre méltó előrelépés (McCloskey, 1987). A második világháború elején a brit kormány megbízást adott egy tudósokból és mérnökökből álló csoportnak különböző stratégiai és taktikai problémák elemzésére. A kutatócsoport számos helyzetet megvizsgált és megállapította, hogy tudományos elemzés segítségével sokkal jobb eredmények érhetőek el. Ez az új megközelítés számos ütközet megnyeréséhez segítette hozzá a briteket (Jaiswal, 2003). A második világháború után felismerték, hogy a hadsereg vizsgált problémái más kontextusban, de jelen vannak az iparban, az üzleti életben és az állami szektorban is. Így az operációkutatás különböző módszereit elkezdték a hadseregen kívül is alkalmazni. Az optimalizáló modellek elterjedését a kezdeti sikerek mellett a számítógépek megjelenése nagyban meggyorsította (Hillier-Lieberman, 1995).

Az optimalizálás-elmélet egyes területeit már jóval a világháborúk előtt tárgyalták bizonyos matematikusok és fizikusok (Prékopa, 1980). A szélsőérték meghatározása már a XVI-XVII. században foglalkoztatta a tudósokat (pl. Newton, Leibniz). A nemlineáris programozás volt az első terület, ahol komoly eredményeket értek el. Lagrange 1788-ban publikálta módszerét, amellyel egyenlőséges feltételek mellett lehet függvények szélsőértékét meghatározni. 1798-ban jelent meg Fouriernek egy írása, amelyben a szélsőérték keresést egyenlőtlenségek által meghatározott megengedett megoldási térben tárgyalja (Schrijver, 1998). A nemlineáris programozás kifejezést elsőként Kuhn és Tucker alkalmazták egy 1950-ben megjelent cikkükben, amelyben az optimalitás szükséges feltételeit adták meg – bár 1939-ben Karush ugyanezeket az eredményeket már megkapta. Hasonló a helyzet a lineáris programozással is. A lineáris programozási feladatokat hatékonyan megoldó szimplex algoritmust Dantzig 1947-ben fedezte fel – bár magát a lineáris programozási feladatot Kantorovich 1939-ben már tárgyalta (Rapcsák, 1988).

Az operációkutatásban a döntési probléma rendszerint modellezés segítségével kerül elemzésre. Az optimalizáláshoz alkalmazott matematikai modellek különböző változókból és az azok közötti kapcsolatot leíró függvényekből állnak. Egy függvény a független és függő változók közötti kapcsolatot írja le. A matematikai modellek a függvény jellege és a független változó tartalma alapján az 5. ábra szerint osztályozhatóak.

Kategóra	Függvény formája	Független változók	Operációkutatási módszer
Előíró modellek	ismert, jól meghatározott	ismert, a döntéshozó befolyása alatt állnak	matematikai programozás, kritikus út módszer
Előrejelző modellek	nem ismert, rosszul definiált	ismert, a döntéshozó hatáskörébe tartozik	előrejelzés, regressziószámítás
Leíró modellek	ismert, jól meghatározott	nem ismert vagy bizonytalan	sorállási rendszerek, szimuláció

5. ábra: A matematikai modellek osztályai
(Ragsdale, 2007)

Az optimalizálás elmélet egyik legnagyobb területe a matematikai programozás, melynek központi problémája a legkedvezőbb alternatíva kiválasztása a korlátozó feltételek által meghatározott lehetőségek közül (Hillier-Lieberman, 1995; Kantorovich, 1960; Winston, 2003). Fontos megjegyezni, hogy a programozás szó a tervezés szinonimájaként szerepel a kifejezésben és nem a számítógépes programozásra utal. Bár ma már a matematikai programozás elképzelhetetlen számítógépek nélkül – hiszen az adatok feldolgozásához, tárolásához és a számításokhoz elengedhetetlen kellékei a modellezésnek –, magának a programozás kifejezésnek nincs köze a számítógépekhez (Williams, 1985).

Matematikai programozás alatt feltételes szélsőérték-számítást értünk. Egy célfüggvény maximumát vagy minimumát kell meghatározni a korlátozó feltételek által meghatározott megengedett megoldások halmazán. Cél a döntési változók azon értékeinek meghatározása, amely a célfüggvény maximumát vagy minimumát adja. Általánosan a következőképpen írható fel egy matematikai programozási feladat (Az alkalmazott jelölések összefoglalása az 1. sz. mellékletben található.):

$$\begin{aligned} &\text{Max } OF = f(\mathbf{x}) \\ &g_j(\mathbf{x}) \le b_j \qquad \forall j \in J, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $OF = f(\mathbf{x})$ a célfüggvény értéke, $\mathbf{x}$ a döntési változókat tartalmazó vektor, $g_j(\mathbf{x}) \le b_j$ pedig a korlátozó feltételeket jelenti.

A *célfüggvény* ($OF = f(\mathbf{x})$) a döntési változók és a döntés eredménye közötti matematikai függvénykapcsolatot írja le. Megjegyzendő, hogy (1)-ben minimalizálási feladat esetén Max helyett Min áll. A matematikai programozási modell *döntési változói* ($\mathbf{x}$) a döntéshozó álatal befolyásolhatóak. A feladat megoldásakor cél a döntési változók olyan kombinációjának meghatározása, amellyel a célfüggvény a lehető legjobb (legkisebb vagy legnagyobb) értéket veszi fel adott korlátozó feltételek mellett. A *korlátozó feltételek* ($g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$) azt a környezetet írják le, amelyekben a feladat optimális megoldása keresendő.

A matematikai programozási feladatokat – a célfüggvény, a korlátozó feltételek és a döntési változók tulajdonságai szerint – a szakirodalom többféleképpen csoportosítja. A matematikai programozási feladatok a következő szempontok szerint osztályozhatók (Nagy, 1996):

1.) A modellekben szereplő *függvények típusa* szerint megkülönböztetünk lineáris és nemlineáris modelleket. Ha minden feltételi függvény és a célfüggvény is lineáris, akkor lineáris programozásról (LP) beszélünk. Ha ezek közül legalább egy függvény nemlineáris, akkor nemlineáris programozásról van szó.
2.) A matematikai programozási feladatokat csoportosíthatjuk a *változók értelmezési tartománya* szerint is. A változók értelmezési tartománya lehet folytonos vagy diszkrét. Amikor a döntési változók egy adott intervallum bármely pontját felvehetik, akkor folytonos programozási feladatról beszélünk. Diszkrét a matematikai modell, ha a döntési változók – vagy legalább egy részük – egy adott intervallumnak csak meghatározott pontjait vehetik fel. A diszkrét vagy egészértékű programozás egy sajátos esete, amikor a döntési változók értéke nulla vagy egy lehet. Ekkor bináris programozásról beszélünk.
3.) A matematikai programozási feladatokat csoportosíthatjuk a paraméterek *véletlentől való függése* szerint is. Ebben a felosztásban beszélhetünk determinisztikus vagy sztochasztikus modellekről. Amennyiben a modellben szereplő paraméterek pontosan meghatározható konstansok, akkor a feladat determinisztikus. Ha a paraméterek között van véletlentől függő mennyiség is, akkor sztochasztikus programozásról van szó. A sztochasztikus modellek igen komplexek lehetnek, növelve ezzel a számításidőt, ezért a gyakorlatban sokszor determinisztikus modelleket használnak. Ilyenkor a paraméterek változása különféle egyéb technikák segítségével vizsgálható. Például az érzékenységvizsgálat segítségével könnyen megkapható, hogy a modell paraméterinek változása hogyan befolyásolja az optimális megoldást. Megjegyzendő, hogy a modellezés során a bizonytalanság a fuzzy logika segítségével is kezelhető (Koltai et al., 2009b). Ennek a nem olyan hosszú múltra visszatekintő megközelítésnek a lényege, hogy a paraméterek értéküket a tagsági függvény által meghatározott mértékben veszik

fel – és nem bizonyos valószínűséggel, mint sztochasztikus esetben (Bellman-Zadeh, 1970; Koltai-Tatay, 2009; Zimmermann, 1976; Zimmermann, 1983).

A gazdaságtudományok számos területe alkalmazza a matematikai programozást. A mikroökonómiában például a hasznosság maximalizálására vagy a preferenciák vizsgálatára használják (Varian, 2005; Kopányi, 2007). A játékelmélet különböző problémái szintén vizsgálhatóak matematikai programozási modellekkel. Ilyenek például a mátrix játékok (lásd Kaufmann, 1964; Mészáros, 2002). A pénzügyek területén többek között a beruházásokkal kapcsolatos döntések támogatásában juthat ennek a tudományterületnek jelentős szerep (Andor-Tóth, 2010). Számos menedzsment tudomány is sikerrel alkalmazza különböző részterületeit (például termelésmenedzsment, marketingmenedzsment, logisztika) (Koltai, 2001; Davenport-Harris, 2007).

A matematikai programozás egyik legnagyobb és a gyakorlatban legelterjedtebb területe a lineáris programozás. Amennyiben a döntési változók csak nulla vagy egy értéket vehetnek fel, akkor bináris programozási feladatról beszélünk. A továbbiakban a lineáris programozási modellekről és bináris programozás egy elterjedt alkalmazási területéről a gyártósor-kiegyenlítésről lesz szó.

2.2.1. Lineáris programozás

Lineáris programozási feladatról beszélünk, ha (1) minden függvénye lineáris, a döntési változók értelmezési tartománya folytonos, valamint a modell paraméterei determinisztikusak. Ezen megszorítások ellenére számos gyakorlati probléma jól közelíthető lineáris programozással. A függvények linearitása legtöbbször jól közelíti a valóságot. Azokban a szélsőséges esetekben (például túlfeszített üzemmenet, tanulási hatás,...), amikor a lineáris függvénykapcsolat helyett exponenciális vagy hatványjellegű függvények jobb leírását adják az adott összefüggésnek, akkor a függvények szakaszonkénti linearizálása lehet a modellező segítségére. Azért fontos, hogy lineáris függvények szerepeljenek a modellben, mert ezek a problémák matematikailag könnyen kezelhetőek. A különböző megoldó algoritmusok kiforrtak, a mai számítástechnikai fejlettség mellett a nagyméretű feladatok is elhanyagolható időn belül megoldhatóak. A folytonos értelmezési tartományú döntési változók alkalmazása azért fontos, mert ekkor a menedzsment szempontból fontos érzékenységvizsgálati számítások elvégezhetőek, az eredmények a döntéstámogatásban hatékony segítséget nyújthatnak. A determinisztikus értékek különböző mértékű változásainak optimális megoldásra kifejtett hatásai érzékenységvizsgálattal vagy a modell módosított paraméterekkel történő újbóli megoldásával egyszerűen vizsgálhatóak.

A lineáris programozási problémákban a cél a legjobb alternatíva megtalálása. A cél általában valamilyen gazdasági eredményhez kötött. Ez a vállalati működés területétől függően igen változatosan kerülhet megfogalmazásra (például legmagasabb profit, legalacsonyabb költség, legrövidebb átfutási idő,…). A korlátozó feltételek a probléma jellegétől függően leírják azt a gazdasági, technológiai és társadalmi környezetet, amelyben a legkedvezőbb lehetőséget keressük (Hillier-Lieberman, 1995; Kaufmann, 1968).

2.2.1.1 A lineáris programozás előzményei

A lineáris programozás előfutárai közé sorolhatjuk Joseph Fouriert, Carl Friedrich Gausst, Paul Gordant, akik az 1800-as években és Vilfredo Paretot, aki az 1900-as évek elején lineáris egyenlőtlenségekkel és egyenlőségekkel foglalkoztak. A lineáris programozás elméletével foglalkozó első kutatók között meg kell említeni Farkas Gyulát is, akinek a XIX. század fordulóján publikált – homogén, lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó – eredményei (Farkas, 1902) alapvető fontosságúak az optimalizálás elméletben. A témához szorosabban kapcsolódó munkák az 1930-as években jelentek meg. Az egymástól még elszigetelten dolgozó kutatók olyan látszólag egymástól távol eső problémákkal foglalkoztak, amelyek megoldása mind visszavezethető lineáris egyenlőtlenség vagy egyenlőség rendszerekre (például Motzkin lineáris egyenlőtlenség-rendszerei, Leontief-féle input-output modell, Kantorovich termelésütemezés problémája és Hitchcock szállítási feladata). Nagy fejlődési mérföldkő volt 1947, amikor George Dantzig kifejlesztette a szimplex módszert, amelynek segítségével lineáris korlátozó feltételekből és lineáris célfüggvényből álló szélsőérték feladat megoldása könnyen meghatározhatóvá vált (Dantzig, 1951). Az ezt követő robbanásszerű ugrás a számítási technológia és a számítógépek fejlődésének volt köszönhető. Dantzig munkáját egy 1949-es konferencián mutatta be – írásban csak két évvel később jelent meg. Ennek hatására elindultak az első folyóiratok (Operational Research Quarterly, Operations Research). Miután a szimplex módszerrel kellőképpen megalapozottá vált a tudományterület, elindulhatott annak elméleti és gyakorlati kiteljesedése. A lineáris programozás elméletét kutatók a megoldó módszerek fejlesztésével, új matematikai struktúrák kialakításával és új részterületek feltárásával foglalkoztak. Az 1950-es évek elméleti eredményei közé tartozik többek között a degeneráció problémájának feltárása (Charnes, 1952), a dualitás és a duál szimplex módszer, az egészértékű programozás és az ezeket a feladatokat megoldó elágazás és korlátozás (Branch and Bound) módszerének felfedezése. Ekkor ismerték fel Farkas Gyula lineáris egyenlőtlenségrendszerekre vonatkozó kutatási eredményeinek fontosságát is (Gábos, 1997). A fejlődés nem korlátozódott csupán az elméletre, egészen új területeken kezdték el alkalmazni a matematikai programozást. Markowitz (1952) egy pénzügyi befektető várható diszkontált hozamát maximalizáló portfolió összeállítására egy nemlineáris programozási feladatot alkalmazott. Charnes és szerzőtársai (Charnes et al, 1952) egy lineáris programozási modell segítségével meghatározták a repülőgép-üzemanyag optimális összetételét. Ford-Fulkerson (1956) egy korábban felvetett vasúthálózati probléma megoldására alkalmazták a lineáris programozást. Ezzel a cikkükkel fektették le a hálózati folyammodellek (Network Flow Models) alapjait. Az 1960-as években a lineáris programozáshoz kapcsolódóan a nemlineáris programozás, az egészértékű programozás, valamint a hálózati folyammodellek fejlődése gyorsult fel. A számítógépek fejlődése elősegítette e problémák megismerését, valamint lehetővé tette a feladatok méretének növelését. Az 1970-es években a megoldó algoritmusok hatékonyságának javítása került középpontba. Az 1980-as évek nagy eredménye Karmarkar belső pontos megoldó módszere volt, amellyel lehetőség nyílt igen nagyméretű feladatok gyors megoldására. A felhasználóbarát szoftverek elterjedése, a táblázatkezelő alkalmazások mindennapivá válása, a számítási teljesítmény és a tároló kapacitás növekedése – a költségek csökkenésével – az optimalizálást mindenki számára elérhetővé tette (Eiselt-Sandblom, 2007).

2.2.1.2 LP feladatok a gyakorlatban

A fejezetben a lineáris programozás jellegzetes alkalmazási területeit mutatom be. Először különböző vállalati funkciók LP feladatként megfogalmazható problémáival foglalkozom – kiemelten kezelve a termelésmenedzsmenthez kapcsolódó eseteket. Ezután kitérek egyéb fontos lineáris programozási modellekre is.

Egy szervezet marketingtevékenységének fontos kérdése lehet a különböző médiumokban elhelyezett hirdetések optimális összeállítása (Media Selection). A cél általában a maximális nézettség elérése. A legtipikusabb korlátozó feltétele ennek a típusú problémának a rendelkezésre álló pénzügyi keretek megadása. A hirdetések optimális összeállításakor a döntéshozók rendelkezhetnek bizonyos preferenciákkal a különböző médiumokra vonatkozóan (például adott médiumban elhelyezett hirdetések száma vagy a különböző médiumokban elhelyezett hirdetések egymáshoz viszonyított aránya). Az optimális reklámkampány megtalálásakor figyelembe vehető továbbá, hogy különböző szegmensekben eltérő lehet a hirdetések fogadtatása, a vásárlási hajlandóság (Bass-Lonsdale, 1966). A marketingmenedzsment egy másik olyan problémája, amelyben a lineáris programozás a döntéshozók segítségére lehet, a marketing piackutatás megszervezése (Market Research). A különböző információ-szerzési eljárások (fókuszcsoportos vizsgálat vagy mélyinterjú különböző időpontokban, kérdőív,…) közül tipikusan a legkisebb költségű megoldás megtalálása a feladat (Anderson et al., 1994). De cél lehet a legnagyobb válaszadási arány elérése is. A korlátozó feltételek a különböző alternatívák jellemzőit ragadják meg (mennyi időt vagy pénzt igényel egy-egy információ szerzési eljárás lefolytatása, milyen eredménnyel jár egy-egy módszer alkalmazása).

A pénzügyek területén a lineáris programozást jellemzően befektetési portfoliók összeállításakor vagy pénzügyi tervezéskor alkalmazzák (Anderson et al., 1994). Egy portfolió elemeinek megválasztásakor (Portfolio Selection) a várható hozam maximalizálására, illetve az érzékelt kockázat minimalizálására törekednek a döntéshozók. A hozam maximalizálását a célfüggvény írja elő. A kockázat diverzifikációval mérsékelhető. A korlátozó feltételek jellemzően a diverzifikáció módját szabályozzák (Ogryczak, 2000; Ijiri et al., 1963). A pénzügyi tervezés (Financial Planning) célja különböző pénzügyi termékek optimális kezelése. Bankok illetve különböző befektetési intézmények ügyfeleiktől pénzt gyűjtenek be és azokat különböző pénzügyi eszközökbe fektetik. Céljuk a hozam, illetőleg saját nyereségük maximalizálása. A korlátozó feltételek a megtakarítások kezelését szabályozzák (például adott időpontban álljon rendelkezésre szükséges mennyiségű kézpénz) (Anderson et al., 1994).

A lineáris programozás egyik legjellemzőbb vállalati alkalmazási területe a termelésmenedzsment. Számos termelésmenedzsment döntés megkönnyíthető lineáris programozási modellek alkalmazásával. Ezek a problémák jellemzően az allokációs problémák családjába tartoznak. Az allokációs problémákban a rendelkezésre álló szűkös erőforrásokat kell valamilyen cél szerint optimálisan szétosztani. A termelésmenedzsment központi kérdéskörébe tartozó gépórán és munkaórán túl ilyen szűkös erőforrás lehet például valamilyen nyersanyag vagy alapanyag, pénz, gazdasági tevékenység (Eiselt-Sandblom, 2007). A terméléstervezés a legtipikusabb gyakorlati alkalmazási területe az LP feladatoknak. A terméléstervezés – hasonlóan a vállalat egyéb funkcionális területeihez – szintekbe szerveződve valósul meg. A stratégiai szintű, hosszútávra vonatkozó termelési kérdésekkel az aggregált terméléstervezés foglalkozik. A termelésütemezési és termékösszetétel problémák közép és rövid távú termelési kérdésekkel foglalkoznak (Nahmias, 1997).

Az aggregált terméléstervezés (Aggregate Production Planning) az optimális termékszerkezet és a gyártáshoz szükséges erőforrások optimális szintjének meghatározásával foglalkozik (Koltai, 2001). A modell céljától és a problémától függően összevontan, aggregáltan kezelhet több tényezőt is (idő, termék, erőforrások, igény adatok). A cél általában a legkisebb költségű, vagy a legnagyobb profitú vagy fedezetű termékszerkezet meghatározása. A modellezés során figyelembe vehetőek a rendelkezésre álló erőforrások (dolgozók, gépek, üzemek,…), illetve ezek módosításának lehetőségei (elbocsátás, felvétel, vásárlás, eladás, bérlés, lízingelés,…), a rendelkezésre álló raktározási kapacitás, a különböző gyártási formák üteme, a vevői igény kielégítésének lehetőségei.

A lineáris programozás megjelenése óta sokat fejlődött a számítástudomány. A különböző megoldó algoritmusok és a felhasználóbarát szoftverek sokféle probléma megoldását lehetővé teszik (Graves et al., 1993). A gyakorlatban mégis a könnyen felírható, elhanyagolható időn belül megoldható modellek alkalmazása dominál. A termeléstervezési modellek tipikusan LP feladatként kerülnek felírásra. A lineáris termeléstervezés egyik leggyakrabban alkalmazott alapmodellje a különböző gyártási és raktározási költségeket vizsgálja és e költségek minimalizálásával határozza meg az optimális termelési tervet. Például a gyártási és raktározási költséget minimalizáló lineáris termeléstervezési modell a következőképpen írható fel (Nahmias, 1997):

$$\mathrm{Min}\sum_{t=1}^{T}\left(f_t F_t + e_t E_t + i_t I_t + g_t G_t + t_t T_t + u_t U_t + a_t A_t\right) \qquad (2)$$

$$W_t - W_{t-1} - F_t + E_t = 0 \qquad t = 1,...,T \qquad (3)$$

$$I_{t-1} + G_t + A_t - I_t = D_t \qquad t = 1,...,T \qquad (4)$$

$$G_t - Hn_t W_t - T_t + U_t = 0 \qquad t = 1,...,T \qquad (5)$$

$$F_t, E_t, I_t, G_t, T_t, U_t, A_t \geq 0$$

A modell a munkaerőszint módosításnak (f_t és e_t), a raktározásnak (i_t) és a különböző gyártási költségeknek (r_t, t_t, u_t, a_t) a figyelembe vételével határozza meg az optimális erőforrás allokációt. (3) szerint a t időszakban felvett (F_t) és elbocsátott (E_t) dolgozók száma, a $t-1$ időszakban jelen lévő dolgozók számának (W_{t-1}) ismeretében, megadja a t időszak dolgozóinak számát (W_t). Könnyen belátható, hogy egy időszakban vagy csak felvétel, vagy csak elbocsátás lehetséges, mert csak így lehet a költségek szintje minimális. (4) előírja, hogy a $t-1$ időszak végén a raktárban lévő termékek száma (I_{t-1}), valamint a t időszakban a vállalat (G_t) és az alvállalkozók (A_t) által gyártott termékek mennyisége fedezi a t időszak igényét (D_t) és a raktározásra kerülő mennyiséget (I_t). A vállalat a t időszakban rendelkezésre álló munkanapok (n_t), valamint a dolgozók számának (W_t) figyelembe vételével, H termelékenységi együttható mellett Hn_tW_t termék legyártására képes rendes munkaidő alatt. Ha $G_t \geq Hn_t W_t$, vagyis több termék került legyártásra adott időszakban, mint amennyire a vállalat rendes munkaidőben képes, akkor a t időszakban túlóra volt, így annak többletköltségeit is figyelembe kell vennünk a termelési terv elkészítésekor. A t időszakban a túlóra alatt készült termékek száma $T_t = G_t - Hn_tW_t$, így a túlóra többletköltsége t_tT_t, ahol t_t a túlóra fajlagos gyártási többletköltsége a t időszakban. Ha viszont $G_t \leq Hn_tW_t$, akkor a termelés elmarad a paraméterek által meghatározott, elméletileg lehetséges szinttől. Ilyenkor a kihasználatlan kapacitás költségét kell figyelembe venni (Sebestyén-Koltai, 2007) – amely az el nem készült termékek darabszámával fejezhető ki, $U_t = Hn_tW_t - G_t$. Tehát a kihasználatlan kapacitás többletköltsége u_tU_t, ahol u_t a kapacitás-kihasználatlanság fajlagos költsége a t időszakban ((5)). Nyilvánvalóan egy időszakban vagy csak túlóra, vagy csak kihasználatlan kapacitás fordulhat elő, hiszen a terv csak így valósulhat meg a legkisebb költséggel. A modell nem számol a dolgozók bérköltségével, hiszen ezt mindenképpen ki kell fizetnie a vállalatnak.

Az ismertetett modell számos gyakorlati szempontot figyelembe vevő korláttal kiegészíthető. Például a be- és kiszállítás bizonytalanságaival szemben biztonsági készletek (ss_t) tartásával lehet védekezni:

$$I_t \geq ss_t \qquad t = 1,...,T . \tag{6}$$

A biztonsági készlethez hasonlóan a munkaerőszintre, a gyártott mennyiségre, vagy a raktárkészletre is fogalmazhatunk meg további korlátozó feltételeket. Előfordulhat például, hogy technológiai okok miatt egy bizonyos mennyiségnél (B_t) nem tudunk többet gyártani a t időszakban:

$$G_t \leq B_t \qquad t = 1,...,T . \tag{7}$$

Az alapmodellben a (4) igényegyenletek alapján a raktározott mennyiség csak nemnegatív érték lehet. Azonban a negatív készletnek van gyakorlati jelentősége. Ha a termelési periódus egy t időszakának végéig a kumulált igény meghaladja a kumulált termelést, akkor hiány keletkezik. Ha a ki nem elégített igény miatt vásárlókat veszít a vállalat, akkor ennek pénzügyi hatásait nem hagyhatjuk figyelmen kívül. Ezen megfontolás alapján a tényleges raktárkészlet felfogható egy pozitív (I_t^+) és egy negatív (I_t^-) raktárkészlet különbségeként az alábbiak szerint:

$$I_t = I_t^+ - I_t^- \qquad t = 1,...,T \tag{8}$$

$$I_t^+, I_t^- \geq 0 .$$

Ebben az esetben a pozitív vagy a negatív raktárszinttel szemben kell elszámolni a költségeket raktározási (i_t^+), illetve hiány költség (i_t^-) formájában (Koltai, 2001). Fontos kérdés lehet a gyakorlatban a termelési ütem egymás utáni időszakokban történő módosítása. Az igénykövető gyártási ütem (G_t=D_t) számos akadályba ütközhet, így például előírható az igény követésének mértéke a következők szerint:

$$G_t = D_t + \alpha\left(G_{t\text{-}1} - D_t\right) \qquad t = 1,...,T\ ;\ 0 \le \alpha \le 1\,, \tag{9}$$

ahol α egy menedzsment által meghatározott simítási konstans. α értékével a termelés igényhez igazításának mértékét írhatjuk elő. A termelés egyenletességéhez hasonlóan a készletek kiegyenlített szintje is kívánatos lehet egy vállalatnál. A raktárszint kívánt mértékű ingadozásának előírására a következő kiegészítést tehetjük:

$$G_t = D_t + \alpha\left(G_{t\text{-}1} - D_t\right) + \beta\left(I_k - I_{t\text{-}1}\right) \quad t = 1,...,T\ ; \\ 0 \le \alpha \le 1;\ 0 \le \beta \le 1. \tag{10}$$

A raktárszint-simítási konstans (β) segítségével a menedzsment előírhatja, hogy mekkora készletszint-ingadozást tart elfogadhatónak.

Az aggregált termelési terv általában nem valósítható meg egy az egyben a valóságban, mivel számos tényezőt aggregáltan kezel. Éppen ezért szükséges az aggregált termelési terv lebontása (Kovács, 2001; Nahmias, 1997). A termeléstervezés eredményeit figyelembe véve, a kapott végeredményeket inputként felhasználva részletesebb termelési terv készíthető. Ilyen probléma lehet például a termékszerkezet vizsgálat, amelyben meghatározandó a különböző termékekből gyártandó mennyiség adott termelési periódusban rendelkezésre álló erőforrások figyelembe vételével. A nyereség- vagy fedezetmaximalizáló lineáris programozási modell így írható fel (Kaufmann-Faure, 1969; Johnson-Montgomery, 1974):

$$\text{Max}\sum_{w=1}^{W}\left(p_w - q_w\right)x_w \tag{11}$$

$$\sum_{w=1}^{W} v_{wl}x_w \le B_l \qquad l = 1,...,L \tag{12}$$

$$x_w \le U_w \tag{13}$$

$$x_w \ge L_w\,. \tag{14}$$

A célfüggvényben vagy a fajlagos nyereség, vagy a fajlagos eladási ár (p_w) és fajlagos közvetlen költség (q_w) különbsége, a fajlagos fedezet szerepel. Olyan termelési tervhez jutunk a (11)-(14) modell megoldásával, amely meghatározza, hogy az egyes terméktípusokból mekkora mennyiség legyártása az optimális (x_w) – figyelembe véve a különböző piaci, technológiai előírásokat. A program meghatározása során figyelembe vesszük, hogy mekkora adott terméktípus fajlagos erőforrás-szükséglete (v_{wl}), valamint a szükséges erőforrásból mekkora a rendelkezésre álló mennyiség (B_l). Amennyiben a termékszerkezet probléma egy aggregált termeléstervezési modell eredményeit használja fel, akkor a feltételek között elő kell írni, hogy a termékszerkezet problémában vizsgált termékek – adott termékféleséghez tartozó – mennyisége egyezzen meg az aggregált termelési tervben ennek megfelelő aggregált termékkel.

A termelés még részletesebb megtervezésének kérdése lehet a folyamat kiválasztási probléma, amelyben a rögzített termelési mennyiségek előállításra a rendelkezésre álló lehetőségek közül kell kiválasztani a leginkább megfelelőt. Egy termék legyártásának számos módja lehet figyelembe véve a felhasznált nyersanyagokat, az igénybe vett erőforrásokat, a megmunkálási sorrendet, a szállítási útvonalat. A tervezési periódusban a különböző lehetőségek korlátosak, így megfogalmazható egy folyamat-kiválasztási optimalizálási feladat. A probléma lényege, hogy minimális költségek mellett meg kell határozni, hogy mely folyamatok mely termékek előállításában vesznek részt – figyelembe véve a rendelkezésre álló erőforrások szűkösségét és a gyártani kívánt termékmennyiségeket. A modell a következőképpen írható fel (Johnson-Montgomery, 1974):

$$\mathrm{Min} \sum_{v=1}^{V} \sum_{w=1}^{W} c_{vw} x_{vw} \tag{15}$$

$$\sum_{v=1}^{V} x_{vw} = D_w \tag{16}$$

$$\sum_{v=1}^{V} \sum_{w=1}^{W} a_{vwl} x_{vw} \leq B_l \qquad l = 1,...,L \tag{17}$$

$$x_{vw} \geq 0 . \tag{18}$$

A (11)-(14) LP modellekhez hasonlóan írhatók fel az úgynevezett keverési problémák (Blending Problem) is, amelyek hosszú múltra tekintenek vissza. Az egyik első ilyen feladat Charnes és szerzőtársai (Charnes et al., 1952) nevéhez fűződik. Ebben a feladatban egy a specifikációknak megfelelő, maximális profitot eredményező repülőgép üzemanyag keverék előállítása volt a cél. Az LP feladatként megfogalmazott keverési problémákban a cél az alapanyagok vagy nyersanyagok optimális összetételének meghatározása az előírásoknak, követelményeknek megfelelő végtermék(ek) előállítása során. A célfüggvény irányulhat a költségek minimalizálására vagy a nyereség maximalizálására. A korlátozó feltételeket a rendelkezésre álló nyersanyagok, valamint a termékspecifikációk határozzák meg. Ilyen keverési problémával találkozhatunk például az élelmiszeriparban, a vegyiparban, az olajiparban, a textiliparban, vagy a fémiparban (Farkas et al., 1993; Garvin et al., 1957).

Tipikusan LP problémaként fogalmazható meg a táplálási feladat (Diet Problem). Az első táplálási feladat még a lineáris programozás és a szimplex módszer megszületése előtt került felírásra (Stigler, 1945). A – lineáris programozás ismeretének hiányában – logikai úton meghatározott megoldás igen közel volt a később meghatározott optimális megoldáshoz. A táplálási feladatban különböző tápértékkel bíró élelmiszereket kell a megfelelő cél elérése érdekében összeválogatni. Két alaptípusát különítjük el a táplálási feladatnak. Vagy minimalizáljuk a javasolt étrend költségeit, miközben a korlátozó feltételek segítségével biztosítjuk a kívánt tápértékek jelenlétét, vagy maximalizáljuk a diéta kívánt tápértékét, figyelembe véve a diétára rendelkezésre álló pénzügyi keretet (Eiselt-Sandblom, 2007).

A szállítási feladat a lineáris programozás egy önálló területévé nőtte ki magát. Az első ilyen feladat Hitchcock nevéhez fűződik, aki még a lineáris programozás kialakulása előtt felírta ezt a problémát (Eiselt-Sandblom, 2007). A szállítási feladat lényege, hogy adott kínálattal rendelkező kiinduló állomásokról ki kell elégíteni a célállomások adott termék iránti igényét a lehető leggazdaságosabban.

A lineáris programozásból kinőtt, hasonló tevékenységeket folytató szervezeti egységek összehasonlításra alkalmas relatív hatékonyságvizsgálat, a Data Envelopment Analysis (DEA) egy önálló tudományterületté vált. A DEA célja a hatékonyság-javítás lehetőségének feltárása. A Data Envelopment Analysis alapjait Charnes és szerzőtársai 1978-as cikkükben fektették le (Charnes et al., 1978). Azonban a gazdasági hatékonyság kérdése már korábban is foglalkoztatta a kutatókat. Farell 1957-ben a technikai és allokációs hatékonyság alapján definiálta az egész rendszer hatékonyságát, amelyet azóta az irodalomban gazdasági hatékonyságként emlegetnek (Murillo-Zamorano, 2004). A DEA döntési egységek összehasonlításával foglalkozik. Ilyen döntési egység lehet például egy étterem-, szálloda- vagy üzletlánc egy-egy étterme, szállodája vagy üzlete, egy egyetem különböző karai, egy kórház különböző osztályai. A modell lényege a döntési egységek súlyozott működési jellemzőinek, outputjainak (például kiszolgált ügyfelek száma, forgalom nagysága,…) és súlyozott erőforrás-felhasználásuknak, inputjainak (alkalmazottak száma, a létesítmény alapterülete,…) az összehasonlítása (Charnes et al., 1978). Az összehasonlítás eredményeként megkapható, hogy a szervezeti egységek közül melyik működik a leghatékonyabban és az érzékenységvizsgálati eredmények ismeretében meghatározható az egyes szervezeti egységek hatékonyság-javításának iránya.

Az LP feladatok érzékenységvizsgálata fontos részét képezi az LP modellek alkalmazásának. A különböző érzékenységvizsgálati eredmények ismeretében a menedzsment képet kaphat arról, hogy mennyire stabil a kapott optimális megoldás. A mai felhasználóbarát szoftverek a modell megoldása után az optimális megoldás mellett az érzékenységvizsgálati eredmények strukturált megjelenítésére is lehetőséget biztosítanak. Ezek az eredmények hatékony segítséget jelenthetnek a gyakorlatban. Azonban abban az esetben, ha az LP feladat degenerált, akkor a szoftverek menedzsment szempontból félrevezető érzékenységvizsgálati eredményeket adhatnak. A probléma megoldására kidolgoztam egy számítási módszert (lásd 3.2 fejezet), amelynek segítségével a menedzsment szempontból korrekt eredmények megkaphatóak.

2.2.2. Gyártósor-kiegyenlítés, mint bináris programozási feladat

Az olyan LP feladatok, amelyekben egy vagy néhány döntési változó egészértékűségét írjuk elő egészértékű programozási feladatok (Integer Programming). Ha minden döntési változó egészértékű, akkor tiszta egészértékű programozásról (Pure Integer Programming) van szó. Az egészértékűség egy speciális esete, ha a modell változói csak nulla vagy egy értéket vehetnek fel, ezek bináris programozási feladatok (Binary Programming). Ezeknek a feladatoknak számos alkalmazási területe ismert. Ilyen például a hátizsák feladat, amelyben a különböző tárgyakat úgy kell összeválogatni, hogy azok a maximális hasznosságot nyújtsák, miközben megfelelnek a súlykorlátoknak; vagy a személyzetütemezési probléma, amelyben a vállalat dolgozóinak legkisebb költségű munkarendjét kell meghatározni a különböző előírások figyelembe vételével (Vizvári, 2006).

Bináris programozási feladattal a termelésütemezés gyártósor-kiegyenlítési problémája jól modellezhető. A gyártósor-kiegyenlítés tevékenységek szervezésével foglalkozik. Ez a klasszikus termelési probléma mindenhol felmerül, ahol egymás után többször kell elvégezni ugyanazokat a feladatokat (Koltai, 2003a). Példaként említhető a különböző járművek (motorkerékpár, autó), elektronikai berendezések (kávéfőző, hűtőszekrény, mobiltelefon) összeszerelése. Megjegyzendő, hogy bizonyos szolgáltatások is kezelhetőek gyártósorszerűen. Ilyen lehet például bizonyos egészségügyi szolgáltatások vagy ügyviteli feladatok szervezése.

2.2.2.1 A gyártósor-kiegyenlítés kialakulása

Az első gyártósorszerű működést a francia forradalom idején jegyezték fel. A tömegtermelés megjelenése Eli Whitney nevzéhez fűződik. A fegyvergyártást több egyszerű, könnyen megtanulható és begyakorolható műveletre bontotta és több emberrel végeztette, mert felismerte, hogy adott idő alatt több termék állítható elő, ha a fegyverek összeszerelését nem egy, hanem több ember végzi (Salveson, 1955; Wild, 1972). A komplex munkafolyamat kis, könnyen elsajátítható egységekre bontása, vagyis a specializáció Adam Smith nevéhez fűződik. Adam Smith *A gazdasági növekedés* című munkájában kifejtette, hogy a specializáció segítségével több termék állítható elő, ami alacsonyabb árakat eredményez és végső soron a piacok kiterjesztéséhez vezet. A tömegtermelés tökéletesítése Henry Ford nevéhez fűződik. Ő volt az első, aki olyan gyártósort működtetett, ahol a termékeket egy szalagon továbbították. Az ipari forradalom idején az autók tömegtermelésével megindult a gyártósorok és a szalagszerű gyártás elterjedése. Ford 1913. április 1-jén indította el első gyártósorát a Highland Park gyártóüzemében, amelyen lendkerekek mágnesét szerelték össze. Az új szerelési módszernek köszönhetően a hatékonyság exponenciálisan növekedett, így más alkatrészeket is gyártósorok segítségével kezdtek el összeszerelni: motort, karosszériát (Ford, 1922).

A gyártósor-kiegyenlítés célja a termék vagy szolgáltatás előállításához szükséges tevékenységek munkahelyhez rendelése. A cél mindig valamilyen gazdasági eredményhez kötött. Például minimalizálható a szükséges munkahelyszám vagy a gyártás ciklusideje, vagy maximalizálható a gyártási mennyiség vagy a rendszer működési hatékonysága. (Waters, 1996).

A feladatok munkahelyhez rendelését számos tényező befolyásolhatja. A ciklusidő, a tevékenységek közötti logikai kapcsolat, a gyártás technológiai és minőségi előírásai mind, mind hatással lehetnek a tevékenységek szervezésére. A különböző feltételeknek számos hozzárendelés megfelelhet. Az ilyen lehetséges megoldások közül matematikai programozási modellek segítségével kiválasztható egy valamilyen szempont szerinti legjobb megoldás. A gyártósor-kiegyenlítési probléma tipikusan bináris programozási modellekkel közelíthető. Ezek a modellek tipikusan az NP hard feladatok közé tartoznak, így korábban fontos célkitűzés volt a modellek egyszerűsítése, hatékony megoldó algoritmusok kifejlesztése. A mai számítástechnikai és informatikai feltételek mellett egyre könnyebben megoldhatóak ezek a feladatok, így a kutatások fókuszába a modellek gyakorlati alkalmazása kerülhet (Boysen et al., 2008).

2.2.2.2 A gyártósor-kiegyenlítés matematikai modelljei

A gyártósor-kiegyenlítési modellek két nagy csoportja különíthető el: az egyszerű és az általános gyártósor-kiegyenlítési modellek. A gyártósor-kiegyenlítéssel kapcsolatos kutatások egyik jelentős része az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési probléma (Simlple Assembly Line Balancing Problem, továbbiakban rövidítve: SALBP). Az SALB modellek alkalmazása esetén a következő egyszerűsítő feltételezésekkel élünk (Becker-Scholl, 2006, Scholl-Becker, 2006):

– egy homogén termék tömegtermelését optimalizáljuk;
– a gyártási folyamat előre ismert, rögzített;
– a logikai kapcsolatokon kívül nincs előírás a műveletek végrehajtására;
– determinisztikus tevékenységidők;
– minden tevékenység minden munkaállomáson elvégezhető;
– a gyártósor hatékonyságának növelése fontos célkitűzés.

Amennyiben az egyszerű gyártósor-kiegyenlítés egy vagy néhány kikötésének nem tesz eleget a megfogalmazott probléma, akkor általános gyártósor-kiegyenlítési modellhez jutunk (General Assembly Line Balancing Model, GALBM). Az általános gyártósor-kiegyenlítési probléma több ponton is eltérhet az egyszerűtől. Ilyen lehet például, ha a tevékenységidők sztochasztikusak, vagy adott tevékenységeket nem lehet minden munkaállomáson elvégezni (mert például egy speciális eszköz, berendezés szükséges a művelet végrehajtásához), vagy ha a munkahelyek elrendezése speciális (például U alakú gyártósorok). Az általánosított gyártósor-kiegyenlítési problémák nagymértékben különbözhetnek egymástól, attól függően, hogy az SALBP kikötések közül melyek sérülnek. A GALB problémák csoportosítását számos cikk tárgyalja (lásd például Becker-Scholl, 2006, Boysen et al, 2008). GALB modellekkel a gyakorlati problémák jól leírhatóak, vizsgálhatóak. Ugyanakkor a GALB modellek megoldása többnyire SALB modellekre vezethető vissza. Ebből fakadóan az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési problémákkal kapcsolatos kutatások ma is fontos szerepet töltenek be. A továbbiakban SALB modellekkel foglalkozom.

Az SALB modellel leírt gyártósor hatékonyságának növelése többféle matematikai programozási feladat segítségével érhető el. Az SALB problémák csoportosítását a 6. ábra mutatja.

		Ciklusidő	
		adott	**minimalizálandó**
Munkahelyek száma	**adott**	SALBP-F	SALBP-2
	minimalizálandó	SALBP-1	SALBP-E

6. ábra: Az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési problémák osztályozása (Scholl-Becker, 2006)

A klasszikus gyártósor-kiegyenlítési probléma SALB-1 modellként került megfogalmazásra. Az SALB-1 modellekben a ciklusidő (T_c) előre meghatározott, rögzített érték. Ekkor a cél a feladat végrehajtásához szükséges munkahelyek számának minimalizálása. A 2-es típusú gyártósor-kiegyenlítési problémában (SALBP-2) a munkahelyek száma előre ismert, rögzített. Itt a cél a ciklusidő minimalizálása, ami megegyezik a termelési ráta maximalizálásával (Baybars, 1986). A gyártósor-kiegyenlítési probléma eredetileg az 1-es modell szerint került megfogalmazásra (Bowman, 1960). A gyártósor-kiegyenlítés irodalmának bővülése, módszereinek fejlődése, eszköztárának kiszélesedése eredményeként jelent meg a 2-es típusú megközelítés.

Az SALB-F (az F a Feasibiltiy (megengedett) szó rövidítéseként jelenik meg a modell nevében) modellek esetén a munkahelyek száma és a ciklusidő is előre rögzítve van. Ezzel a modellel arra a kérdésre kereshetjük a választ, hogy adott idő alatt a rendelkezésre álló munkahelyekkel a feladat elvégezhető-e. Tehát az SALB-F modelleknél csupán megengedett megoldást keresünk. SALB-F modellek alkalmazása akkor fordul elő, amikor egy már kialakított rendszerben egy új feladat megvalósítását kell megvizsgálni. Az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési feladat legáltalánosabb megfogalmazását az SALBP-E (az E az Efficiency (hatékonyság) szó rövidítéseként jelenik meg a modell nevében) adja. Ez a munkahelyek számát és a ciklusidőt egyaránt minimalizáló feladat megoldását jelenti. Egy SALB-E modell felírásakor előzetes ismeretek szükségesek a munkahelyek számára és a ciklusidőre vonatkozóan. Ebből adódóan egy SALB-E feladat megoldását meg kell előznie egy SALB-1 és egy SALB-2 feladat megoldásának. Kutatásaim során az alap SALB-1 és SALB-2 modellekre fókuszáltam.

A gyártósor-kiegyenlítés első analitikai felírása Bryton nevéhez fűződik. Salveson 1955-ben lineáris programozási feladatok megoldásával közelített a problémához. (Baybars, 1986). Lineáris programozással azonban a feladatok oszthatatlanságára vonatkozó feltétel nem kezelhető megfelelően. Az operációkutatás fejlődése lehetővé tette a gyártósor-kiegyenlítési feladatok megoldására alkalmasabb bináris modellek megoldását.

Az első bináris programozási modellt Bowman írta fel (Bowman, 1960). Bowman két egészértékű modellt is javasol. Az első modell változói egy adott állomáson egy adott művelet végrehajtásához szükséges időt jelölik. A célfüggvényben minden munkaállomáshoz exponenciálisan növekvő költség tartozik az elméletileg szükséges munkahelyszám fölött. Itt a munkahelyek számának minimalizálása a költségek minimalizálásával valósul meg. A második modell változói a tevékenységek végrehajtásának kezdési időpontját jelölik. A célfüggvény az utolsó tevékenység(ek) befejezési idejét minimalizálja, ami végső soron a feladat elvégzéséhez szükséges munkahelyszámot minimalizálja. White (1961) módosította Bowman első modelljét és bevezette az x_{ij} döntési változót, amelyet azóta is a legtöbb gyártósor-kiegyenlítési feladat tartalmaz (Patterson-Albracht, 1975). Az x_{ij} döntési változó értéke 1, ha *i*–edik tevékenységet a *j*–edik munkahelyhez rendeljük, különben értéke zéró.

Ezután a gyártósor-kiegyenlítéssel kapcsolatos kutatások a modellek, algoritmusok finomítására, tökéletesítésére fókuszáltak. Az egyszerű és a különböző általános modellek felírásakor elsősorban a megoldási algoritmus egyszerűsítésével foglalkoztak (lásd például Thangavelu-Shetty, 1971, Baybars, 1986). Ma már olyan matematikai programozási szoftverek és olyan nagy számítási teljesítményű számítógépek állnak rendelkezésre, amelyek valós méretű gyártósor-kiegyenlítési modelleket is elhanyagolható időn belül képesek megoldani. Így ma a gyártósor-kiegyenlítési modellek gyakorlati alkalmazási lehetőségeit kell középpontba helyezni.

A gyártósor-kiegyenlítési modellek gyakorlati alkalmazásának egy fontos kérdése lehet, hogy a modell képes-e figyelembe venni a gyártósoron dolgozók eltérő képzettségét. Ehhez szorosan kapcsolódó problémát jelenthet, amennyiben a modellezés során figyelembe kívánjuk venni, hogy az egyes tevékenységek különböző nehézségűek. A szakirodalomban kevés munka foglalkozik ezzel a problémával. A termék vagy szolgáltatás előállításához szükséges tevékenységek igen eltérőek lehetnek. Különbözhetnek a feladatok bonyolultságukban, vagy abban, hogy elvégzésükhöz mekkora ügyesség, jártasság, vagy milyen képzettségi szint szükséges. Lehet, hogy a bonyolultabb feladatok elvégzését szívesebben bízná a menedzsment magasabb képzettséggel rendelkező dolgozókra, vagy a magasabb képzettséggel bíró alkalmazottakat nem szívesen alkalmazná túl egyszerű feladatok ellátására. Kutatásaim során kidolgoztam egy olyan modellt (lásd 4.2 fejezet), amely a különböző feladatokat és az eltérő képzettségű dolgozókat általánosan veszi figyelembe az optimális hozzárendelés meghatározásakor.

3. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI MODELLEK ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLATI EREDMÉNYEINEK ALKALMAZÁSA MENEDZSMENTDÖNTÉSEK TÁMOGATÁSÁRA

Az optimalizálás elmélet egyik fontos területe a matematikai programozás. Ennek gyakorlati szempontból kiemelkedően jelentős területével, a lineáris programozás néhány speciális kérdésével foglalkozom ebben a fejezetben. Az alapfeladat felírása után a különböző megoldási módszereket tekintem át. Ez után térek át a menedzsment szempontból kiemelt jelentőséggel bíró érzékenységvizsgálatra. Bemutatom, hogy az érzékenységvizsgálat során a degeneráció milyen problémákat okozhat. A menedzsment szempontból korrekt eredményeket adó számítás tárgyalása után ismertetem az általam létrehozott számítástechnikai modellt, amellyel a menedzsment szempontból helyes eredmények megkaphatóak. A számítástechnikai modell segítségével kapott eredmények helyességét egy szakirodalmi példával illusztrálom.

3.1. A lineáris programozási feladatok felírása, megoldása és érzékenységvizsgálata

Egy lineáris programozási feladat primál alakja a következő (Gal, 1979; Hillier-Lieberman, 1995):

$$\begin{aligned} &\text{Max } \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \\ &\quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{19}$$

ahol $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}$ az x_i döntési változókat tömörítő $\mathbf{x}$ vektorhoz tartozó célfüggvény-együtthatókat tartalmazó vektor, $\mathbf{b}$ a korlátozó feltételek b_j jobboldali paramétereinek vektora, $\mathbf{A}$ pedig a korlátozó feltételek együtthatóit tartalmazó mátrix. (19) a lineáris programozási feladat primál alakja. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ feltételt kielégítő $\mathbf{x} \geq 0$ vektort a feladat primál megengedett megoldásának nevezzük. Azt a primál megengedett megoldásvektort, amelynél $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$ célfüggvény a maximális értéket (OF^*) veszi fel a primál feladat optimális megoldásának nevezzük.

Minden lineáris programozási feladatnak felírható annak duálisa (Hillier-Lieberman, 1995; Kolman-Beck, 1995). A (19) feladat duálisa:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \mathbf{b}\mathbf{y}^{\mathbf{T}} \\ &\quad \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \\ &\quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{20}$$

ahol $\mathbf{y}$ vektor a duális feladat y_j változóit tartalmazza – amelyeket árnyékárnak is neveznek. Az $\mathbf{A^T y} \geq \mathbf{c}$ feltételt kielégítő $\mathbf{y} \geq 0$ vektor a feladat duál megengedett megoldása. Az a duál megengedett megoldásvektor, amelynél a $\mathbf{by^T}$ célfüggvény a minimális (OF^*) értéket veszi fel a duál feladat optimális megoldása.

A dualitás gyenge tétele szerint a (19)-(20) primál-duál feladat párra fennáll, hogy, ha a primál és a duál feladatnak is van megengedett megoldása, akkor bármely primál megengedett **x** és duál megengedett **y** megoldásvektorra

$$\mathbf{cx} \leq \mathbf{by}\,. \tag{21}$$

A dualitás erős tétele kimondja, hogy ha a primál és a duál feladatnak is van optimális megoldása, akkor a primál feladat $\mathbf{x}^*$ és a duál feladat $\mathbf{y}^*$ optimális megoldásvektoraira

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{by}^*, \tag{22}$$

vagyis az optimumértékek egyenlőek (OF^*).

A mai modellező szoftverek a lineáris programozási feladatok megoldására kétféle megoldási módszert használnak: a szimplex módszert – vagy annak valamelyik változatát – illetve belső pontos algoritmusokat. A szimplex módszer egy konvex poliéder csúcspontjain keresztül, folyamatosan javítva a célfüggvény-értéket jut el a lineáris programozási feladat optimális megoldásához. Ezzel szemben a belső pontos algoritmusok a megengedett megoldások által alkotott tér belsejében haladva érik el az optimumot, vagyis nem a megengedett megoldások terének csúcspontjain haladnak, hanem a térben.

A két módszer számítási komplexitásában jelentős különbség van. Míg a belső pontos módszerek megoldási ideje csak polinomiális, addig a szimplex alapú algoritmusoké exponenciális. Vagyis a legrosszabb esetet feltételezve sokkal hamarabb jut el a belső pontos módszer az optimumig. Azonban az algoritmusok közötti különbség nem ennyire éles valós alkalmazások esetében. A belső pontos algoritmusok jóval bonyolultabb számításokat igényelnek, az iterációnkénti számítási idejük többszöröse lehet a szimplex módszer egy iterációjához szükséges számításnak. Kis és közepes méretű lineáris programozási feladatoknál az optimális megoldás megtalálásához szükséges iterációk száma tekintetében a két algoritmustípus között jelentős különbség nincs. Ezért kis és közepes méretű feladatoknál a szimplex módszer hamarabb vezethet eredményre. Nagy – több ezer korlátozó feltételt tartalmazó – lineáris programozási feladatok esetében azonban a belső pontos algoritmusok jóval hatékonyabban működnek, kevesebb iterációval és gyorsabban találják meg az optimumot, mint a szimplex alapú módszerek. A menedzsmentalkalmazásokban kiemelt jelentőségű érzékenységvizsgálat szempontjából nagy eltérés van a két fajta algoritmus típus között. A szimplex módszer és különböző variánsai segítségével a különböző érzékenységvizsgálati számítások könnyedén elvégezhetőek. A szimplex táblából az árnyékárak kiolvashatók, a célfüggvény-együtthatókhoz és jobboldali paraméterekhez tartozó érvényességi tartományok pedig egyszerű számításokkal meghatározhatóak. A belsőpontos algoritmusok ezen a területen igen korlátozottan alkalmazhatóak csak (Jansen et al., 1993; Hillier-Lieberman, 1995).

Összességében megállapíthatjuk, hogy a belső pontos módszerek hatékonyabban alkalmazhatók valós problémák megoldására, azonban csak szimplex alapú módszerekkel nyílik lehetőség az érzékenységvizsgálati eredmények alkalmazására. Ezért fejlesztettek ki olyan algoritmusokat, amelyekkel a két megoldási módszer előnyei egyesíthetőek. Ezek lényege, hogy belső pontos módszer segítségével optimális, de nem bázismegoldást keresnek, majd innen a szimplex alapú módszer néhány iteráció után eljut egy optimális bázismegoldáshoz. Az optimum meghatározása után a szimplex alapú algoritmus segítségével az érzékenységvizsgálati számítások könnyedén elvégezhetőek (Hillier-Lieberman, 1995).

A szimplex módszernek tehát ma is fontos szerepe van a lineáris programozásban. Lényege, hogy minden lépésben kiválasztja az **A** mátrix egy bázisát és ellenőrzi az optimalitási kritériumot. Vagyis ha a következő iterációs lépés során javítható a célfüggvény értéke, akkor az iteráció folytatódik, ha nem, akkor leáll (Hillier-Lieberman, 1995).

Az optimális megoldás kiszámítása az x_i^* döntési változók és az OF^* optimális célfüggvény érték meghatározását jelenti. Jelölje az optimális bázismegoldás x_i^* elemeihez tartozó **A** együtthatómátrix megfelelő i oszlopaiból ($\mathbf{a^i}$) képzett mátrixot $\mathbf{B}_\rho$ (optimális bázis), ennek inverzét pedig $\mathbf{B}_\rho^{-1}$. Ha a jobboldali paraméterek vektorát ($\mathbf{b}$) balról megszorozzuk $\mathbf{B}_\rho^{-1}$ mátrixszal, akkor eredményül a primál megoldást (${}^\rho\mathbf{b}$) kapjuk:

$$\mathbf{B}_\rho^{-1}\mathbf{b} = {}^\rho\mathbf{b}\,. \tag{23}$$

A célfüggvény optimális értéke ennek segítségével a következőképpen adódik:

$$OF^* = \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\,{}^\rho\mathbf{b}\,, \tag{24}$$

ahol $\mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}$ az optimális bázismegoldásban szereplő döntési változókhoz tartozó célfügvény-együttható komponenseket jelöli. A célfüggvény értéke optimális – egy maximalizálandó célfüggvénnyel rendelkező LP feladatnak –, ha teljesül, hogy

$${}^\rho\mathbf{b} \geq 0 \tag{25}$$

és

$${}^\rho\Delta c_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,I\,, \tag{26}$$

ahol

$${}^{\rho}\Delta c_i = {}^{\rho}c_i - c_i \, , \qquad (27)$$

$${}^{\rho}c_i = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\, {}^{\rho}\mathbf{a}^{\mathbf{i}} . \qquad (28)$$

${}^{\rho}\Delta c_i$ a duál megoldás, ${}^{\rho}\mathbf{b}$ a primál megoldás. Ebből következik, hogy a primál feladat megoldása során a végső szimplex tábla a primál feladat megoldásán túl a duál feladat megoldását is tartalmazza (Gal, 1979).

Az optimális megoldás meghatározása után nyílik lehetőség az érzékenységvizsgálatra, amely a modell paramétereiben bekövetkező változások hatásáról szolgáltat bővebb információt. Az érzékenységvizsgálatnak három nagy területe van: a célfüggvény-együtthatók, a jobboldali paraméterek és az együtthatómátrix elemeinek érzékenységvizsgálata.

A döntési változókhoz tartozó c_i célfüggvény-együtthatók érzékenységvizsgálata (angolul: Objective Function Coefficient, továbbiakban rövidítve: OFC) során a cél meghatározni minden célfüggvény-együtthatóra azt a tartományt, amelyen belül az változhat az optimális megoldás változatlansága mellett. Ennek gyakorlati jelentősége abban áll, hogy a szűkebb tartománnyal rendelkező együtthatókat fokozottabb figyelemmel kell nyomon követni, hiszen esetükben már kis változás is az optimális megoldás módosulását eredményezheti. Amennyiben a c_i együtthatóhoz tartozó x_i döntési változó nem szerepel a bázismegoldásban, akkor, ha c_i értéke v_i –vel módosul ($c_i(v_i)= c_i+v_i$), akkor annak nincs hatása a célfüggvény értékére. Ez addig áll fent, amíg

$$v_i \leq {}^{\rho}\Delta c_i \, . \qquad (29)$$

Ha a c_i együtthatóhoz tartozó x_i döntési változó részét képezi a bázismegoldásnak, akkor annak megváltozása hatással lesz a célfüggvény értékére is. Jelölje a bázismegoldásban részt vevő változókhoz tartozó célfüggvény-együttható értékeket c_r. Ha c_r értéke v_r –rel változik meg ($c_r(v_r)= c_r+v_r$), akkor a célfüggvény értéke

$$OF^*(v_r) = OF^* + {}^{\rho}b_r v_r \qquad (30)$$

szerint módosul. Ez a változás akkor érvényes, ha v_r

$$\Psi_{\rho}^{(r)} = \max_{{}^{\rho}a_{ri}>0} \left\{ -{}^{\rho}\Delta c_i / {}^{\rho}a_{ri} \right\} \qquad (31)$$

felső és

$$\Psi_{\rho}^{(r)} = \min_{{}^{\rho}a_{ri}<0} \left\{ -{}^{\rho}\Delta c_i / {}^{\rho}a_{ri} \right\} \qquad (32)$$

alsó határok között veszi fel értékét (Gal, 1979).

Az érzékenységvizsgálat második nagy területe a b_i jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata, amely során minden korlátozó feltételhez meghatározzuk az árnyékárat és annak érvényességi tartományát. Az árnyékár az az érték, amellyel az optimum értéke megváltozik a jobboldali-paraméter egységnyi változásakor. Az árnyékár tájékoztatja a menedzsmentet arról, hogy milyen gazdasági hatása van a szűkös erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiség változásának. (23) szerint az optimális megoldás függ a jobboldali paraméterek értékétől. Így ha egy b_j jobboldali paraméter értékét λ_j-vel megváltoztatjuk ($b_j(\lambda_j) = b_j + \lambda_j$), akkor az optimális megoldás is meg fog változni, mégpedig a következők szerint:

$$^{\rho}\mathbf{b}(\lambda_j) = \mathbf{B}_{\rho}^{-1}\mathbf{b}(\lambda_j), \tag{33}$$

ami felírható a következőképpen is

$$\mathbf{B}_{\rho}^{-1}\mathbf{b}(\lambda_j) = {}^{\rho}\mathbf{b} + {}^{\rho}\beta^{j}\lambda_j, \tag{34}$$

ahol $^{\rho}\beta^{j}$ a $\mathbf{B}_{\rho}^{-1}$ mátrix j oszlopát jelöli. $^{\rho}\mathbf{b}$ értékének módosulása a célfüggvény értékét az alábbiak szerint változtatja meg:

$$OF^{*}(\lambda_j) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\, {}^{\rho}\mathbf{b}(\lambda_j). \tag{35}$$

Ha egy tetszőleges b_r jobboldali paraméter értékét λ_r-rel változtatjuk meg, vagyis

$$b_r(\lambda_r) = b_r + \lambda_r, \tag{36}$$

akkor a célfüggvény értéke

$$OF^{*}(\lambda_r) = OF^{*} + y_r\lambda_r \tag{37}$$

értékre módosul, ahol y_k a k duális változó, vagyis árnyékár. Az árnyékár érvényességi tartományának felső határa

$$\Theta_{\rho}^{(r)} = \begin{cases} \max\limits_{\substack{j \\ {}^{\rho}\beta_{jr} > 0}} \left\{ -{}^{\rho}b_j / {}^{\rho}\beta_{jr} \right\}, & \text{ha létezik } {}^{\rho}\beta_{jr} > 0; \\ -\infty & \text{,ha nem létezik } {}^{\rho}\beta_{jr} > 0; \end{cases} \tag{38}$$

míg alsó határa

$$\Theta_{\rho}^{(r)} = \begin{cases} \max\limits_{\substack{j \\ {}^{\rho}\beta_{jr} < 0}} \left\{ -{}^{\rho}b_j / {}^{\rho}\beta_{jr} \right\}, & \text{ha létezik } {}^{\rho}\beta_{jr} < 0; \\ -\infty & \text{,ha nem létezik } {}^{\rho}\beta_{jr} < 0 \end{cases} \tag{39}$$

(Gal, 1979).

Az érzékenységvizsgálat harmadik nagy területe az **A** együtthatómátrix elemeinek érzékenységvizsgálata, amely az a_{ji} együtthatómátrix komponensek változásának optimumra kifejtett hatását adja meg. Ennek elvégzése matematikai és számítástechnikai nehézségekbe ütközik. Az együtthatómátrix elemeinek numerikus érzékenységvizsgálata a mai szoftverekkel könnyedén elvégezhető – a modell módosított paraméterekkel történő újra megoldásával –, azonban nincs lehetőség olyan mélységű analitikai elemzésre, mint a jobboldali paraméterek vagy a célfüggvény-együtthatók esetében.

Lineáris programozási feladatok megoldása és érzékenységvizsgálata két vagy három dimenzióban grafikusan jól szemléltethető – magasabb dimenziókban erre már nincs lehetőség. Kétdimenziós térben az egyenlőséges feltételek egyeneseknek, az egyenlőtlenséges feltételek félsíkoknak felelnek meg. A korlátozó feltételek metszete adja a megengedett megoldások halmazát. Az egyenessel reprezentálható célfüggvény a konvex poliéder egy sarokpontjánál jelöli ki az optimális megoldást. A célfüggvény-együtthatók érzékenységvizsgálata grafikusan a célfüggvény egyenes meredekségének változásával szemléltethető. Adott célfüggvény-együttható érvényességi tartománya addig tart, amíg az optimális pont körül forgó célfüggvény ugyanazt a sarokpontot határozza meg a feladat optimális megoldásaként. A jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata pedig a korlátozó feltételekhez tartozó egyenesek párhuzamos eltolását jelenti. Az árnyékár érvényességi tartománya addig tart, amíg ugyanazon egyenesek határozzák meg az optimumot (Koltai, 2001; Gáspár-Temesi, 1995).

3.2. Menedzsment szempontból korrekt eredményt adó érzékenységvizsgálati számítás bemutatása

A menedzsment számára hasznos információt szolgáltatnak az érzékenységvizsgálati eredmények arra vonatkozóan, hogy az optimum mennyire stabil, hogyan változhatnak az egyes paraméterek, illetve azoknak milyen hatása van az optimális megoldásra (Caine-Parker, 1996). Degenerált esetben azonban számos probléma felmerül, ugyanis a kereskedelmi forgalomban kapható szoftverek menedzsment szempontból félrevezető eredményeket szolgáltatnak (Rubin-Wagner, 1990; Evans-Baker, 2007). A jelenség a szakirodalomban széles körben ismert, számos cikk, könyv született a témában. A munkák egy része elméletorientáltan tárgyalja a problémát (pl. Aucamp-Steinber, 1982; Gal, 1986) és speciális érzékenységvizsgálati információkat definiálnak (Jansen et al., 1997, Evans-Baker, 2007) vagy speciális algoritmusokat fejlesztenek ki, amelyekkel a kinyert információk pontosíthatóak (pl. Koltai et al. 1993). Mások a probléma gyakorlati oldalára fókuszálnak és a menedzsment szempontból félrevezető információk alapján meghozott hibás döntések következményeit vizsgálják. Rubin és Wagner (1990) egy szállítási problémával szemlélteti a menedzsment szempontból félrevezető eredményeket. Jansen et al. (1997) egy olajfinomító példáján keresztül mutatják be, hogy az érvényességi tartományra vonatkozó információk menedzsment szempontból félrevezetőek. Koltai és Terlaky (2000) egy termeléstervezési mintapélda segítségével rávilágít az érzékenységvizsgálat matematikai és menedzseri szempontú különbségeire. Továbbá megállapítják, hogy a szoftverek által szolgáltatott eredmények nem hibásak, csupán az elemzés tárgyát kell pontosabban meghatározni. Éppen ezért az érzékenységvizsgálat három típusát különítik el egymástól. Az első típus a klasszikus, matematikai nézőpontú bázis érzékenységvizsgálat. A második és harmadik típusú érzékenységvizsgálati eredmények alkalmazhatóak menedzsmentdöntésekhez. A második típus az optimális megoldásban részt vevő elemek változatlanságára, míg a harmadik a célfüggvény-érték változásának (gradiensének) állandóságára vonatkozó adatokat tartalmazza. Ezt a megközelítést a belső pontos módszerek esetében is alkalmazzák (Hadigheh-Terlaky, 2006; Hadigheh at al, 2007).

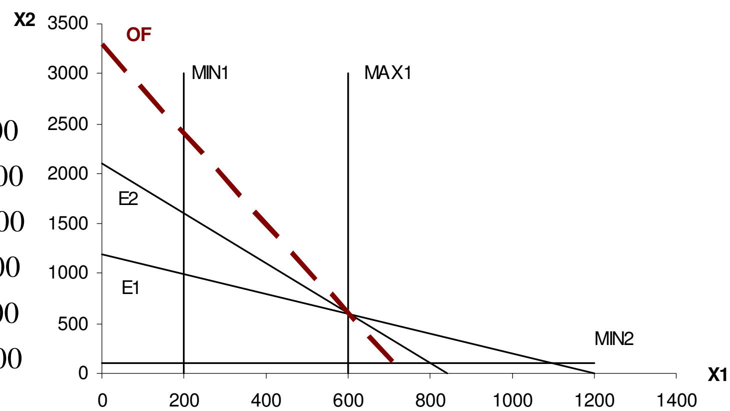
Léteznek szoftverek, amelyek képesek felismerni a degenerált eseteket, azonban a menedzsment szempontból korrekt, teljes érzékenységvizsgálati eredményeket egyik sem képes meghatározni. A 3.2.2 pontban bemutatom azt a lineáris programozási feladatok sorozatából álló számítási módszert, amellyel a menedzsment számára fontos érzékenységvizsgálati információk degenerált esetben is megkaphatóak.

3.2.1. Degenerált lineáris programozási feladatok

Degenerációról akkor beszélünk, ha a lineáris programozási feladat optimális megoldásában valamelyik bázisváltozó értéke zéró (Hillier-Lieberman, 1995). A zéró értékű bázisváltozó miatt az optimum keresése során a szimplex módszer végtelen ciklusba kerülhet, miközben az optimum értéke nem változik. A végtelen ciklusba kerülést a szimplex módszer különböző változatai jól tudják kezelni, azonban a degenerációval kapcsolatos problémák kezelésére még nem alakult ki egységes álláspont (Vanderbei, 2008). Degenerált esetben tehát ugyanahhoz az optimális megoldáshoz több bázismegoldás is tartozik. A menedzsment az optimális pont, mint termelési program érzékenységében érdekelt – függetlenül attól, hogy az melyik bázishoz tartozik. Az optimális megoldás, mint pont és az optimális bázismegoldás közötti különbség eredményezi a degenerációval kapcsolatos problémákat (Koltai-Terlaky, 2000). A szoftverek a matematikusok által használt bázisok érzékenységvizsgálati adatait szolgáltatják, nem pedig az adott pontét (Jansen et al., 1997; Koltai-Tatay, 2008c).

Primál degenerációról akkor beszélünk, ha a primál feladat optimális megoldásában valamelyik bázisváltozó értéke zéró. Ekkor a duál feladatnak alternatív megoldása van, vagyis vannak olyan korlátozó feltételek, amelyekhez nem csak egy árnyékár tartozik. A primál degeneráció két dimenzióban úgy szemléltethető, hogy az optimális csúcspont kettőnél több egyenes metszéspontjában fekszik, vagyis az optimum túlhatározott. Primál degenerált LP feladatra mutat példát a 7. ábra. Az iterációk során az optimális csúcspont változatlansága mellett az egyenesekhez tartozó bázismegoldások cserélődhetnek. Ez menedzsment szempontból félrevezető érzékenységvizsgálati információkhoz vezet.

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{Max} & (900x_1 & +200x_2) & \\
\text{E1:} & x_1 + & x_2 & \leq 1200 \\
\text{E2:} & 5x_1 + & 2x_2 & \leq 4200 \\
\text{Max1:} & x_1 + & & \leq 600 \\
\text{Max2:} & & x_2 & \leq 10000 \\
\text{Min1:} & x_1 & & \geq 200 \\
\text{Min2:} & & x_2 & \geq 100
\end{array}
$$

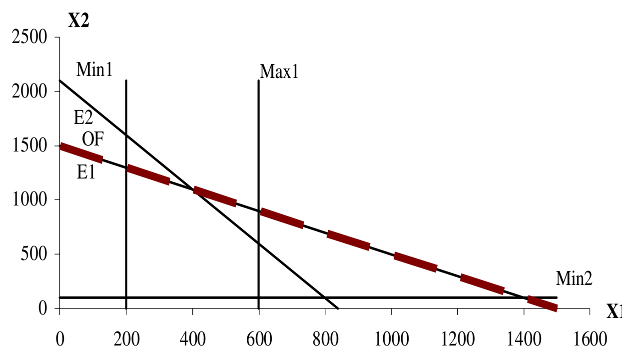


7. ábra: Primál degenerációt szemléltető LP feladat

A célfüggvény-együtthatók érzékenységvizsgálatakor rendre szűkebb tartományokat kaphatunk, hiszen a szoftverek az egyenesekhez tartozó bázisok érzékenységvizsgálati eredményeit szolgáltatják (Koltai-Tatay, 2008a). További problémát jelent, hogy a szoftverek csak egy árnyékárat határoznak meg. Azonban primál degenerált esetben az optimális pont meghatározásában részt vevő korlátozó feltételekhez több árnyékár is tartozik (Ho, 2000). A jobboldali paraméter növekedésekor jobboldali, csökkenésekor baloldali árnyékárról beszélünk. A jobboldali árnyékárat nevezik pozitív vagy vásárlási árnak is, míg a baloldali árnyékárat negatív vagy eladási árnak is (Agkül, 1984). Létezhetnek továbbá adott pontban érvényes árnyékárak, vagyis megengedett csökkenésük és növekedésük egyaránt zéró, de ezeknek menedzsment szempontból nincs jelentőségük (Koltai-Tatay, 2008b).

Duál degenerált egy lineáris programozási feladat, ha a duál feladat optimális megoldásában valamelyik bázisváltozó értéke zéró. Ekkor alternatív primál optimális megoldások léteznek. Ez grafikusan azt jelenti, hogy a célfüggvény párhuzamos valamelyik korlátozó feltétellel. Duál degenerált LP feladatra a 8. ábra mutat példát. Duál degenerált esetben a konvex poliédernek nem egy pontja lesz az optimális megoldás, hanem két sarokpont és az azokat összekötő szakasz bármely pontja. Tehát a célfüggvény érték megegyezik a szakasz két végpontja, valamint azok lineáris kombinációiból előálló pontoknál. A szimplex alapú algoritmusok valamelyik sarokpontot találják meg optimumként, a belső pontos algoritmusok az adott szakasz bármely pontját megkaphatják optimális megoldásként. Menedzsment szempontból problémát jelent, hogy a szoftverek csak egy optimumot határoznak meg, nem szolgáltatnak információt az alternatív optimumokról (Koltai-Tatay, 2008a). Továbbá a jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata során szűkebb érzékenységvizsgálati tartományok kerülhetnek meghatározásra (Koltai-Tatay, 2008b).

$$
\begin{array}{llcrl}
\text{Max} & (900x_1 & +900x_2) & & \\
\text{E1}: & x_1 + & x_2 & \leq & 1500 \\
\text{E2}: & 5x_1 + & 2x_2 & \leq & 4200 \\
\text{Max1}: & x_1 + & & \leq & 600 \\
\text{Max2}: & & x_2 & \leq & 10000 \\
\text{Min1}: & x_1 & & \geq & 200 \\
\text{Min2}: & & x_2 & \geq & 100
\end{array}
$$



8. ábra: Duál degenerációt szemléltető LP feladat

Előfordulhat, hogy egy lineáris programozási feladat egyszerre primál és duál degenerált. Ekkor az említett problémák halmozottan fordulnak elő.

A szoftverek által automatikusan szolgáltatott érzékenységvizsgálati eredményekkel kapcsolatban menedzsment szempontból tehát két jelentős probléma létezik – amennyiben az LP feladat degenerált. Egyrészt – primál degenerált esetben – egy korlátozó feltételhez két árnyékár is tartozhat. Vagyis a szűkösen rendelkezésre álló erőforrások növekedésének és csökkenésének ugyanazon korlátozó feltétel esetében eltérő gazdasági hatása lehet. Másrészt a szoftver által szolgáltatott érvényességi tartományok – mind a célfüggvény-együtthatók mind az árnyékárak esetében – rendre szűkebbek a valóságosnál. Ezzel feleslegesen ráirányíthatják a menedzsment figyelmét a – hamis eredmények alapján – kritikusnak vélt paraméterekre.

3.2.2. A degenerált esetben is megfelelő eredményt adó érzékenységvizsgálati számítás bemutatása

A menedzsment szempontból helyes érzékenységvizsgálati eredményeket adó számítási módszer lényege, hogy minden lineáris programozási feladatnak felírható annak duálisa és a dualitás erős tétele szerint a két feladat optimális célfüggvény értéke megegyezik egymással (OF^*). A javasolt módszer számításait az 1. táblázat foglalja össze (Koltai-Tatay, 2011a).

Az OFC érzékenységvizsgálat során minden célfüggvény-együtthatóhoz meghatározunk egy tartományt, amelyen belül a célfüggvény-együttható változhat az optimális megoldás változatlansága mellett. A duális feladatban a primál célfüggvény-együtthatók jobboldali paraméterek és így könnyen nyomon követhető azok változásának optimumra kifejtett hatása.

1. táblázat: A menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredményeket adó lineáris programozási feladatok összefoglalása

	Maximális csökkenés	**Maximális növekedés**
A célfüggvény-együtthatók érzékenységvizsgálata (OFC)	$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c} - \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} = OF^* - \gamma_i x_i^*$ (40) $\gamma_i \geq 0$ Max (γ_i); Optimális megoldás: γ_i^-	$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c} + \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} = OF^* + \gamma_i x_i^*$ (41) $\gamma_i \geq 0$ Max (γ_i); Optimális megoldás: γ_i^+
A baloldali árnyékárak érvényesség tartománya (δ<0) (SP^-)	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} + \delta\mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = OF^{-*} - \xi_j y_j^{-*}$ (42) $\xi_j \geq 0$ Max(ξ_j) Optimális megoldás : $n\xi_j^-$	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} + \delta\mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = OF^{-*} + \xi_j y_j^{-*}$ (43) $\xi_j \geq 0$ Max(ξ_j) Optimális megoldás : $n\xi_j^+$
A jobboldali árnyékárak érvényességi tartománya (δ>0) (SP^+)	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} + \delta\mathbf{e}_j - \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = OF^{+*} - \xi_j y_j^{+*}$ (44) $\xi_j \geq 0$ Max(ξ_j) Optimális megoldás : $p\xi_j^-$	$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} + \delta\mathbf{e}_j + \xi_j \mathbf{e}_j$ $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = OF^{+*} + \xi_j y_j^{+*}$ (45) $\xi_j \geq 0$ Max(ξ_j) Optimális megoldás : $p\xi_j^+$

A primál feladat felírása és megoldása után megkapjuk a célfüggvény OF^*, valamint az x_i döntési változók optimális értékeit. Célunk a c_i célfüggvény-együttható változtatása OF^* változatlansága mellett. A (20) duális célfüggvényének segítségével előírjuk, hogy az optimális célfüggvény érték ne változzon meg, miközben a duálisban jobboldali paraméterként szereplő c_i célfüggvény-együttható értékét megváltoztatjuk γ_i értékkel. Ha az így nyert módosított duál feladatban megváltozik c_i, akkor OF^* is meg fog változni, méghozzá a duális feladat adott korlátozó feltételéhez tartozó árnykárának és a γ_i változás mértékének szorzatával. A duális feladat egy korlátozó feltételéhez tartozó árnyékár az eredeti feladat x_i döntési változójának optimális értéke. Így az eredeti célfüggvény érték x_i és γ_i szorzatának értékével fog megváltozni, ha c_i célfüggvény-együttható γ_i-vel változik. A cél annak vizsgálata, hogy mekkora lehet γ_i változás mértéke, hogy az eredeti optimum ne változzon meg. Tehát felírható egy olyan lineáris programozási feladat, melyben keressük azt a maximális γ_i értéket, amellyel c_i célfüggvény-együttható megváltoztatható az eredeti optimum változatlansága mellett. Ha $\gamma_i \geq 0$ értéket c_i értékéből levonjuk, akkor c_i célfüggvény-együttható megengedett maximális csökkenését, ha hozzáadjuk, akkor a megengedett maximális növekedés kapjuk optimális megoldásként.

A célfüggvény-együtthatók menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálatához a (40) és (41) lineáris programozási feladatokat kell megoldani. A célfüggvény-együttható maximális növekedésének és maximális csökkenésének meghatározásához tehát két lineáris programozási feladatot kell megoldani.

A jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata során meg kell határozni minden korlátozó feltételhez egy árnyékárat, valamint annak érvényességi tartományát. Degenerált esetben kétoldali árnyékárak létezhetnek, ezért először ezeket kell szétválasztani (Ho, 2000). Létezhetnek adott pontban érvényes árnyékárak is – amelyek megengedett növekedése és csökkenése egyaránt zéró – azonban ennek az információnak menedzsment szempontból nincs gyakorlati jelentősége. A kétoldali árnyékárak perturbációval különíthetőek el egymástól. Az eredeti feladat b_j jobboldali paraméterét δ értékkel változtatjuk meg és megoldjuk a $b_j+\delta$ jobboldali paraméterű primál feladatot. Ha $\delta>0$, akkor a jobboldali, ha $\delta<0$, akkor a baloldali árnyékárral kapcsolatos számításokat végzünk. Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a perturbáció értékének megválasztásakor körültekintően kell eljárni. Nagyon kis δ perturbációs érték választásakor előfordulhat, hogy a nagyon érzékeny beállításokkal rendelkező szoftverek nem találnak megengedett megoldást. Ezért a szoftver érzékenységét a perturbáció mértékével össze kell hangolni. A mai felhasználóbarát szoftverek mellett ez könnyen megvalósítható. Megjegyzem, hogy kis perturbációs érték választása matematikai szempontból lehet fontos, menedzsment szempontból nem releváns ez a kérdés. A túl kis perturbációs érték egyrészt a gyakorlatban nehezen megvalósítható, másrészt pedig az adatok pontatlansága, bizonytalansága nagyobb eltéréseket okozhat. A perturbált primál feladatok megoldásával megkapjuk az árnyékárakat. Érvényességi tartományuk meghatározásához további LP feladatok megoldása szükséges. A kérdés, hogy mennyivel változhat b_j+δ jobboldali paraméter értéke a duál feladat optimumának változatlansága mellett. Felírhatunk egy olyan LP feladatot, amelyben egy ξ_j változó bevezetésével kiszámítható b_j+δ megengedett csökkenése és növekedése. A perturbált primál feladat b_j+δ jobboldali paraméter értékét ξ_j értékkel megváltoztatjuk, miközben előírjuk, hogy a perturbált primál feladat optimális célfüggvény értéke (OF^{-*}, ha δ<0 és OF^{+*}, ha δ>0) ne változzon meg. Ha b_j+δ jobboldali paraméter ξ_j értékkel megváltozik, akkor a célfüggvény értéke is módosul, méghozzá a *j* korlátozó feltételhez tartozó árnyékár (y_j^{-*}, ha δ<0 és y_j^{+*}, ha δ>0) és ξ_j szorzatának értékével. Ezzel a változással korrigáljuk a célfüggvény értékét. Ha a ξ_j>0 értéket levonjuk b_j+δ jobboldali paraméter értékéből akkor annak megengedett maximális csökkenését, ha hozzáadjuk, akkor annak megengedett maximális növekedését kapjuk eredményül.

Ahhoz, hogy az árnyékárakkal és azok érvényességi tartományaival kapcsolatban a menedzsment szempontból helyes eredményeket megkapjuk a (42)-(45) LP feladatokat kell megoldanunk. Egy korlátozó feltétel jobboldali paraméterét perturbálni kell mindkét irányba, majd a baloldali árnyékárak érvényességi tartományának meghatározásához a (42) és (43), a jobboldali árnyékárak érvényességi tartományának meghatározásához a (44) és (45) LP feladatok megoldására van szükség. Korlátozó feltételenként tehát összesen hat LP feladat megoldására van szükség.

Egy *I* célfüggvény-együtthatóval és *J* jobboldali paraméterrel rendelkező LP feladat menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálatához az alapfeladaton túl 2*I*+6*J* további LP feladat megoldása szükséges. Ez valós problémák esetén igen soknak bizonyulhat, ezért szükség lehet a megoldandó LP feladatok számának csökkentése. Ennek matematikai és menedzsment vonatkozásaira a gyakorlati megvalósítás tárgyalása során visszatérek még.

3.2.3. A javasolt számítási módszer gyakorlati megvalósítása

A hagyományos LP szoftverek alkalmazásakor egyetlen LP feladat megoldása után rendelkezésünkre állnak a döntési változók optimális értékei, a célfüggvény optimális értékével valamint az érzékenységvizsgálati információkkal. A szimplex módszer alkalmazásakor az utolsó szimplex táblából egyszerűen kiolvasható minden fontos eredmény vagy néhány báziscserével könnyen megkapatóak a kért információk. A javasolt módszerrel LP feladatok sorozatát kell kiszámolni. A megoldandó LP feladatok száma azonban matematikai, illetve menedzsmentszűréssel csökkenthető (Koltai-Tatay, 2011a).

A jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata során csak abban az esetben tartozhat egy korlátozó feltételhez kétoldali árnyékár, ha az adott árnyékár érvényességi tartományának szélén vagyunk, vagyis a korlátozó feltétel alsó vagy felső határon teljesül (a megengedett csökkenés vagy növekedés értéke zéró). Ekkor mindenképpen szükséges az adott korlátozó feltételhez tartozó mind a hat LP feladat megoldása ($\delta < 0$és $\delta > 0$ perturbációval egyaránt meg kell oldani a perturbált primál feladatot, majd ξ_j segítségével mindkét esetben keressük a megengedhető maximális csökkenés, illetve növekedés értékét).

Ha a korlátozó feltétel nem a határon teljesül, vagyis egyenlőtlenség formájában teljesül az adott korlát, akkor biztos, hogy csak egy árnyékár létezik. A szoftverek által számolt árnyékárak ilyenkor menedzsmentdöntésekhez felhasználhatók. Azonban az érvényességi tartományra vonatkozó eredményeknél előfordulhat, hogy a ténylegesnél szűkebb tartományt kapunk. Ezért a megengedhető maximális csökkenés illetve növekedés meghatározásától ilyenkor nem tekinthetünk el, nem hagyatkozhatunk a szoftverek által meghatározott tartományokra. Ilyenkor tulajdonképpen a módosított primál feladatot kell megoldanunk zéró perturbációval, vagyis adott árnyékár mellett vizsgáljuk a b_j jobboldali paraméter megengedett maximális csökkenését, illetve növekedését. Ekkor egy korlátozó feltételre csak két LP feladatot kell megoldani a hat helyett, vagyis ezzel a matematikai szűréssel korlátozó feltételenként néggyel csökkenthetjük a megoldandó LP feladatok számát.

Így megállapíthatjuk, hogy a menedzsmentdöntésekhez szükséges, menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredményekhez a 9. ábrán látható LP feladatok sorozatát kell megoldanunk.

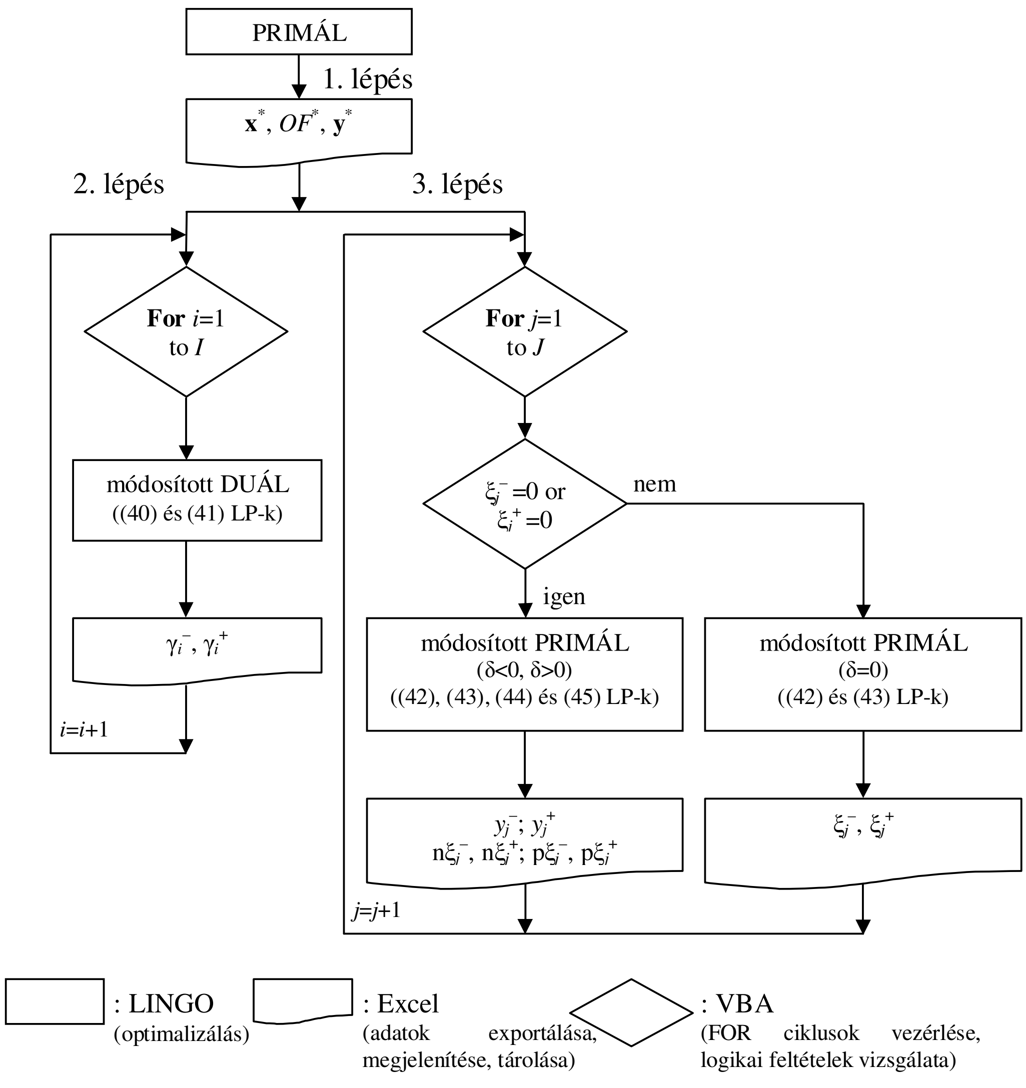
Bizonyos döntési szituációban, a menedzsment segítségével tovább csökkenthetjük a megoldandó LP feladatok számát. Itt nem tudunk olyan egzakt szabályokat megfogalmazni, mint a matematikai szűrésnél, de számos olyan eset előfordulhat, amikor a menedzsment csak bizonyos paraméterek érzékenységvizsgálatában érdekelt. Tekintsünk néhány jellegzetes esetet:

- A menedzsmentet gyakran csak a szűk keresztmetszetet képező kapacitások árnyékára érdekli. A leggyakoribb annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy mennyivel éri meg adott erőforrás kapacitását bővíteni illetve szükséges-e annak csökkentése. Ebben az esetben a menedzsment meghatározhatja a feltételi egyenletek azon csoportját, amelyekre a menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálatot el kell végezni.
- Előfordulhat, hogy menedzsment szempontból a kapacitás bővítése vagy csökkentése nem lehetséges. Például technológiai okok miatt a gyártási kapacitás nem növelhető, vagy esetleg előírások szabályozzák a minimálisan gyártandó mennyiséget. Ezekben

az esetekben az egyik oldali perturbációval kapcsolatos számítások (vagyis korlátozó feltételenként három LP feladat) elhagyhatóak.

– A célfüggvény-együtthatóknál gyakran csak a modell egzakt felírása miatt alkalmazunk bizonyos paramétereket. Eltekinthetünk bizonyos célfüggvény-együtthatók menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati számításaitól, amennyiben azoknak nincs gyakorlati jelentőségük.

A fenti megfontolások alapján a megoldandó LP feladatok száma nagy mértékben csökkenthető.



9. ábra: A megoldandó LP feladatok szervezése, gyakorlati megvalósítása

Az ismertetett módszert a gyakorlatban a LINGO optimalizálási szoftver, a Microsoft Excel táblázatkezelő program, valamint az ahhoz kapcsolódó Visual Basic Application (VBA) segítségével valósítottam meg (Schrage, 2003; Duane, 2005; Roman, 2002). Az LP feladatokat az Excelbe ágyazott LINGO oldja meg. A két szoftvert azért kapcsoltam össze, hogy egyesítse a két eszköz előnyös tulajdonságait. Minden adat és eredmény táblázatba rendezve, áttekinthető és felhasználóbarát formában Excel munkalapokon került tárolásra. Ezáltal a felhasználó könnyedén módosíthatja az adatokat anélkül, hogy a LINGO programnyelv kódolását ismerné. Az optimalizálást a könnyen programozható LINGO optimalizálási szoftver végzi el. A megoldandó LP feladatok sorozatának vezérlésére az Excelben használható VBA-t alkalmaztam. A Visual Basicben írt makrók segítségével lehetőség van egymás után automatikusan lefutó feladatok vezérlésére. A felhasználónak ez nem jelent többletmunkát, csupán a megfelelő makrót kell futtatnia az adott listából. A javasolt módszer megvalósítása három részből áll. (Az egyes lépéseket a 9. ábrán is jelöltem.)

1. Első lépésben megoldjuk a primál feladatot, majd exportáljuk a felhasználó által meghatározott változók optimális értékeit, valamint az optimum értékét az Excelbe.
2. A második lépés a célfüggvény-együtthatók érzékenységvizsgálata. I darab célfüggvény-együtthatóra kell számolni a megengedett legnagyobb csökkenés, illetve növekedés értékét. A Visual Basic vezérli, hogy melyik célfüggvény-együttható tartományát számolja a LINGO. Egy cikluson belül először kiszámolja a tartomány alsó, majd felső határáig megengedett változások értékeit.
3. A számítás harmadik lépése a jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata. A VBA minden jobboldali paraméterre megvizsgálja, hogy adott korlátozó feltétel alsó vagy felső határon teljesül-e ($\xi_j^-=0$ or $\xi_j^+=0$). Ha ez a feltétel igaz, akkor kétoldali árnyékárak létezhetnek, vagyis mind a hat LP feladatot meg kell oldani. A VBA adott j jobboldali paraméterre először kiszámítja a baloldali árnyékárat, majd az ehhez tartozó jobboldali paraméter megengedett legnagyobb csökkenésének és növekedésének értékét; majd kiszámítja a jobboldali árnyékárat és annak érvényességi tartományát. Amikor a korlátozó feltétel nem a határon teljesül – vagyis a kezdeti feltétel hamis – akkor csak két LP feladat megoldására van szükség. Ebben az esetben j jobboldali paraméterre vizsgáljuk, hogy mekkora annak megengedhető maximális csökkenése, illetve növekedése.

A Visual Basicben lehetőség van a makrók összefűzésére is, így az említett makrókat egyetlen makróba szerveztem. Ezáltal a felhasználónak elég egyetlen gombra kattintania, hogy megkapja egy LP feladat optimális megoldását a hozzátartozó valamennyi menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredménnyel.

3.2.4. A menedzsment szempontból korrekt eredményeket adó érzékenységvizsgálat illusztrálása

Koltai és Terlaky (2000) elmagyarázzák és illusztrálják az érzékenységvizsgálat matematikai és menedzsment nézőpontbeli különbségeit. A szerzők felhívják a figyelmet a degenerációnál előforduló veszélyekre. Egy – logikailag is könnyen levezethető – lineáris termeléstervezési példa több bázismegoldásának bemutatatásával és magyarázatával rávilágítanak a szimplex alapú szoftverek félrevezető eredményeire. Azonban a helyes eredményeket a cikk nem tartalmazza. A következő részben a mintapélda ismertetése után szemléltetem a degenerációval kapcsolatos problémát és meghatározom az összes helyes érzékenységvizsgálati információt.

Két termék (P1, P2) optimális gyártási szintjét kell meghatározni két időszakra (T1, T2). P1 termék iránt az első időszakban nem merül fel igény, míg a második időszakbeli igény 200 darab. P2 termékből mindkét időszakban 100 darab az igényelt mennyiség. T1 időszakban a gyártás gazdaságilag kedvezőbb, mert mindkét termék fajlagos gyártási költsége 10 Euró. Ezzel szemben a T2 időszakban P1 termék gyártása 25 Euróba, P2 terméké 20 Euróba kerül egységenként. Ezek alapján megállapítható, hogy a legmegfelelőbb az lenne, ha T1 időszakban mindent le lehetne gyártani, azonban figyelembe kell venni a gyártás, valamint a raktár korlátosságát. A gyártási kapacitás T1 időszakban 300 darab, T2-ben 200 darab. A készlettartás fajlagos költsége 5 Euró minkét időszakban mindkét termékre, és a raktárkapacitás 200 darab időszakonként. A cél egy olyan termelési terv meghatározása, amelyben a gyártási és készlettartási költség a legkisebb. A feladat alapadati a 2. táblázat foglalja össze.

2. táblázat: A lineáris termeléstervezési feladat alapadatai

A modell paraméterei		**T1 (t=1)**	**T2 (t=2)**
Igény ($D_{w,t}$)	P1 (w=1)	0	200
(Db)	P2 (w =2)	100	100
Gyártási költség ($r_{w,t}$)	P1 (w =1)	10	25
(Euró/db)	P2 (w =2)	10	20
Készlettartási költség ($i_{w,t}$)	P1 (w =1)	5	5
(Euró/db)	P2 (w =2)	5	5
Gyártási kapacitás (B_t) (Db)		300	200
Raktárkapacitás (W_t) (Db)		200	200

A termeléstervezési modell lineáris programozási alakja a következőképpen írható fel:

$$
\begin{array}{rccccccccll}
\text{Min} & 10x_{1,1} & +10x_{2,1} & +25x_{1,2} & +20x_{2,2} & +5i_{1,1} & +5i_{2,1} & +5i_{1,2} & +5i_{2,2}\,) & & \\
\hline
\text{Igény(P1\_T1)}: & x_{1,1} & & & & -i_{1,1} & & & & = & 0 \\
\text{Igény(P2\_T1)}: & & x_{2,1} & & & & -i_{2,1} & & & = & 100 \\
\text{Igény(P1\_T2)}: & & & x_{1,2} & & +i_{1,1} & & -i_{1,2} & & = & 200 \\
\text{Igény(P2\_T2)}: & & & & x_{2,2} & & +i_{2,1} & & -i_{2,2} & = & 100 \\
\hdashline
\text{Termelés(T1)}: & x_{1,1} & +x_{2,1} & & & & & & & \le & 300 \\
\text{Termelés(T2)}: & & & x_{1,2} & +x_{2,2} & & & & & \le & 200 \\
\hdashline
\text{Raktár(T1)}: & & & & & i_{1,1} & +i_{2,1} & & & \le & 200 \\
\text{Raktár(T2)}: & & & & & & & i_{1,2} & +i_{2,2} & \le & 200 \\
 & \multicolumn{8}{l}{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{2,2}, I_{1,1}, I_{2,1}, I_{1,2}, I_{2,2} \ge 0,} & &
\end{array}
\qquad (46)
$$

ahol

$x_{w,t}$ – a w termékből a t periódusban gyártandó mennyiség és

$i_{w,t}$ – a w termékből a t periódusban raktározandó mennyiség.

A terméléstervezési példa optimális megoldása a 3. táblázatban látható, de logikailag is egyszerűen kikövetkeztethető a megoldás. (A feladat optimális megoldását és a menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredményeket meghatározó LP feladatok LINGO kódjait, valamint a Visual Basicet vezérlő makrókat a melléklet tartalmazza.)

3. táblázat: A lineáris terméléstervezési feladat optimális megoldása

A modell változói		**T1 (*t*=1)**	**T2 (*t*=2)**
Termelt mennyiség ($x_{w,t}$)	P1 (*w*=1)	200	0
	P2 (*w* =2)	100	100
Készletszint ($I_{w,t}$)	P1 (*w* =1)	200	0
	P2 (*w* =2)	0	0
Szabad termelési kapacitás		0	100
Szabad raktárkapacitás		0	200

A két időszak gyártási költsége között jelentős különbség van: mindkét terméket olcsóbban tudjuk gyártani az első időszakban. A gyártást mindenképpen azokkal a termékekkel kell elkezdeni, amelyeket már az első időszak végére le kell gyártani. Miután P2-ből az igényelt 100 darab legyártásra kerül, van még 200 darab szabad termelési kapacitás. Mivel T2 időszakban P1 termék fajlagos gyártási költsége magasabb, ezért gazdaságilag ennek előreütemezése indokolt. Mivel a 200 darab P1 termék még pont elfér a raktárban, és így a fajlagos költség csak 15 Euró (10 Euró gyártási költség + 5 Euró raktározási költség egységenként) a T2 időszakbeli 25 Eurós fajlagos gyártási költséghez képest, az összes T2-ben igényelt P1 termék T1-ben kerül legyártásra. Mivel T1-ben ezzel kimerült mind a gyártási, mind a raktározási kapacitás, a megmaradt T2 időszakbeli igényt T2-ben kell legyártani – még akkor is, ha gazdaságilag ez nem előnyös. A 3. táblázat harmadik oszlopában a T1 időszakra, míg a negyedik oszlopában a T2 időszakra vonatkozó döntési változók optimális értékei láthatók. Így a legkisebb költségű termelési terv költsége 6000 Euró.

A mintapélda (46) matematikai programozási alakjából egyértelműen kiolvasható, hogy **A** mátrix rangja 8. A 3. táblázatban összefoglalt végeredmények között azonban csak négy változónak ($x_{1,1}$=200; $x_{2,1}$=100; $x_{2,2}$=100; $i_{1,1}$=200) van zérótól különböző értéke. Tehát a bázisban van négy zéró értékű változó, így a feladat biztosan primál degenerált.

A célfüggvény-együtthatók érzékenységvizsgálatának a LINGO szoftverrel és a javasolt számításokkal kapott eredményeit a 4. táblázat foglalja össze. A 4. táblázat adatait összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a LINGO csak két esetben szolgáltatta a menedzsmentdöntések szempontjából helyes eredményt: $r_{1,2}$ és $i_{2,2}$ esetében. A maradék hat célfüggvény-együtthatóra mindig szűkebb tartományt határozott meg a valódinál. A javasolt számítási módszerrel kapott helyes eredmények logikailag is könnyen levezethetők.

4. táblázat: A lineáris termeléstervezési mintapélda célfüggvény-együtthatóinak érzékenységvizsgálata

OFC	Eredeti érték	LINGO szoftver csökkenés	LINGO szoftver növekedés	Javasolt módszer γ_i^-	Javasolt módszer γ_i^+
$r_{1,1}$	10	-25	5	$-\infty$	5
$r_{2,1}$	10	-5	5	-5	∞
$r_{1,2}$	25	-5	∞	-5	∞
$r_{2,2}$	20	-5	5	-25	5
$i_{1,1}$	5	-25	5	$-\infty$	5
$i_{2,1}$	5	-5	5	-5	∞
$i_{1,2}$	5	-25	∞	-30	∞
$i_{2,2}$	5	-25	∞	-25	∞

Tekintsük példaként P2 termék T2 időszakbeli fajlagos gyártási költségét ($r_{2,2}$). Eredetileg $r_{2,2}$=20 Euró. A megengedhető maximális növekedés mindkét megoldás esetében 5 Euró. Ekkor $r_{2,2}$=25 Euró lenne, vagyis P2 és P1 fajlagos gyártási költsége megegyezne T2-ben. Ha $r_{2,2}$>25 Euró lenne, akkor már nem P1, hanem P2 termék gyártását kellene T1 időszakra ütemezni, vagyis az optimális megoldás megváltozna. Az erre vonatkozó végeredmények mindkét esetben helyesek tehát. $r_{2,2}$ megengedett csökkenésére a LINGO szoftver és a javasolt módszer más eredményre vezet. P2 T2-beli gyártási költségének ($r_{2,2}$) csökkenése egy ideig semmilyen hatással nem lehet az optimális termelési tervre, de P1 termék T1 időszakbeli gyártásának előnye egyre kisebb mértékű lesz. Ha $r_{2,2}$=15 Euró lenne, akkor P2 termék T2 időszakbeli gyártási költsége megegyezne P2 termék T1 időszakbeli gyártási és raktározási költségének összegével. $r_{2,2}$<15 esetén már jobban megérné P2-t T1-ben gyártani, azonban a gyártási kapacitás és a raktárkapacitás ezt nem teszik lehetővé. Így ez az $r_{2,2}$=15 Euró csupán szimbolikus tartalommal bír. Tehát $r_{2,2}$ értéke tovább csökkenhet, mert a gyártást nem tudjuk átütemezni. Amikor $r_{2,2}$=0, még akkor sem változik meg az optimális termelési terv. Ebben az esetben a termelési terv megvalósítása a 6000 Euróról 4000 Euróra csökken, de a gyártási és készletezési szint továbbra is változatlan. Tehát – T1 időszak 300 darabos gyártási kapacitását, valamint 200 darabos raktározási kapacitását teljesen kihasználva – az első időszakban a P2-ből a T1-ben igényelt 100 darabot kell legyártani (100*10=1000 Euró), valamint P1-ből a T2-ben igényelt 200 darabot (200*10+200*5=3000 Euró); továbbá T2-ben P2 gyártásáért nem kell fizetnünk. $r_{2,2}$ még tovább csökkenhet. $r_{2,2}$<0, jelentheti azt, hogy az adott termék előállításakor pénzhez jut a vállalat. Ha például $r_{2,2}$=-1 Euró, akkor az összes P2 termék T2-beli gyártásával 100 Euró nyereséghez jut a vállalat, így a teljes költség 3900 Euró lenne. Mivel a T2 időszak igénye teljes mértékben kielégítésre került, az igényen felüli termelést raktározni kellene. Így hiába kapunk pénzt a legyártott termékek után, addig nem éri meg megváltoztatni a termelési tervet, amíg a többletbevételből nem tudjuk finanszírozni a készlettartás költségégét. Mivel $i_{2,2}$=5 Euró, ezért $r_{2,2}$ egészen -5 Euróig csökkenhet. Amikor már $r_{2,2}$<-5 Euró, akkor az optimális termelési terv meg fog változni. Ekkor ugyanis megéri teljesen kihasználni T2 időszak gyártási és raktározási kapacitását, és 200 darabot gyártani a 100 helyett P2 termékből, mert a termék gyártásának többletbevételből a raktározási költség finanszírozható. A LINGO a szimbolikus tartalommal bíró 15 Eurós határt állapította meg $r_{2,2}$ alsó határára, a javasolt számítással a helyes, -5 Eurós érték (20-25=-5 Euró) került meghatározásra. A többi különbség is könnyen kikövetkeztethető.

Az 5. táblázat a lineáris termeléstervezési mintapélda jobboldali paramétereinek érzékenységvizsgálati eredményeit foglalja össze. Először a LINGO szoftver által meghatározott értékek, majd a javasolt módszer számítási végeredményei kerültek feltüntetésre. Meg kell jegyezni, hogy a pozitív árnyékárnál a jobboldali paraméterrel megfelelő irányban változik az optimum értéke, míg negatív SP esetén ez a változás pont ellentétes. Például y_1^- =10 esetén a jobboldali paraméter csökkenésével az optimum is csökken, míg y_7^- =-10 esetében a jobboldali paraméter csökkenésével ellentétben az optimum nő. y_3^+ =25 pedig azt jelenti, hogy a jobboldali paraméter növekedésével az optimum értéke is nő.

5. táblázat: A lineáris termeléstervezési feladat jobboldali paramétereinek érzékenységvizsgálata

Jobboldali paraméter	Eredeti érték	LINGO szoftver			Javasolt módszer					
		y_j	ξ_j^-	ξ_j^+	y_j^- (y_j)	$n\xi_j^-$	$n\xi_j^+$	y_j^+	$p\xi_j^-$	$p\xi_j^+$
$\boldsymbol{D_{1,1}}$	0	15	0	0	10	-200	0	20	0	100
$\boldsymbol{D_{2,1}}$	100	15	0	0	10	-100	0	20	0	100
$\boldsymbol{D_{1,2}}$	200	20	-100	0	20	-100	0	25	0	100
$\boldsymbol{D_{2,2}}$	100	20	-100	100	20	-100	100	-	-	-
$\boldsymbol{B_1}$	300	-5	0	0	-10	-100	0	0	0	∞
$\boldsymbol{B_2}$	200	0	-100	∞	0	-100	∞	-	-	-
$\boldsymbol{W_1}$	200	0	0	∞	-10	-100	0	0	0	∞
$\boldsymbol{W_2}$	200	0	-200	∞	0	-200	∞	-	-	-

Az 5. táblázat eredményei alapján megállapíthatjuk, hogy a LINGO szoftver csak három jobboldali paraméterre vonatkozóan ($D_{2,2}$, B_2, és W_2) adta meg a helyes árnyékárat és az azokhoz tartozó érvényességi tartományt. $D_{1,1}$, $D_{2,1}$, és B_1 jobboldali paraméterek esetében a LINGO olyan árnyékárat határozott meg, amelyek menedzsment szempontból irrelevánsak. A LINGO $D_{1,2}$-re csak a baloldali, míg W_1-re csak a jobboldali árnyékárakra vonatkozó információt szolgáltatta. A javasolt számítási módszerrel a menedzsment döntéshozatalhoz szükséges összes információ megkapható.

Tekintsük például a P1 termék T1 időszakbeli igényére ($D_{1,1}$) vonatkozó adatokat. Eredetileg $D_{1,1}$=0 és P1 termék fajlagos gyártási költsége T1 időszakban 10 Euró. Ha T1 időszakban felmerül valamekkora igény P1 termék iránt, akkor az eredetileg T2-ben igényelt de – a költségek kedvezőbb alakulása miatt – T1-ben legyártott P1 termékek egy részének gyártását át kell ütemezni. Így ugyanis a 300 darabos gyártási kapacitás miatt a T2-ben igényelt P1 termékek nem gyárthatóak le – a meglévő $D_{2,1}$ és a felmerülő $D_{1,1}$ igények mellett. Ha $D_{1,1}$ egy darabbal megnő, akkor egy T2-ben igényelt P1 termék gyártását át kell ütemezni T1 időszakról T2 időszakra. T2-ben P1 termék fajlagos gyártási költsége 25 Euró. Így 10 Euró helyett 25 Euróért gyártható le ugyanaz a termék, azonban az átütemezéssel az 5 Eurós fajlagos raktározási költség eliminálódik. Tehát a gyártás átütemezése 10 (25-10-5) Eurós többletköltséget jelent a vállalatnak. Összesen tehát, ha $D_{1,1}$ egy darabbal nő (y_1^+), akkor az 20 Euróval (10 Euró az átütemezés költsége és 10 Euró a gyártási költség darabonként) növeli meg az optimális termelési terv költségét. Mivel T2 időszakban 100 darab szabad termelési kapacitással rendelkezünk, ez a 20 Eurós egységenkénti optimum-változás is eddig lesz érvényes. Amennyiben az eredetileg $D_{1,1}$=0 darab igény csökken (y_1^-), úgy $D_{1,1}$<0. A $D_{1,1}$ negatív igény azt jelenti, hogy P1 termékből a T1 időszakban a vállalat rendelkezésére áll ez a mennyiség és szabadon felhasználhatja. Ezzel a vállalat 10 Eurót takarít meg, hiszen T1 időszakban ennyibe kerül egy P1 termék legyártása. Ez természetesen mind a 200 darab T2-ben igényelt, T1-ben gyártandó P2 termékre igaz. Az 5. táblázat első sorában láthatjuk, hogy a javasolt számítási módszerrel megkaptuk az y_1^+=20 Euró jobboldali és az y_1^-=10 Euró baloldali árnyékárat, a helyes érvényességi tartományokkal együtt. Ezzel szemben a LINGO egy menedzsment szempontból irreleváns árnyékárat határozott meg. A többi adat is hasonlóan kikövetkeztethető.

Ahogy korábban összefoglaltam, a menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredmények meghatározása egy I célfüggvény-együtthatójú és J korlátozó feltételű modellben a legrosszabb esetben $2I+6J$ LP feladat megoldását teszi szükségessé. Ezeknek az LP feladatoknak a száma szűréssel csökkenthető. Az elemzett modell 8 döntési változót tartalmaz, így ahhoz, hogy a célfüggvény-együtthatók menedzsment szempontból korrekt érvényességi tartományait megkapjuk 2*8=16 darab LP feladatot kellett megoldani. A modell 8 jobboldali paraméterének menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálatához a legrosszabb esetben 6*8=48 LP feladat megoldására lenne szükség. Az 5. táblázatból látható, hogy a nyolc korlátozó feltételből három ($D_{2,2}$, B_2, W_2) nem a határon teljesül, így itt biztosan csak egy árnyékár létezik. Vagyis a szoftver által szolgáltatott eredmények helyesek, azok menedzsment döntésekhez felhasználhatóak. Ez azt jelenti, hogy ezen 3 jobboldali paraméternél korlátozó feltételenként 4 LP feladat megoldásától eltekinthetünk (a két perturbált feladattól és az egyik oldali csökkenés és növekedés számításától). Vagyis a 48 helyett csak 36 LP feladatot kell megoldanunk, hogy megkapjuk a menedzsment szempontból korrekt jobboldali paraméter érzékenységvizsgálati eredményeket. Így összesen az alapfeladaton túl 52 LP feladatot kell megoldani a vizsgált példában.

4. A GYÁRTÓSOR- KIEGYENLÍTÉSI PROBLÉMA VIZSGÁLATA BINÁRIS PROGRAMOZÁSI MODELLEK SEGÍTSÉGÉVEL

A bináris programozás az egészértékű programozás olyan speciális esete, amelyben a változók csak nulla vagy egy értéket vehetnek fel. A fejezetben egy klasszikus menedzsment-problémát, a gyártósor-kiegyenlítést vizsgálom bináris programozási modellekkel. A szakirodalom alapmodelljeinek bemutatása után a gyártási mennyiség érzékenységvizsgálatával foglalkozom és az alapmodellek segítségével definiálok egy menedzsment szempontból fontos érzékenységvizsgálati tartományt. Ez után térek rá az eltérő képzettségű dolgozók alkalmazásának optimális megoldásra kifejtett hatására. Végül a gyártósor-kiegyenlítéssel kapcsolatos kutatási eredményeimet egy gyakorlati példával szemléltetem.

4.1. A gyártósor-kiegyenlítés alapmodelljei

A gyártósor-kiegyenlítés négy alap matematikai modelljét a 6. ábra szemlélteti. Kutatásaim során a klasszikus értelemben vett, egycélú optimalizálási problémákkal, az SALB-1 és SALB-2 modellekkel foglalkoztam. Az SALB-1 modell adott ciklusidő mellett minimalizálja az összeszereléshez szükséges erőforrások számát. Az SALB-2 modell adott munkahelyszám mellett minimalizálja a ciklusidőt, ami megegyezik a gyártási mennyiség maximalizálásával. A fejezetben először a két bináris programozási modellt mutatom be. Utána a gyártási mennyiség érzékenységvizsgálatával foglalkozom, amely a két alapmodellre épül.

4.1.1. SALBM-1

A feladatokat sorszámmal látjuk el, így minden feladathoz tartozik egy $m=1,\ldots,M$ index. Összesen M feladatot kell munkaállomásokhoz rendelni. A munkaállomásokat n indexszel látjuk el ($n=1,\ldots N$). A gyártósor-kiegyenlítés bináris programozási modelljeiben tehát M feladatot kell N munkahelyhez rendelni. Elméletileg a legrosszabb esetet feltételezve M feladat végrehajtásához M darab munkahelyre lehet szükség. Bár gyakran ennél jóval kevesebb munkahely is elegendő. Mindenképpen teljesülnie kell azonban az $N \leq M$ feltételnek. A modellek döntési változója x_{mn}, ami 1 értéket vesz fel, ha az m-edik feladatot az n-edik munkahelyhez rendeltük, különben ez az érték zéró.

Az erőforrás-minimalizáló 1-es típusú egyszerű gyártósor-kiegyenlítési modellen (SALBM-1) a következő bináris programozási feladatot értjük:

$$\mathrm{Min}(V) \tag{47}$$

$$\sum_{m=1}^{M} t_m x_{mn} \leq T_c \qquad n = 1,...,N \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_{mn} = 1 \qquad m = 1,...,M \tag{49}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n \cdot \left(x_{qn} - x_{pn}\right) \geq 0, \qquad (p,q) \in R \tag{50}$$

$$V \geq \sum_{n=1}^{M} \left(n \cdot x_{mn}\right) \qquad m \in L \tag{51}$$

$$x_{mn} = 0 \qquad n < LJ_m, n > UJ_m \quad m = 1,...,M\ . \tag{52}$$

Az SALB-1 modell (48) feltétele előírja, hogy egyik állomás tevékenységeinek összes ideje se haladja meg a menedzsment által előre meghatározott ciklusidőt. A ciklusidőt a menedzsment a gyártásra rendelkezésre álló idő (T) és a gyártandó darabszám (Q) ismeretében a következők szerint határozza meg

$$T_c = \frac{T}{Q}. \tag{53}$$

(49) előírja, hogy minden feladat egyszer kerüljön elvégzésre. (50) feltétel a feladatok közötti precedencia kapcsolatoknak való megfelelést írja elő, ahol p tevékenység q tevékenység közvetlen megelőzője. Ha p és q tevékenység ugyanahhoz a munkahelyhez kerül hozzárendelésre, akkor (50) egyenlőség formájában teljesül. Amennyiben (50) baloldala pozitív, akkor a munkahely sorszámát mutató n súlyszám miatt q tevékenység p után kerül végrehajtásra. Az (51) feltétel a (47) célfüggvénnyel minimalizálja az összeszereléshez szükséges állomások számát, hiszen előírja, hogy az L halmazba tartozó utolsó tevékenységek minél hamarabb kerüljenek végrehajtásra. A feladatok tevékenységidői és a precedencia kapcsolatok miatt bizonyos feladatok nem rendelhetőek bizonyos munkahelyekhez. Ezt figyelembe véve (52) a bináris változók számát csökkenti, amelyben

$$LJ_m = \left\lceil \frac{t_m + \sum_{u \in P_m} t_u}{T_c} \right\rceil \text{ és} \tag{54}$$

$$UJ_m = N + 1 - \left\lceil \frac{t_m + \sum_{u \in S_m} t_u}{T_c} \right\rceil, \tag{55}$$

ahol $\lceil x \rceil$ a felső egészrészt jelöli. LJ_m megadja annak a munkahelynek a sorszámát, amelyhez az m-edik tevékenység elméletileg a legkorábban rendelhető hozzá. Ha az m-edik tevékenység idejéhez hozzáadjuk a megelőző tevékenységeinek összes idejét és mindezt elosztjuk a ciklusidővel, akkor felfelé kerekítve megkapjuk annak a munkahelynek a sorszámát, amelyhez elméletileg az m-edik tevékenység a legkorábban hozzárendelhető. Természetesen a precedencia kapcsolatok és egyéb logikai feltételek miatt nem biztos, hogy az m-edik tevékenységet ehhez a munkahelyhez rendeljük. A megelőző tevékenységek miatt tehát az m-edik tevékenység nem rendelhető az LJ_m sorszámnál kisebb sorszámú állomáshoz, így az ezekhez tartozó döntési változók értéke zéró. UJ_m megadja annak a munkahelynek a sorszámát, amelyhez az m-edik tevékenység elméletileg a legkésőbb rendelhető. A követő tevékenységek miatt az m-edik tevékenység nem rendelhető UJ_m sorszámnál nagyobb sorszámú állomáshoz, így az ezekhez tartozó döntési változók értéke zéró. Megjegyzendő, hogy a (47)-(52) modell több utolsó tevékenység esetén is alkalmazható. Amennyiben csak egy utolsó tevékenység van, akkor a célfüggvény a következő módon egyszerűsödik

$$\mathrm{Min}\left(\sum_{n=1}^{N} x_{c,n}\right), \tag{56}$$

amelyben c az utolsó feladat sorszámát adja meg. A bemutatott modell összesen

$$\sum_{n=1}^{N}\left(UJ_m + 1 - LJ_m\right) \tag{57}$$

változót tartalmaz. Ez kevesebb, mint az irodalomban általában alkalmazott modellek változóinak száma. Több utolsó feladatot tartalmazó gyártósor-kiegyenlítési feladat esetén általában egy minden utolsó feladatot követő látszattevékenységet vezetnek be (Talbot-Patterson, 1984). A cél ilyenkor a látszattevékenységet végrehajtó munkaállomás sorszámának minimalizálása. Így az új tevékenység bevezetése miatt M+1 új változó generálódik. Az általunk alkalmazott modellben az utolsó tevékenységek sorszámát, mint súlyszámokat alkalmazzuk. Így esetünkben csak egy új változó bevezetésére van szükség (V) (Tatay-Koltai, 2010c).

4.1.2. SALBM-2

A ciklusidő-minimalizáló egyszerű gyártósor-kiegyenlítési modellen a következő bináris programozási feladatot értjük:

$$\text{Min } T_c \tag{58}$$

$$\sum_{m=1}^{M} t_m x_{mn} \le T_\mathrm{c} \qquad n = 1,\ldots,N \tag{59}$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_{mn} = 1 \qquad m = 1,\ldots,M \tag{60}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n \cdot \left(x_{qn} - x_{pn} \right) \ge 0 \qquad (\, p, q \,) \in R \tag{61}$$

$$x_{mn} = 0 \qquad n < LJ_m, n > UJ_m \qquad m = 1,\ldots,M\ . \tag{62}$$

Az SALB-2 modell (59)-(61) korlátozó feltételei a (48)-(50) feltételekkel megegyezően a munkahelyekhez rendelt feladatok ciklusidő túllépését, az egyszeri végrehajtásukat és a köztük fennálló precedencia kapcsolatokat írják elő. (62) a (52) feltételhez hasonlóan a bináris változók számát csökkenti, amelyben

$$LJ_m = \left\lceil \frac{t_m + \sum_{u \in P_m} t_u}{UB(T_c)} \right\rceil \text{ és} \tag{63}$$

$$UJ_m = N + 1 - \left\lceil \frac{t_m + \sum_{u \in S_m} t_u}{UB(T_c)} \right\rceil , \tag{64}$$

ahol $UB(T_C)$ a ciklusidőre adott felső becslés. Az *m*-edik tevékenység esetében azokhoz a munkahelyekhez tartozó változók értéke biztosan zéró, amelyek kisebbek, mint az elméletileg legkorábbi munkahely vagy nagyobbak, mint az elméletileg legkésőbbi munkahely sorszáma.

A (58)-(62) modellt adott N munkahelyszámra oldjuk meg. Egy munkahely esetén (N=1) az összes feladatot egy munkahelyhez rendeljük. Ekkor a ciklusidő a feladatok tevékenységidejének összege. Ekkor az egyetlen munkahelyen a kapacitáskihasználtság maximális

$$KK_n = \frac{\sum_{n=1}^{N} t_n}{N \cdot T_C} \tag{65}$$

A maximális, N munkahely esetén minden tevékenységet külön munkahelyen hajtunk végre. Ebben az esetben a ciklusidő megegyezik a leghosszabb tevékenységidővel. Mivel a munkahelyeken sok az üres idő, az egyes munkahelyek kapacitáskihasználtsága igen alacsony. A valóságban a két szélsőség között működnek a rendszerek. Pontos információkat a modell különböző N munkahelyszámok melletti futtatásával kapunk.

4.1.3. A gyártási mennyiség érzékenységvizsgálata

A gyártósor-kiegyenlítési probléma megoldása számos gyakorlati kérdés megválaszolásában segítségére lehet a menedzsmentnek. Fontos kérdés, hogy a gyártási mennyiség változása – ami meghatározza a ciklusidőt – hogyan befolyásolja a rendszer működését. Az egész rendszer működésének jóságáról a hozzárendelés hatékonysága (*HH(Q)*) szolgáltat a menedzsment számára információt, amely egy adott hozzárendelés esetében a következőképpen számítható:

$$HH(Q) = \frac{\sum_{i=1}^{I} t_i}{N \cdot T_c} = \frac{\sum_{i=1}^{I} t_i}{N \cdot \frac{T}{Q}} = Q \cdot \frac{\sum_{i=1}^{I} t_i}{N \cdot T}. \qquad (66)$$

Ideális esetben a hozzárendelési hatékonyság 1. Ekkor nincs kihasználatlan kapacitás, minden munkahelyen a tevékenységidők összege azonos, ebből következően ezek megegyeznek a ciklusidővel. Az ideális eset ritkán valósul meg. Logikai és technikai okokból a munkahelyek állomásidői nem egyeznek meg, így a ciklusidőnél kisebb állomásidők miatt fellépő holtidők csökkentik a hatékonyságot. A szükségesnél nagyobb számú munkahely alkalmazása szintén csökkenti a hatékonyságot.

Amint az a (66)-ból látható, *HH(Q)* függ a munkahelyek számától és a gyártott mennyiségtől. A gyártási mennyiség csökkenésével *HH(Q)* is csökken, hiszen ezzel a ciklusidő nő. A gyártási mennyiség növekedésével a ciklusidő csökken, ami növeli a hatékonyságot. Bármilyen rendszerről legyen szó, általános cél azt minél magasabb hatékonysággal működtetni. A gyártósor hatékonysága (66) szerint a gyártási mennyiséggel növelhető. A gyártási mennyiség azonban nem növelhető a végtelenségig. Létezik egy maximális mennyiség, amely N munkahelyen, adott hozzárendelés mellett a rendelkezésre álló T idő alatt készíthető el. Ezt a maximális mennyiséget – amelyet jelöljön $Q_{\mathrm{Max}}(N)$ – a leghosszabb állomásidő határozza meg,

$$Q_{\mathrm{Max}}(N) = \frac{T}{\underset{n=1...N}{Max}\{s_n\}}. \qquad (67)$$

Amennyiben a gyártani kívánt mennyiség – adott N munkahelyszám mellett – $Q_{\mathrm{Max}}(N)$-nél nagyobb, akkor ez a mennyiség a rendelkezésre álló idő növelésével vagy – jó esetben – egy új hozzárendeléssel növelhető. Tehát ez a $Q_{\mathrm{Max}}(N)$ érték egy adott hozzárendeléshez tartozik – amelyben N munkahelyen dolgoznak a dolgozók. A gyártási mennyiség csökkenésével a ciklusidő nő, ami $HH(Q)$ csökkenését eredményezi. Egy bizonyos mértékű csökkenés lehetséges csak egy adott számú munkahelyhez tartozó elrendezés esetén. A gyártási mennyiség csökkenése egy idő után olyan mértékű, hogy kevesebb munkahely is elegendő a termékek legyártására, vagyis az SALB-1 modell megoldása megváltozik, az optimális munkahelyszám csökken. Az SALBM-1 megoldásával, $Q_{\mathrm{Max}}(N)$ és $Q_{\mathrm{Max}}(N\text{-}1)$ segítségével a következők szerint adható meg az a tartomány, amelyen belül N munkahelyszám alkalmazása optimális:

$$Q_{\mathrm{Max}}(N-1) < Q \le Q_{\mathrm{Max}}(N). \tag{68}$$

Tehát N munkahely esetén $Q_{Max}(N)$ megadja azt a maximális gyártási mennyiséget, amely mellett az N darab munkahelyszám alkalmazása még optimális. N számú munkahely alkalmazása addig optimális, amíg a gyártási mennyiség nagyobb, mint $Q_{\mathrm{Max}}(N\text{-}1)$. Ennél kevesebb termék előállításához ugyanis már kevesebb munkahely is elegendő.

Az SALB-2 modell adott munkahelyszám mellett minimalizálja a ciklusidőt, ami megegyezik a gyártási mennyiség maximalizálásával. Ennek segítségével egy újfajta érvényességi tartományt definiálhatunk. SALBM-2 segítségével meghatározható egy maximális érvényességi tartomány, amelyen belül biztos, hogy a Q gyártási mennyiség optimális, vagyis az adott számú munkahely legalább kell a kívánt termékmennyiség legyártásához. Ehhez bevezetjük a $Q_{\mathrm{Max}}^{\mathrm{OPT}}(N)$ jelölést, amely N munkahelyszám mellett megadja a maximálisan gyártható termékmennyiséget – ez tehát már nem egy adott hozzárendeléshez, hanem egy adott munkahelyszám optimális megoldásához tartozik. $Q_{\mathrm{Max}}^{\mathrm{OPT}}(N-1)$ az $N-1$ munkahellyel legyártható termékek maximális számát jelöli. Amennyiben a gyártási mennyiségre igaz, hogy

$$Q_{\mathrm{Max}}^{\mathrm{OPT}}(N-1) < Q \le Q_{\mathrm{Max}}^{\mathrm{OPT}}(N), \tag{69}$$

akkor a ciklusidő optimális, tehát minimális, ami maximális gyártási mennyiséget jelent. Ez a maximális érvényességi tartomány szoros kapcsolatban van a hozzárendelési hatékonysággal. A maximális érvényességi tartományon belül biztos, hogy a hozzárendelés hatékonysága a lehető legmagasabb, hiszen $Q_{\mathrm{Max}}^{\mathrm{OPT}}(N)$ darab terméknél több nem gyártható le N munkahelyen, $Q_{\mathrm{Max}}^{\mathrm{OPT}}(N-1)$ darabnál kevesebb termék legyártásához pedig elegendő $N-1$ számú munkahely (Koltai-Tatay, 2010).

4.2. Különböző képzettségű dolgozók alkalmazásának hatása a gyártósor-kiegyenlítési feladat optimális megoldására

Fontos gyakorlati probléma, hogy a modell képes-e figyelembe venni a gyártósoron dolgozók eltérő képzettségi szintjét, illetve a feladatok különböző nehézségi szintjeit. Gyakran előfordul például, hogy különböző feladatok végrehajtása speciális képzettséget igényel és ilyen speciális képzettséggel nem rendelkezik minden alkalmazott. A szakirodalomban kevés munka foglalkozik ezzel a problémával. Johnson (1983) – egy még a megoldási algoritmusokra fókuszáló cikkében – a feladatok különböző munkahelyen való végrehajtását vizsgálta. Egy bináris mátrixban összefoglalta, hogy mely tevékenységet mely munkahelyhez lehet hozzárendelni. Bár Johnson ezáltal két csoportra bontotta a feladatokat, a dolgozók képzettségbeli különbözőségét a modell nem vette figyelembe. Corominas és szerzőtársai (Corominas et al., 2008) egy motorkerékpár összeszerelő üzemben egy konkrét esetben foglalkoznak a különböző képzettségű dolgozókkal. A cikkben kétféle dolgozót alkalmaznak a gyártósoron: a régóta ott dolgozó, tapasztalt dolgozókat és az átmeneti kapacitáshiányt orvosló, ideiglenesen ott dolgozókat. A modellben a kevésbé tapasztalt alkalmaottak miatt kétféle új korlátozó feltételcsoport jelent meg. Egyrészt az új alkalmazottaknak tovább tart a tevékenység elvégzése, ezért azon a munkahelyen, ahol ilyen dolgozó dolgozik nagyobb tevékenységidőt kell figyelembe venni. Másrészt az üzemben kikötötték, hogy egy új alkalmazottnak egy régi mellett kell dolgoznia – a munka során felmerülő problémák mihamarabbi megoldása céljából. Ez a modell a dolgozók különböző képzettségét (vagy inkább jártasságát) ugyan figyelembe veszi, de a modell csak a konkrét esetre alkalmazható, általánosan nem fogalmaz meg képzettségi feltételeket. Nem találtam a szakirodalomban olyan munkát, amely a gyártósor-kiegyenlítés matematikai modellezése során a dolgozók különböző képzettségének általános figyelembe vételével foglalkozik. A továbbiakban bemutatom, hogy hogyan vehető általánosan figyelembe gyártósor-kiegyenlítési modellekben, ha különböző nehézségű feladatokat (egyszerű, bonyolult, speciális) különböző képzettségi szinttel (alacsony, magas, speciális) rendelkező alkalmazottakhoz kell hozzárendelni.

4.2.1. Általános képzettségi szintet leíró feltételek (General Skill Constraints)

A feladatok munkahelyhez és dolgozókhoz rendelésekor figyelembe kell vennünk, ha egy alkalmazott valamely feladatot nem tudja elvégezni, vagy épp ellenkezőleg, csak ő képes azt végrehajtani. A dolgozók különböző képzettségi szintjének optimális megoldásra kifejtett hatását a követezőkben három eset segítségével mutatom be. A különböző esetekben a feladatokat és a dolgozókat különböző szintekbe lehet besorolni. k (k=1,…K) különböző szintet különböztetünk meg a feladatok és a képzettségi szintek esetében. Ha az m-edik tevékenység a k-adik szinthez tartozik, akkor a feladat az S_k halmaz egy eleme. A vizsgált esettől függően bizonyos képzettségi szinttel rendelkező dolgozó csak meghatározott szintű feladatok ellátására képes.

Az alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozók modellje (angolul: Low Skill Constraints, továbbiakban rövidítve LSC) az egyszerű feladatokból és az alacsony képzettségi szintű dolgozókból indul ki. A magas képzettségi szinttel rendelkező dolgozók modellje (angolul High Skill Constraints, továbbiakban rövidítve: HSC) a bonyolultabb feladatokból és a magas képzettségi szintű dolgozókból indul ki. A speciális képzettségi szinttel rendelkező dolgozók modellje (angolul: Executive Skill Constraints, továbbiakban rövidítve: ESC) a speciális feladatokra és a speciális képzettséggel rendelkező dolgozókra fókuszál. Az SALB-1 és SALB-2 modellek tetszés szerint kiegészíthetőek az LSC, a HSC vagy az ESC feltételekkel és így a különböző képzettséggel rendelkező alkalmazottak optimális megoldásra gyakorolt hatása könnyen nyomon követhető. Az LSC, HSC vagy ESC feltételek SALB-1 vagy SALB-2 modellekhez adásával a valóságot jobban leíró modellek kaphatóak.

4.2.1.1 LSC feltételek

Az LSC feltételek esetében az alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozókból indulunk ki. Definiálunk k=1,…K különböző képzettségi szintet, amelyek egymásra épülnek. Tehát k=1 a legegyszerűbb feladatok szintje, a k=2 szintű feladatok bonyolultabbak, a legbonyolultabb feladatok K szinthez tartoznak. A dolgozók csak a képzettségüknek megfelelő feladatot láthatják el. A legegyszerűbb (k=1) feladatot mindenki meg tudja oldani, a legalacsonyabb képzettségi szinttel rendelkezők (k=1) azonban csak a legegyszerűbb (k=1) tevékenységeket tudják elvégezni. A következő (k=2) szintű tevékenység már bonyolultabb, ezért azt a legalacsonyabb képzettségűek nem tudják elvégezni, viszont a második vagy annál magasabb képzettségi szinttel rendelkezők igen. Így tehát a legmagasabb képzettségi szinttel rendelkező dolgozók – akiknek a képzettségi szintje a K szinthez tartozik – használhatóak fel a legszélesebb körben. Minél alacsonyabb képzettségi szinttel rendelkezik egy dolgozó, vagyis minél alacsonyabb a képzettségi szintjét jelölő szám értéke, annál inkább korlátozott, hogy az adott dolgozót milyen feladatokhoz lehet hozzárendelni. Ezt a szituációt a következő korlátozó feltételekkel írhatjuk le:

$$\sum_{m\in S_k} x_{mn} \le z\sum_{v=k}^{K} l_{nv} \qquad n=1,...,N; \quad k=1,...,K \tag{70}$$

$$\sum_{n=1}^{N} l_{nk} \ge W_k \qquad k=1,...,K \tag{71}$$

$$\sum_{k=1}^{K} l_{nk} \le 1 \qquad n=1,\ldots,N \tag{72}$$

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mn} \ge l_{nk} \qquad n=1,...,N; \quad k=1,...,K, \tag{73}$$

ahol k index jelöli a képzettségi szintet, z egy tetszőlegesen nagy szám, l_{nk} pedig a k-adik képzettségi szintű dolgozó n-edik munkahelyhez rendelésének bináris változója. l_{nk} értéke 1, ha a k-adik képzettségi szintű dolgozót rendelünk az n-edik munkahelyhez, különben értéke 0. z szám értékével kapcsolatban annyi kikötést kell tenni, hogy értéke legyen nagyobb, mint a tevékenységek száma – ez pedig azt jelenti, hogy nagyobb, mint a munkahelyek száma, hiszen $N \le M$. Így abban a szélsőséges esetben, ha minden tevékenység k-adik szintű és (70) baloldalának értéke megegyezik a feladatok számával, akkor is teljesül (70). Ez a z érték a továbbiakban is fontos szerepet játszik a korlátozó feltételekben és értékével kapcsolatban ezt a kikötést mindig fenntartjuk. S_k a k-adik szintű feladatok halmaza, így a (70) feltétel előírja, hogy az n-edik munkahelyhez rendelt k-adik szintű tevékenységekhez legalább k-adik képzettségi szintű dolgozóra van szükség. A baloldalból kiderül, hogy van-e k-adik szintű tevékenység az adott munkahelyen. Ha van, akkor a feltétel csak úgy teljesülhet, ha a feltétel jobboldala nem zérus, vagyis egy k-adik vagy annál magasabb szintű dolgozót rendelünk ehhez a munkahelyhez. A (71) korláttal adható meg, hogy a k-adik képzettségi szintű dolgozóból minimum mennyit kell a hozzárendelésben felhasználnunk. A (72) egyenlőtlenség azt írja elő, hogy egy munkahelyhez maximum csak egy dolgozó rendelhető. A (73) feltétel biztosítja, hogy speciális dolgozót csak olyan munkahelyhez rendeljünk, ahol van feladat is – tehát üres állomáshoz ne rendeljünk dolgozót.

4.2.1.2 HSC feltételek

A HSC feltételek esetében a magas képzettségi szinttel rendelkező dolgozók képezik a kiindulási pontot. Definiálunk k=1,…K különböző képzettségi szintet, ahol k=1 a legbonyolultabb feladatok szintje, a k=2 szintű feladatok egyszerűbbek, a legegyszerűbb feladatok a K szinthez tartoznak. A dolgozók csak a képzettségüknek megfelelő feladatot láthatják el. A legbonyolultabb, k=1 szintű feladatokat csak a legképzettebb (k=1) dolgozók tudják elvégezni. A legképzettebb dolgozókhoz bármilyen tevékenység hozzárendelhető. A képzettségi szint csökkenésével, vagyis a képzettségi szintet jelölő szám növekedésével csökken a dolgozók által elvégezhető feladatok köre. A legkevésbé képzett dolgozókhoz csak a k=K szintű feladatok rendelhetőek. A HSC feltételek a következőképpen írhatóak fel:

$$\sum_{m \in S_k} x_{mn} \le z \sum_{v=1}^{k} h_{nv} \qquad n = 1,\ldots,N; \quad k = 1,\ldots,K \tag{74}$$

$$\sum_{n=1}^{N} h_{nk} \le W_k \qquad k = 1,\ldots,K \tag{75}$$

$$\sum_{k=1}^{K} h_{nk} \le 1 \qquad n = 1,\ldots,N \tag{76}$$

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mn} \ge h_{nk} \qquad n = 1,\ldots,N; \quad k = 1,\ldots,K\,, \tag{77}$$

ahol k index jelöli a képzettségi szintet, z egy tetszőlegesen nagy szám, h_{nk} pedig a k-adik képzettségi szintű dolgozó n-edik munkahelyhez rendelésének bináris változója. h_{nk} értéke 1, ha a k-adik képzettségi szintű dolgozót rendelünk az n-edik munkahelyhez, különben értéke 0. A (74) feltétel előírja, hogy az n-edik munkahelyhez rendelt k-adik szintű tevékenységekhez legfeljebb k-adik képzettségi szintű dolgozóra van szükség. A baloldalból kiderül, hogy van-e k-adik szintű tevékenység az adott munkahelyen. Ha igen, akkor a feltétel csak úgy teljesülhet, ha a feltétel jobboldala nem zérus, vagyis egy k-adik vagy annál kisebb számmal jelölt, magasabb képzettséggel rendelkező dolgozót rendelünk ehhez az állomáshoz (h_{nk}=1). A (75) korláttal adható meg, hogy a k-adik képzettségi szintű dolgozóból mennyi áll rendelkezésre. Maximum ugyanis W_k számú k-adik képzettségi szintű dolgozóval rendelkezik a vállalat. A (76) egyenlőtlenség azt írja elő, hogy egy munkahelyhez maximum csak egy dolgozó rendelhető. A (77) biztosítja, hogy speciális dolgozót csak olyan munkahelyhez rendeljünk, ahol van feladat is – tehát üres állomáshoz ne rendeljünk dolgozót.

4.2.1.3 ESC feltételek

Az ESC feltételek alkalmazása azt jelenti, hogy különböző speciális szaktudást igénylő feladatcsoportokat képezünk, amelyek elvégzéséhez szükség van a megfelelően képzett munkaerőre is. Adott feladatot csak az adott képzettséggel rendelkező dolgozó tudja ellátni, adott képzettséggel rendelkező alkalmazotthoz csak a képzettségének megfelelő feladat rendelhető. Az alábbi egyenletek ezt fogalmazzák meg:

$$\sum_{m \in S_k} x_{mn} \leq z e_{nk} \qquad n = 1,\ldots,N; \quad k = 1,\ldots,K \tag{78}$$

$$\sum_{m \notin S_k} x_{mn} \leq z(1 - e_{nk}) \qquad n = 1,\ldots,N; \quad k = 1,\ldots,K \tag{79}$$

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mn} \geq e_{nk} \qquad n = 1,\ldots,N; \quad k = 1,\ldots,K\ , \tag{80}$$

ahol k index jelöli a képzettségi szintet, z egy tetszőlegesen nagy szám, e_{nk} pedig a k-adik képzettségi szintű dolgozó n-edik munkahelyhez rendelésének bináris változója. e_{nk} értéke 1, ha a k-adik képzettségi szintű dolgozót rendelünk az n-edik munkahelyhez, különben értéke 0. (78) segítségével megadjuk, hogy a k–adik képzettségi szintet igénylő tevékenységet csak k-adik képzettségi szinttel bíró dolgozó végezheti el. (79) ennek pont az ellenkezőjét írja elő, vagyis egy nem k-adik képzettségi szintet megkövetelő feladathoz k-adik speciális képzettségi szinttel rendelkező dolgozó nem rendelhető hozzá. (80) biztosítja, hogy üres munkahelyhez nem rendelhető hozzá speciális képzettségű dolgozó.

A gyártósoron dolgozók különböző képzettségi szintjeire ismertetett korlátozó feltételekkel a gyártósor-kiegyenlítés alapmodelljei tetszés szerint kiegészíthetőek, ezáltal a valóságot jobban leíró modellek kaphatóak. A háromféle megközelítéssel az eltérő képzettséggel rendelkező dolgozók problémája jól kezelhető. Az alapmodellhez mindhárom esetben N munkahely és K képzettségi szint esetén $N*K$ új bináris változót kell hozzáadni. Ezek száma, azonban szűréssel csökkenthető.

4.2.2. A döntési változók számának csökkentése a *k*-adik képzettségi szintű dolgozó *n*-edik munkahelyhez rendelési mátrixában

Az eltérő képzettségi szintek különböző eseteiben közös, hogy a K különböző képzettségi szintű dolgozó N különböző munkahelyhez rendelésére egy $K*N$ elemű mátrixot vezetünk be. Logikai megfontolások alapján azonban ennek a $K*N$ elemű mátrixnak bizonyos elemei biztosan zéró értéket vesznek fel, tehát a döntési változók száma csökkenthető.

Az SALB-1 ((54) és (55)) és SALB-2 modellekben ((63) és (64)) LJ_m és UJ_m segítségével megkaptuk azoknak a munkahelyeknek a sorszámát, amelyekhez az m-edik tevékenység elméletileg a legkorábban vagy a legkésőbb rendelhető hozzá. Ezek segítségével csökkenthető a különböző képzettségű dolgozók munkahelyhez rendelésére alkalmazott döntési változók száma.

Ha ismert, hogy az m-edik feladat elméletileg melyik munkahelyhez rendelhető hozzá legkorábban (LJ_m), akkor a k-adik képzettségi szinthez tartozó feladatok elméleti legkorábbi munkahelyeinek minimuma adja meg, hogy a k-adik képzettségi szintű dolgozó hányadik munkahelyhez rendelhető hozzá legkorábban:

$$LS_k = \underset{m \in S_k}{Min}(LJ_m). \qquad (81)$$

Hasonlóan, ha az m-edik tevékenységre ismert, hogy elméletileg hányadik munkahelyhez rendelhető hozzá legkésőbb (UJ_m), akkor a k-adik képzettségi szintű dolgozó elméleti legkésőbbi munkahelyének sorszáma megegyezik a k-adik képzettségi szinthez tartozó feladatok legkésőbbi munkahelyének maximumával:

$$US_k = \underset{m \in S_k}{Max}(UJ_m), \qquad (82)$$

(81) és (82) segítségével, így a következők szerint csökkenthető a k-adik képzettségi szintű dolgozó n-edik munkahelyhez rendelésére alkalmazott döntési változók száma:

$$l_{nk} = 0 \qquad n < LS_k \text{ and } n > US_k \quad k = 1,...,K, \qquad (83)$$

$$h_{nk} = 0 \qquad n < LS_k \text{ and } n > US_k \quad k = 1,...,K, \qquad (84)$$

$$e_{nk} = 0 \qquad n < LS_k \text{ and } n > US_k \quad k = 1,...,K. \qquad (85)$$

Tehát a k-adik képzettségi szintű dolgozó n-edik munkahelyhez rendelési mátrixában azok a változók biztosan zéró értéket vesznek fel, amelyek kisebbek, mint a k képzettségi szintű dolgozó elméletileg legkorábbi, vagy nagyobbak, mint a k képzettségi szintű dolgozó elméleti legkésőbbi munkahelyének sorszáma.

A gyártósoron dolgozók eltérő képzettsége az LSC, HSC és ESC feltételekkel figyelembe vehető a dolgozók munkahelyhez rendelésekor. Az eddigi tárgyalásban tetszőleges K számú képzettségi szintet különböztettem meg egymástól. A gyakorlatban gondot okozhat a feladatok nehézségi és a dolgozók képzettségi szintekbe szervezése. Éppen ezért külön kitérek arra az esetre, ha csak két szintet különböztetünk meg. A továbbiakban az LSC feltételek esetében az egyszerűbb és bonyolultabb, a HSC feltételek esetében a nehezebb és kevésbé összetett, az ESC feltételek esetében a speciális és nem speciális feladatok dolgozókhoz és munkahelyhez rendelését mutatom be.

4.2.3. A képzettségi szintek speciális esete: két képzettségi szint (Simple Skill Constraints)

Ha csak két képzettségi szintet különböztetünk meg egymástól, akkor egy feladat vagy dolgozó vagy rendelkezik egy meghatározott tulajdonsággal vagy nem. Tehát a speciális tulajdonsággal rendelkező feladatok az S halmaz elemei, a különleges tulajdonsággal nem rendelkező feladatok az S halmaz komplementer halmazának ($\overline{S}$) elemei. A speciális halmaz esetenként változik. LSC feltételeknél az alacsonyabb, HSC feltételeknél a magasabb, ESC feltételeknél a speciális szaktudást igénylő feladatokat definiáljuk speciális halmazként. A képzettségi szint optimális megoldásra gyakorolt hatását két szint esetén a következők szerint vizsgáltam (Koltai-Tatay, 2011b; Tatay-Koltai, 2011; Tatay-Koltai, 2010b).

4.2.3.1 LSC feltételek

Az alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozókból kiinduló esetben (LSC) az egyik része a dolgozóknak hagyományos képzettséggel bír, vagyis ők bármilyen feladat elvégzésére képesek, míg a másik részük alacsony képzettséggel bír, ők csak az egyszerűbb tevékenységeket tudják végrehajtani. A hagyományos képzettséggel bíró dolgozókhoz bármilyen feladat hozzárendelhető. Az alacsony képzettségű dolgozók viszont csak az egyszerűbb, speciális feladatokat tudják ellátni. Ha alacsony képzettségű alkalmazott dolgozik az m-edik munkahelyen, akkor ehhez a munkahelyhez, csak a feladatok S részhalmazából rendelhető feladat. Ugyanakkor egy olyan munkahelyhez, amelyhez nem alacsony képzettségű dolgozót rendelünk bármilyen feladat hozzárendelhető. Ez a szituációt a következő egyenlőtlenségek segítségével fogalmazható meg:

$$\sum_{m \in \bar{S}} x_{mn} \leq z(1 - l_n) \quad n = 1,\ldots,N\,, \tag{86}$$

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mn} \geq l_n \qquad n = 1,\ldots,N\,, \tag{87}$$

$$\sum_{n=1}^{N} l_n \geq W\,, \tag{88}$$

ahol z egy elegendően nagy szám, l_n az alacsony képzettségű dolgozók n-edik munkahelyhez rendelésének bináris változója, W pedig az alacsony képzettségű dolgozók minimális számát adja meg. Ha l_n=1, vagyis az n-edik munkahelyhez alacsony képzettségű dolgozót rendelünk, akkor a (86) egyenlőtlenség jobboldala zéró. Ekkor a feltétel csak úgy teljesül, ha az egyenlőtlenség baloldala is zéró, vagyis nem rendelünk ehhez a munkahelyhez nem speciális feladatot. Ha l_n=0, vagyis az n-edik munkahelyhez nem rendelünk alacsony képzettségű dolgozót, akkor (86) jobboldala pozitív. Ebben az esetben (86) baloldala lehet pozitív és zéró is. l_n=0 két esetben fordulhat elő: vagy rendelünk az adott munkahelyhez dolgozót és az ő képzettségi szintje nem alacsony, vagy ehhez a munkahelyhez nem is rendelünk dolgozót. Azt, hogy olyan munkahelyhez, ahol nincs feladat ne rendeljünk dolgozót a (87) feltétel biztosítja. (87) baloldala zéró, ha az n-edik munkahelyhez nem rendelünk feladatot. Az egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha l_n=0, vagyis egy olyan munkahelyhez ahova nem rendelünk feladatot, nem rendelhetünk alacsony képzettségű dolgozót sem. Azt, hogy a rendelkezésre álló összes alacsony képzettségű dolgozót alkalmazzuk a (88) feltétel írja elő.

Tehát ha egy gyártósor-kiegyenlítési modellt a (86)-(88) feltételekkel kiegészítünk, akkor egy olyan optimális megoldáshoz jutunk, amelyben az alacsony képzettségű dolgozók csak egyszerű feladatot, míg a nem alacsony képzettségi szinttel rendelkező, hagyományos képzettséggel rendelkező dolgozók bármilyen feladatot elvégeznek. A gyakorlatban az LSC feltételek alkalmazására akkor lehet szükség, ha például a vállalat átmeneti kapacitáshiánya esetén ideiglenesen alkalmaz dolgozókat. Ezek az alkalmazottak nyílván nem rendelkeznek akkora tapasztalattal, mint azok, akik már régóta ott dolgoznak, így hozzájuk csak egyszerűbb feladatokat rendelhetünk. A jártasságot, gyakorlottságot igénylő feladatokat csak a már régóta ott dolgozó, képzettebb dolgozók tudják elvégezni.

4.2.3.2 HSC feltételek

A magasan képzett dolgozók esetében (HSC) a speciális, bonyolult feladatok ellátására csak a magasan képzett dolgozók képesek. A nem magas képzettségi szinttel rendelkező dolgozók csak a nem speciális feladatokat tudják elvégezni. A magasan képzett dolgozók a speciális (bonyolult) és nem speciális feladatokat is meg tudják csinálni. Tehát a feladatok S részhalmazába olyan tevékenységek tartoznak, amelyek bonyolultak, ellátásuk speciális szakértelmet, magasan képzett dolgozót igényel. Azon munkahelyekhez, ahova magas képzettségi szinttel rendelkező dolgozót rendelünk, bármely feladat hozzárendelhető. Azokon a munkahelyeken, ahol nem magasan képzett dolgozók dolgoznak, csak nem speciális feladatok fordulhatnak elő. Ezt az esetet a következő feltételekkel írhatjuk elő:

$$\sum_{m \in S} x_{mn} \le z h_n \qquad n = 1,\dots,N, \tag{89}$$

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mn} \ge h_n \qquad n = 1,\dots,N, \tag{90}$$

$$\sum_{m=1}^{M} h_n \le W, \tag{91}$$

ahol z egy elegendően nagy szám, h_n az alacsony képzettségű dolgozók n-edik munkahelyhez rendelésének bináris változója W pedig a magas képzettségi szinttel rendelkező dolgozók maximális száma. Ha az n-edik munkahelyhez rendelünk legalább egy speciális tevékenységet, akkor a (89) feltétel baloldala pozitív. Ekkor a feltétel csak úgy teljesülhet, ha magas képzettségű dolgozót rendelünk az n-edik munkahelyhez, vagyis h_n=1. Ha (90) baloldala zéró – vagyis az adott munkahelyhez nem rendelünk speciális feladatot –, akkor h_n

értéke lehet 0 és 1 is. Amennyiben az n-edik munkahelyhez nem rendelünk speciális feladatot, akkor vagy nem rendelünk semmilyen feladatot az n-edik munkahelyhez, vagy csak nem speciális feladat van azon a munkahelyen. (90) segítségével előírható, hogy magas képzettségű dolgozót csak ahhoz a munkahelyhez rendeljünk, ahol van valamilyen feladat. A (91) maximálja a magas képzettségű dolgozók számát.

Megjegyzendő, hogy a HSC modell az alacsony képzettségi szintű (LSC) eset duálisaként is felfogható. Az LSC modellben az alacsony képzettségűek csak a speciális feladatokat tudják ellátni – amit kevésbé komplikált, egyszerűbb feladatként definiáltunk –, a nem alacsony képzettségi szinttel rendelkezők bármilyen feladatot el tudnak végezni. A HSC modellben a magas képzettségi szinttel nem rendelkezők csak a nem speciális feladatokat tudják megcsinálni, akik magas képzettségi szinttel rendelkeznek, bármilyen feladatot meg tudnak oldani: speciális – ebben az esetben bonyolult – és nem speciális feladatot egyaránt. Az LSC modellben az alacsony képzettségű dolgozók számára alsó korlát, a HSC modellben a magasan képzett dolgozók számára felső korlát kerül megadásra.

Tehát, ha a gyártósor-kiegyenlítés SALB-1 vagy SALB-2 modelljét kiegészítjük a HSC feltételekkel, akkor egy olyan optimális megoldáshoz jutunk, amely figyelembe veszi, hogy csak a magas képzettséggel rendelkező dolgozókra osztható ki tetszőleges feladat. A HSC feltételek gyakorlati alkalmazásának oka lehet például, ha vannak olyan dolgozók, akik bizonyos tevékenységek elvégzésében jártasabbak, ügyesebbek, ezért szívesebben bízzák rájuk azokat a feladatokat.

4.2.3.3 ESC feltételek

A speciális feladatok és speciális képzettséggel rendelkező dolgozók esetében (ESC) vannak a vállalatnál olyan – speciális – dolgozók, akik csak a speciális feladatok ellátására képesek, a nem speciális feladatokat nem tudják ellátni. A nem speciális dolgozók pedig kizárólag a nem speciális tevékenységeket tudják elvégezni. Vagyis ebben az esetben a különböző feladattípusok nem keveredhetnek össze az egyes munkahelyeken és adott feladattípushoz kizárólag egyfajta dolgozó rendelhető. Ezt a szituációt a következő feltételekkel írhatjuk elő

$$\sum_{m\in S} x_{mn} \le z e_n \qquad n = 1,\ldots,N\,, \tag{92}$$

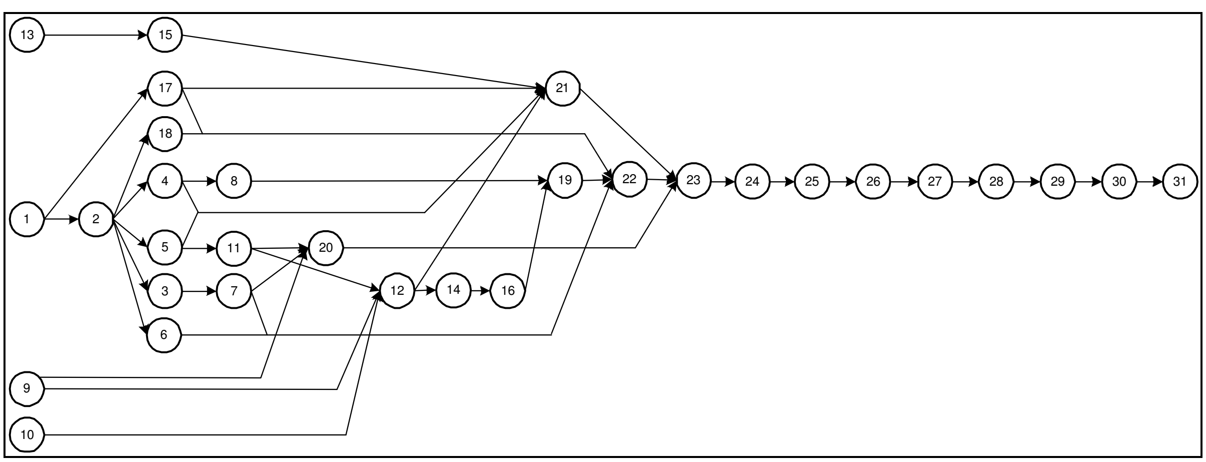
$$\sum_{m\in S} x_{mn} \le z(1-e_n) \qquad n = 1,\ldots,N\,, \tag{93}$$

ahol z egy elegendően nagy szám, e_n az alacsony képzettségű dolgozók n-edik munkahelyhez rendelésének bináris változója. Ha speciális tevékenységet rendelünk az n-edik munkahelyhez, akkor (92) baloldala nagyobb mint zéró. Ekkor a (92) feltétel csak úgy teljesülhet, ha e_n=1, vagyis speciális dolgozót rendelünk az n-edik munkahelyhez. Ha nem speciális feladatot rendelünk az n-edik munkahelyhez, akkor (93) baloldala nagyobb, mint zéró. Ahhoz, hogy (93) teljesüljön, a jobboldalnak is pozitívnak kell lennie. Ekkor e_n=0, vagyis nem rendelünk speciális dolgozót az n-edik munkahelyhez. Megjegyzendő, hogy az előző két modelltől eltérően itt a dolgozók számára vonatkozóan nincs korlátozás.

Az ESC feltételek SALB-1 vagy SALB-2 modellekhez adásával a speciális képzettségű dolgozók és a képzettségüknek megfelelő tevékenységek egymáshoz rendelése megoldhatóvá válik. A gyakorlatban az ESC feltételek alkalmazására akkor lehet szükség, ha vannak olyan speciális feladatok, amelyeknek az elvégzése speciális szakértelmet kíván és az ilyen szakértelemmel rendelkező dolgozókat csak az adott feladat elvégzésére akarjuk alkalmazni.

4.3. A gyártósor-kiegyenlítés alapmodelljeinek és a képzettségi szinteket leíró feltételeknek illusztrálása egy gyakorlati példával

Az ismertetett modellek gyakorlati alkalmazása egy kerékpárszerelő üzemben valósult meg (Tatay, 2010, Tatay-Koltai, 2010a). A vizsgált kerékpár összeszerelése 31 tevékenységre osztható. A tevékenységek sorszámát, leírását, idejét és a megelőző tevékenységeiket a 6. táblázat foglalja össze. A tevékenységek közötti precedencia kapcsolatot a 10. ábra szemlélteti. (Az SALB-1 és SALB-2 modellek, valamint az LSC, HSC és ESC feltételek LINGO kódját a melléklet tartalmazza.)



10. ábra: A termék tevékenységeinek precedencia gráfja

6. táblázat: A vizsgált kerékpár adatai

m	Tevékenységek	Idő (mp)	Összes megelőző	Közvetlen megelőző
1	Első fék bowdenházzal való összefűzése	21	-	-
2	Hátsó fék, első részének bowdenházzal való összefűzése	23	1	1
3	Első váltó első részének bowdenházzal való összefűzése	10	1,2	2
4	Hátsó váltó első részének bowdenházzal való összefűzése	10	1,2	2
5	Bowdenház rögzítő műanyag felhelyezése	10	1,2	2
6	Hátsó fék, hátsó részének bowdenházzal való összefűzése	10	1,2	2
7	Első váltó hátsó részének bowdenházzal való összefűzése	10	1,2,3	3
8	Hátsó váltó középső részének bowdenházzal való összefűzése	10	1,2,4	4
9	Hajtómű felhelyezése és rögzítése	30	-	-
10	Hátsó váltó felszerelése	16	-	-
11	Első váltó felszerelése	14	1,2,5	5
12	Lánc felfűzése és rögzítése	50	9,10,11	9,10,11
13	Első kerék felhelyezése	10	-	-
14	Hátsó kerék felhelyezése	10	9,10,11,12	12
15	Első kerék rögzítése	20	13	13
16	Hátsó kerék rögzítése	20	9,10,11,12,14	14
17	Első fék bekötése	24	1	1
18	Hátsó fék bekötése	24	1,2	2
19	Hátsó váltó hátsó részének bowdenházzal való összefűzése	10	1,2,4,5,8,9,10,11,12,14,16	8,16
20	Első váltó bekötése	35	1,2,3,5,7,9,11	7,9,11
21	Hátsó váltó bekötése	25	1,2,4,5,9,10,11,12,13,15,17	4,5,12,15,17
22	Bowden méretre vágása	10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, 14,16,17,18,19	6,7,17,18,19
23	Bowdenvég felhelyezése	15	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16, 17,18,19,20,21,22	20,21,22
24	Első és hátsó váltó beállítása	50	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16, 17,18,19,20,21,22,23	23
25	Fékek beállítása	70	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,19,20,21,22,23,24	24
26	Karton felhelyezése a vázra	10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23,24,25	25
27	Gyorszár felhelyezése a vázra	10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26	26
28	Első kerék kivétele és rögzítése a vázhoz	35	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27	27
29	Féktárcsa csomagolása	15	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23, 24,25,26,27,28	28
30	Csomagolás 1	50	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23, 24,25,26,27,28,29	29
31	Csomagolás 2	50	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, 16,17,18,19,20,21,22,23, 24,25,26,27,28,29,30	30

Egyetlen termék összeszereléséhez összesen

$$T_p = \sum_{m=1}^{M} t_m = 707 \tag{94}$$

másodpercre van szükség. Egy nap összesen 5 óra (18000 másodperc) effektív összeszerelési idővel számolhatunk. A menedzsment 200 darab termék legyártását tűzte ki célul, így a ciklusidő a következőképpen adódik:

$$T_c = \frac{T}{Q} = \frac{18000}{200} = 90 \frac{\text{másodperc}}{\text{db}}. \tag{95}$$

Ezen adatokkal a munkahelyek számát minimalizáló (47)-(52) SALB-1 modell megoldható. Mivel a konkrét esetben egyetlen utolsó tevékenység van, ezért az (56) célfüggvény alkalmazható. Eredetileg 31x31=961 bináris változója lenne a modellnek, de az (52), (54) és (55) feltételek segítségével ezek száma 801 darabra redukálható, ami több mint 16 %-os csökkenést jelent. Optimális megoldásként 10 munkahelyet kapunk. (A modell LINGO kódját a melléklet tartalmazza.) Egy lehetséges hozzárendelésre mutat példát a 7. táblázat.

7. táblázat: A kerékpár-összeszerelés SALB-1 modelljének egy optimális megoldása

Munkahely	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Hozzárendelt tevékenységek	1,2,4,6, 10,13	3,5,7, 8,9,	11,12, 17	14,15, 18,21	16,19, 20	22,23, 24	25,26, 27	28, 29	30	31
Állomásidő (s)	90	70	88	79	65	75	90	50	50	50
Kihasználtság(%)	100	78	98	88	72	83	100	56	56	56

A 200 darab termék összeszereléséhez 5 óra alatt legalább 10 munkahelyre van szükség. A 7. táblázatban szereplő hozzárendelésben két munkahely kihasználtsága maximális, kettőé 56%-os, a többi állomás kihasználtsága e két érték között helyezkedik el. A rendszer egészéről a hozzárendelés hatékonysága (*HH(Q)*) szolgáltat a menedzsment számára információt, amely a vizsgált esetben így írható fel:

$$HH(Q) = Q \cdot \frac{\sum_{i=1}^{I} t_i}{N \cdot T} = 200 \frac{707}{10 \cdot 18000} = 78{,}5\% . \tag{96}$$

A hozzárendelési hatékonyság 78,5 %-os értéke alapján sejthető, hogy a rendszer hatékonysága még fokozható. Erről pontosabb információ az SALB-2 modell megoldásával kapható.

Az SALBM-1 megoldásával meghatározható, hogy egy termék összeszereléséhez minimálisan hány munkahelyre van szükség – adott idő alatt történő gyártás mellett. A minimális erőforrás-szükséglet összefüggésben van a termék komplexitásával. A gyakorlatban különböző termékek gyártásának ütemezésekor a komplexitást gyakran figyelembe veszik és az azonos összetettségi csoportba sorolható termékek gyártását egymás után hajtják végre. Így az SALBM-1 megoldásával képet kaphat egy vállalat arról, hogy egy új termék mely már meglévő termékek gyártásához hasonlít leginkább.

Az (58)-(62) SALB-2 modellt rögzített N munkahelyszám esetén oldjuk meg. Egy munkahely esetén (N=1) az összes feladatot egy munkahelyhez rendeljük. Ekkor a ciklusidő a feladatok tevékenységidejének összege (707 másodperc), a kapacitáskihasználtság maximális. Egy munkahelyen összesen

$$Q = \frac{T}{T_c} = \frac{18000}{707} = 25{,}46 \approx 25 \qquad (97)$$

darab termék állítható elő. 31 munkahely esetén minden tevékenységet külön munkahelyen hajtunk végre. Ebben az esetben a ciklusidő megegyezik a leghosszabb tevékenységidővel (70 másodperc) és a kapacitáskihasználás igen alacsony. Így összesen 257 darab kerékpár szerelhető össze. A valóságban e két szélső érték között működik a rendszer. Pontos információkat a modell különböző N munkahelyszámok melletti megoldásával kapunk. Az eredményeket a 8. táblázat foglalja össze. (A modell LINGO kódja a mellékletben megtalálható.) A 8. táblázatból látható, hogy a munkahelyszám növekedésével a ciklusidő csökken, a gyárható mennyiség nő. Ez azonban csak addig igaz, amíg a leghosszabb műveleti idejű tevékenység szűk keresztmetszetté válik és a ciklusidő nem csökkenthető tovább. A vizsgált esetben a 11. munkahellyel érjük el a maximális gyártási mennyiséget. Ettől a munkahelytől fokozatosan csökken a hozzárendelés hatékonysága is.

8. táblázat: Az SALBM-2 eredmények különböző munkahelyszámokra

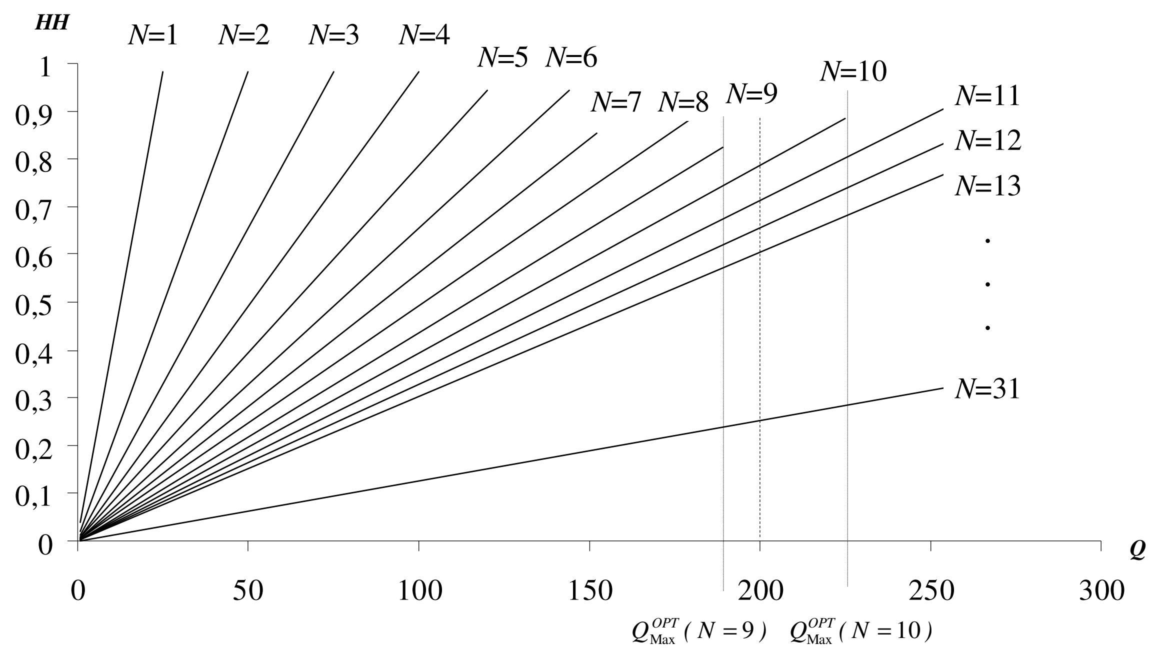
Munkahelyek száma	Ciklusidő (s)	Gyártási Mennyiség (db)	Hozzárendelési hatékonyság (%)
1	707	25	98
2	355	50	98
3	240	75	98
4	179	100	98
5	150	120	94
6	125	144	94
7	118	152	85
8	100	180	88
9	95	189	82
10	80	225	88
11	70	257	91
12	70	257	84
13	70	257	78
31	70	257	32

A vizsgált kerékpár esetében az SALBM-1 megoldásaként 10 munkahelyet kaptunk eredményül. Vagyis 5 óra alatt 200 darab termék összeszereléséhez minimum 10 munkahelyre van szükség. Az SALB-2 modell optimális megoldásának ismeretében megállapítható, 10 munkahellyel magasabb gyártási mennyiség és hozzárendelési hatékonyság érhető el. A 8. táblázatból látható, hogy ennyi idő alatt, 10 munkahelyen 225 darab kerékpár szerelhető össze. A 9. táblázat az SALBM-2 egy lehetséges megoldását mutatja 10 munkahelyre (Koltai et al., 2011).

9. táblázat: Az SALBM-2 egy lehetséges megoldása *N*=10 esetén

Munkahely	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hozzárendelt tevékenységek	9,10, 13,15	1,2,5, 6,12	3,4, 8,12	7,14, 18,20	16,17, 19,21	22,23, 24	25	26,27, 28	29, 30	31
Állomásidő (s)	76	78	80	79	79	75	70	55	65	50
Kihasználtság(%)	95	98	1	99	99	94	88	69	81	63

A vizsgált esetben a hozzárendelés hatékonyságát a gyártási mennyiség és a munkahelyszám függvényében a 11. ábra szemlélteti.



11. ábra: A hozzárendelés hatékonysága a munkahelyszám és a gyártott mennyiség függvényében, valamint az optimális gyártási tartomány

Az SALB-1 modell eredményei alapján megállapítható, hogy 200 darab termék összeszereléséhez 5 óra alatt legalább 10 munkahelyre van szükség. Ekkor a ciklusidő 90 másodperc. Az SALBM-2 megoldása alapján tudjuk, hogy ez a ciklusidő csökkenthető, vagyis a gyártási mennyiség növelhető. Így Q_{Max}=200 darab. *N*=10 esetén az optimális ciklusidő 80 másodperc, így $Q_{\text{Max}}^{\text{OPT}}(10)$=225 darab. Az SALB-2 modellt 9 munkahelyre megoldva megkaptuk, hogy $Q_{\text{Max}}^{\text{OPT}}(9)$=189. (68) alapján az SALB-1 modellt az adott paraméterekkel megoldva a következő érvényességi tartományhoz jutunk:

$$189 < Q \leq 200. \tag{98}$$

(69) alapján pedig a 10 munkahelyhez tartozó maximális érvényességi tartománya az optimális ciklusidőnek

$$189 < Q \leq 225. \tag{99}$$

Tehát ha 10 munkahely alkalmazásával szerelik össze a kerékpárt és a legyártott termékek darabszáma (99) szerint alakul, akkor biztos, hogy a hozzárendelés hatékonysága maximális (Koltai-Tatay, 2010). Az optimális gyártási tartomány a 11. ábrán látható.

A továbbiakban a különböző képzettségi szintű dolgozók eseteire mutatok be példákat. Az illusztrációban az LSC, HSC és ESC eseteiben is csupán két képzettségi szintet különböztettem meg egymástól. A 10. táblázat a különböző képzettségi szintet igénylő feladatok optimális megoldásra kifejezett hatását mutatja be néhány példa segítségével. A táblázat első oszlopa mutatja, hogy mely alapmodell mely feltételekkel került megoldásra. A második és harmadik oszlop mutatja a ciklusidőt és a munkahelyek számát. Modelltől függően az optimális érték vastagon szedett. A speciális dolgozók száma – amennyiben van – a *W* oszlopban került feltűntetésre. A következő oszlop a speciálisként definiált feladatokat tartalmazza. A táblázat utolsó 11 oszlopa az optimális megoldás egy hozzárendelését és a munkaállomásokhoz rendelt tevékenységidők összegét tartalmazza.

Ha egy gyártósor-kiegyenlítési modellt a (86)-(88) feltételekkel kiegészítünk, akkor egy olyan optimális hozzárendeléshez jutunk, amelyben az alacsony képzettségű dolgozók csak speciális – ebben az esetben egyszerű, alacsony képzettségi szintet igénylő – feladatot, míg a nem alacsony képzettségi szinttel rendelkező – általános – dolgozók bármilyen feladatot elvégezhetnek. Az LSC feltételekkel akár az SALBM-1 akár az SALBM-2 kiegészíthető. Az LSC feltételek optimális megoldásra kifejtett hatása függ a speciálisként definiált tevékenységektől, valamint az alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozók számától. Az LSC feltételek SALB-1 és SALB-2 modellek optimális megoldásaira gyakorolt hatásra mutat példát a 10. táblázat 3., 4. és 5. modellje. Ezen modellekben nyolc (3., 4., 5., 6., 7., 8., 26. és 27.) tevékenységet láthat el alacsony képzettséggel rendelkező dolgozó. A 3. modellben két alacsony képzettségű dolgozónak kell feladatot adni. A megoldásból látható, hogy az egyik alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozó a második, míg a másik a harmadik munkahelyen három (3., 5. és 6., illetve 4., 7. és 8.) speciális feladatot lát el.

10. táblázat: Különböző képzettségi szintet igénylő feladatok hatása az optimális hozzárendelésre

Modellek	T_c	N	W	Spec. feladat	Optimális hozzárendelés / állomásidő (másodperc)										
					n=1	*n*=2	*n*=3	*n*=4	*n*=5	*n*=6	*n*=7	*n*=8	*n*=9	*n*=10	*n*=11
1. SALBP-1	90	**10**	-	-	1,2,4,6, 10,13	3,5,7, 8,9	11,12, 17	14,15, 18,21	16,19, 20	22,23, 24	25,26, 27	28,29	30	31	-
					90	*70*	*88*	*79*	*65*	*75*	*90*	*50*	*50*	*50*	-
2. SALBP-2	**80**	10	-	-	9,10, 13,15	1,2,5, 6,11	3,4,8 12	7,14 18,20	16,17 19,21	22,23, 24	25	26,27 28	29,30	31	-
					76	*78*	*80*	*79*	*79*	*75*	*70*	*55*	*65*	*50*	-
3. SALBP-1+LSC	90	**11**	2	3,4,5,6,7, 8,26,27	1,2, 9,10	**3,5,6**	**4,7, 8**	11,12	13,14, 15,16,18	17,19, 20,22	21,23, 24	25,**26, 27**	28,29	30	31
					90	*30*	*30*	*64*	*84*		*90*	*90*	*50*	*50*	*50*
4. SALBP-2+LSC	**100**	10	2	3,4,5,6,7, 8,26,27	1,9, 10,13	2,**4,5,8**, 11,15	12,17 18	**3**	**7**,14,16, 20,21	**6**	19,22, 23,24	25,26, 27	28,29, 30	31	-
					77	*87*	*98*	*10*	*100*	*10*	*85*	*90*	*100*	*50*	-
5. SALBP-2+LSC	**84**	11	2	3,4,5,6,7, 8,26,27	1,2, 9,13	**3,4,5, 6,7,8**	10,11, 12	14,15, 18,18,19	17,20, 21	22,23, 24	25	**26**	**27**,28	28,30	31
					84	*60*	*80*	*84*	*84*	*75*	*70*	*10*	*45*	*65*	*50*
6. SALBP-1+HSC	90	**Inf.**	1	20,24	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
					-	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
7. SALBP-1+HSC	90	**10**	2	20,24	1,13, 17	2,3, 9,15	5,6,10, 11,18	4,7,8, 12,14	16,19, **20**,22	21,23, **24**	25,26	27,28, 29	30	31	-
					55	*83*	*74*	*90*	*75*	*90*	*80*	*60*	*50*	*50*	-
8. SALBP-2+HSC	**100**	10	1	20,24	1,2,4,8, 13,17	3,9,18	5,6,7, 11,15	10,12, 14,16	19,21, 22	**20**,23, **24**	25	26,27	28,29, 30	31	-
					98	*64*	*64*	*96*	*45*	*100*	*70*	*20*	*100*	*50*	-
9. SALBP-2+HSC	**80**	10	2	20,24	1,2,4, 10,13	3,7,8, 17,18	5,9,11, 15	12,14,16	6,19,**20**, 21	22,23, **24**	25	26,27 28	29,30	31	-
					80	*78*	*74*	*80*	*80*	*75*	*70*	*55*	*65*	*50*	-
10. SALBP-1+ESC	90	**11**	-	1,3,11	**1**	2,4,5, 9,10	6,13,15, 17,18	**3,11**	8,12, 21	7,14, 16,20	19,22, 23,24	25,26	27,28	29,30	31-
					21	*89*	*88*	*24*	*85*	*75*	*85*	*80*	*45*	*65*	*50*
11. SALBP-2+ESC	**100**	10	-	1,3,11	**1**	2,5,6, 13,15,18	4,9, 17	**3,11**	10,12, 14,16	7,8, 20,21	19,22, 23,24	25,26, 27	28,29, 30	21	
					21	*97*	*64*	*24*	*96*	*80*	*85*	*90*	*100*	*50*	

Mivel az egyszerűbb feladatokat a nem alacsony képzettségű dolgozók is el tudják végezni, így a maradék két speciális tevékenységet nem alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozó hajtja végre. Az eredeti optimális megoldás értéke romlott, hiszen a két alacsony képzettségű dolgozó miatt a minimális munkahelyszám 10-ről 11-re nőtt. A 4. modell eredményei alapján két alacsony képzettségi szintű dolgozó alkalmazása a minimális ciklusidőt 80 másodpercről 100 másodpercre növeli, ami a maximális gyártási mennyiséget 225 darabról 180 darabra csökkenti. Az 5. modell eredményei szerint 11 munkahely alkalmazásával az optimális ciklusidő 84 másodpercre csökkenthető 214 darabra emelve ezzel a maximális gyártási mennyiséget.

A HSC feltételek esetében a vállalat rendelkezik egy vagy néhány olyan magasan képzett dolgozóval, akik az általános feladatokon túl a bonyolultabb, speciális feladatok ellátására is képesek. Azokhoz a munkahelyekhez, ahova magas képzettségi szinttel rendelkező dolgozót rendelünk, bármely feladat hozzárendelhető. Azokon a munkahelyeken, ahol nem magasan képzett dolgozók dolgoznak, csak nem speciális feladatok fordulhatnak elő. A 10. táblázat 6., 7., 8. és 9. modelljei a HSC feltételek optimális hozzárendelésre kifejtett hatásaira mutatnak be példát. Minden esetben a 20. és 24. feladatok speciális, magas képzettségi szintet igénylő feladatok. Egyetlen magasan képzett dolgozó esetén nincs megengedett megoldása a HSC feltételekkel bővített SALB-1 modellnek (6. modell). Ennek az az oka, hogy ha csak egyetlen magasan képzett dolgozó alkalmazható, akkor mindkét speciális feladatot neki kellene elvégeznie. A 20. és 24. feladat a precedencia kapcsolatok miatt csak úgy kerülhetne egy munkahelyre, ha a 23. tevékenységet is ehhez az állomáshoz rendelnénk. Így azonban a három feladat tevékenységidőinek összege meghaladná az előírt 90 másodperces ciklusidőt. Két magasan képzett dolgozóval már van megengedett megoldása a HSC feltételekkel bővített SALB-1 feladatnak (7. modell). 10 munkahely és egy magasan képzett dolgozó esetén a HSC feltételekkel bővített SALB-2 modell eredményeként 100 másodpercet kapunk (8. modell). Vagyis amiatt, hogy csak egy speciális dolgozó áll rendelkezésre az eredeti 80 másodperces ciklusidő 20 másodperccel emelkedik. Ekkor a 20., 23. és 24. tevékenységek egy munkahelyre kerülnek. Amennyiben két magasan képzett dolgozó alkalmazható (9. modell), akkor az eredeti 80 másodperces ciklusidő – és így gyártási mennyiség is – tartható.

Az ESC feltételek alkalmazásakor azokon a munkahelyen, ahol speciális tevékenység van, csak speciális dolgozó dolgozhat. Nem speciális feladatot csak nem speciális dolgozó végezhet. A 10. táblázat 10. és 11. modellje az ESC feltételekkel kiegészített gyártósor-kiegyenlítési modellekre mutat példát. Speciális szakértelmet igénylő feladatként az 1., 3. és

11. feladat került definiálásra. Mind az SALB-1, mind az SALB-2 modell esetén az eredeti optimum értéke romlik az ESC feltételek hozzáadásával. Mivel a precedencia kapcsolatok és tevékenységidők miatt a három speciális feladat két speciális szakértelemmel rendelkező dolgozót igényel, ezért az SALBM-1 optimális megoldása 10 munkahelyről 11-re, míg az SALBM-2 optimuma 80 másodpercről 100-ra romlik.

A vizsgált gyakorlati példa eredményei ismeretében az alábbi menedzsment megfontolások tehetőek. A szakirodalom alapmodelljeinek segítségével a szükséges erőforrások szervezéshez kapcsolódó döntésekhez kapható információ. Az SALBM-1 megadja, hogy minimálisan hány munkahelyre van szükség a termék összeszereléséhez. Az SALBM-2 segítségével egyrészt adott munkahelyszám mellett meghatározható a maximális gyártási mennyiség, továbbá a modell információt szolgáltathat a hatékonyságvizsgálatokhoz.

A dolgozók eltérő képzettségének optimális megoldásra kifejtett hatása három korlátozó feltétel csoport segítségével vizsgáltam. Az alapmodellek a különböző képzettségi szintű eseteket leíró feltételekkel kiegészítve számos gyakorlati kérdésben támogathatják a menedzsment döntéshozatalt. Például az LSC feltételekkel kiegészített modellek eredményei ismeretében kiértékelhető az alacsony képzettségi szintű dolgozók alkalmazásának optimális megoldásra gyakorolt hatása. A csak az egyszerűbb feladatok megoldására képes dolgozók alkalmazásának oka lehet például az, hogy a vállalatnak kevés dolgozó áll a rendelkezésére, a gyártósor konfigurációja messze van az optimálistól. Alacsony képzettségi szinttel rendelkező dolgozók segítségével ebben az esetben növelhető a gyártási mennyiség. Maximális hatékonysággal működtetet gyártósor esetében az alacsony képzettséggel rendelkező dolgozók munkába állítása csökkentheti ugyan az adott sor optimális működési paraméterét, de erre szükség lehet például hirtelen megugró igény esetén vagy a nem alacsony képzettségű dolgozók munkától való távolmaradása esetén. A HSC és ESC feltételekkel kiegészített modellek megoldása hozzásegítheti a menedzsmentet annak eldöntéséhez, hogy milyen gazdasági hatása lenne egy vagy néhány dolgozó (tovább)képzésen való részvételének.

5. ÖSSZEFOGLALÁS, TÉZISEK

Az élenjáró vállalatok tisztában vannak azzal, hogy működési környezetük dinamikusan változik és ahhoz, hogy a kiélezett versenyben helyt tudjanak állni, alkalmazkodniuk kell a változásokhoz. Ma a sikeres vállalatok az időtényezőik csökkentésére fókuszálnak – a lehető legmagasabb minőség és költséghatékonyság mellett. Ahogy korábban végbement a vállalatok közötti kiegyenlítődés a különböző versenytényezők tekintetében, úgy az időparaméterek javítását is felváltja majd egy másik menedzsmentparadigma. Davenport (2006) szerint a kvantitatív eszközök kiterjedt alkalmazása lehet a jövő vállalatainak az egyik stratégiai versenyforrása. Ezt alátámasztva néhány vállalat felismerte a kvantitatív eszközök használatának fontosságát és a rendelkezésükre álló információkat elkezdték szisztematikusan gyűjteni, tárolni és feldolgozni. Ezek közül a vállalatok közül néhány már most kiemelkedik versenytársai közül (pl. Google, Procter & Gamble).

A kvantitatív módszerek ismerete stratégiai jelentőséggel bírhat a jövőben, így a vállalatoknak el kell mélyíteniük a gyakorlatban alkalmazható kvantitatív eszközökkel kapcsolatos ismereteiket. Kutatásaim során olyan problémákkal foglalkoztam, amelyek az operációkutatás matematikai programozási modelljeivel megoldhatóak.

A lineáris programozás az egyik legjelentősebb kvantitatív menedzsment döntéstámogatási eszköz. A vállalati működés számos funkcionális területén hatékonyan alkalmazható. A lineáris programozási modellek az optimális megoldás segítségével javíthatják a vállalati működés hatékonyságát, a modellezés folyamata pedig hozzájárulhat a problémák alaposabb megismeréséhez.

Az érzékenységvizsgálati információk fontos részét képezik a lineáris programozásnak, mert az eredmények könnyen megkaphatóak és a modell paramétereiben bekövetkező változások optimális megoldásra gyakorolt hatásai könnyen nyomon követhetőek. A célfüggvény-együtthatók és jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálati eredményei analitikusan meghatározhatóak, az információk legtöbbször az optimális megoldással egy időben a döntéshozó rendelkezésére állnak. Degenerált esetben azonban a szoftverek menedzsment szempontból félrevezető érzékenységvizsgálati információkat szolgáltathatnak. Degenerált LP feladatok célfüggvény-együtthatóinak érzékenységvizsgálata során a szoftverek rendre szűkebb tartományokat szolgáltatnak eredményül.

1. tézis: Kialakítható egy olyan számítási módszer, amelynek segítségével degenerált esetben is a gyakorlatban könnyen

meghatározható egy lineáris programozási feladat célfüggvény-együtthatóinak menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálata.

(Kapcsolódó saját publikációk: S2, S3, S5, S8, S9, S14)

A jobboldali paraméterek érzékenységvizsgálata során degenerált esetben a jobb- és baloldali árnyékárak elkülönítése és a menedzsment szempontból korrekt érvényességi tartományok meghatározása jelent problémát.

2. tézis: Kialakítható egy olyan számítási módszer, amelynek segítségével egy degenerált lineáris programozási feladat jobboldali paramétereinek menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálati eredményei a gyakorlatban könnyen meghatározhatóak. A módszer segítségével a jobb- és baloldali árnyékárak, a hozzájuk tartozó érvényességi tartományokkal kiszámíthatóak.

(Kapcsolódó saját publikációk: S2, S3, S5, S8, S9, S14)

A degenerált esetben is menedzsment szempontból korrekt eredményeket szolgáltató érzékenységvizsgálati számítás elméletileg egy I darab célfüggvény-együtthatójú és J darab jobboldali paraméterű lineáris programozási feladat esetében $2I + 6J$ LP feladat megoldását teszi szükségessé. Ezeknek az LP feladatoknak a száma azonban matematikai úton és menedzsment megfontolások alapján csökkenthető.

3. tézis: Az általam létrehozott számítástechnikai modellel degenerált lineáris programozási feladatok menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálata elvégezhető.

(Kapcsolódó saját publikációk: S2, S3, S5, S8, S9, S14)

Az a lineáris programozási feladat, amelyben egy vagy néhány – vagy akár az összes – döntési változó csak nulla vagy egy értéket vehet fel bináris programozási feladat. A gyártósor-kiegyenlítési problémát bináris programozási modellek segítségével vizsgáltam. Kutatásaim során a gyártósor-kiegyenlítés matematikai modelljeinek gyakorlati alkalmazását elősegítő problémákkal foglalkoztam. A menedzsment szempontból fontos érzékenységvizsgálati információk bináris programozási modelleknél nem képezik a számítás részét, mivel ezen eredmények meghatározása nem olyan egyszerű, mint lineáris programozás esetében.

4. tézis: Létrehozható egy olyan grafikus segédeszköz, amelynek segítségével leellenőrizhető egy ismert gyártási feladat esetén a különböző gyártási mennyiségekhez tartozó leghatékonyabb gyártósor konfiguráció. A grafikon segítségével meghatározható, hogy a gyártási mennyiség milyen értékeire optimális az alkalmazott gyártósor.

(Kapcsolódó saját publikációk: S1, S6, S7, S11)

A valós vállalati környezetben való alkalmazását segítheti elő a bináris gyártósor-kiegyenlítési feladatoknak az, ha a valósághoz közelebb álló modellek segítségével vizsgálható a gyártási folyamat. Ha a modell képes figyelembe venni, hogy a gyártósoron dolgozók eltérő képzettségi szinttel rendelkeznek, akkor a valóságot jobban leíró modell kapható.

5. tézis: Az általam kidolgozott modellrendszer segítségével a gyártósor különböző működési paramétereinek optimalizálása során figyelembe vehető az eltérő képzettséggel rendelkező dolgozók alkalmazásának hatása. A dolgozók eltérő képzettségét figyelembe vevő gyártósor-kiegyenlítési modellekben a meghatározott képzettségű dolgozók és munkahelyek összerendelésére alkalmazott döntési változók száma csökkenthető.

(Kapcsolódó saját publikációk: S4, S6, S7, S10)

Az eltérően képzett dolgozók gyártósoron való alkalmazásának optimális megoldásra gyakorolt hatását először általánosan vizsgáltam. Elméletileg tetszőleges számú képzettségi szint különíthető el mindhárom vizsgált esetben. Azonban a gyakorlatban nem várható a dolgozók képzettségi szintjeinek és az összeszerelési tevékenységeknek részletekbe menő differenciálása. Így külön foglalkoztam azzal az esettel, amikor az LSC, a HSC és az ESC eseteiben csak két képzettségi szintet különítünk el egymástól. Ennek gyakoralti alkalmazását egy vállalati példán keresztül mutattam be.

A kutatásaim eredményeként létrehozott számítási módszerek és modellek gyakorlati alkalmazása hozzájárulhat a termelési és szolgáltatási folyamatok alaposabb megismeréséhez, valamint a folyamatok hatékonyabb működéséhez. Olyan eszközöket alakítottam ki, amelyek segítségével a menedzsmentdöntések hatékonysága kvantitatív módszerek alkalmazásával javítható.

6. IRODALOMJEGYZÉK

1. Akgül, M. (1984): A note on shadow prices in linear programming. *Journal of the Operational Society*, Vol. 35, pp. 425-431.
2. Andor Gy., Tóth T. (2010): *Vállalati pénzügyek I.* Oktatási segédanyag, Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest
3. Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A. (1994): *An Introduction to Management Science*, West Publishing Company
4. Aucamp, D. C., Steinberg, D. I. (1982): The computation of shadow prices in linear programming. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 33, pp. 557-565.
5. Bass, F. M., Lonsdale, R. T. (1966): An Exploration of Linnear Programming in Media Selection. *Journal of Marketing Research*, Vol. 3, pp. 179-188.
6. Baybars, Í. (1986): A Survey of Exact Algorithms for the Simple Assembly Line Balancing Problem, *Management Science*, Vol. 32, pp. 909-932.
7. Becker, C., Scholl A. (2006): A Survey on Problems and Methods in Generalized Assembly Line Balancing. *European Journal of Operational Research*, Vol. 168, No. 3, pp. 694-715.
8. Bellman, R. E., Zadeh, A. L. (1970): Decision-making in a fuzzy environment. *Management Sciences*, Vol. 17, pp. 141-164.
9. Boysen, N., Fliedner, M. and Scholl, A. (2008): Assembly Line Balancing: Which Model to Use When? *International Journal of Production Economics*, Vol. 111, pp. 509-528.
10. Bowman, E. H. (1960): Assembly Line Balancing by Linear Programming. *Operations Research*, Vol. 8, pp. 385-389.
11. Buchanan, L., O'Conell, A. (2006).: A döntéshozatal rövid története. *Harvard Businessmanager* (Magyar kiadás), Sz. 8, pp. 18-27.
12. Caine, D. J., Parker, B. J. (1996): Linear programming comes of age: a decisionsupport tool for every manager. *Management Decision*, Vol. 34, No. 4, pp. 46-53.
13. Charnes, A. (1952): Optimality and Degeneracy in Linear Programming. *Econometria*, Vol. 20, No. 2, pp. 160-170.
14. Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1952): Blending Aviation Gasolines— A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company. *Econometrica*, Vol. 20, Nr. 2, pp. 135-159
15. Charnes, A., Cooper, W.W., Mellon, B (1978): Measuring the Efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, pp. 429-443.
16. Chikán A., Demeter K. (2001): *Az értékteremtő folyamatok menedzsmentje*. Aula, Budapest.
17. Corominas, A, Pastor, F. and Plans, J. (2008), Balancing Assembly Line with Skilled and Unskilled Workers. *Omega*, Vol. 36, pp. 1126-1132.
18. Danzig G. B. (1951): Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities. In *Activity Analysis of Production and Allocation* (Koopmans T. C. ed.), John Wiley and Sons-Chapman & Hall, New York-London, pp. 339-348.

19. Davenport, T. H. (2010): Competing on Talent Analytics. *Harvard Businessmanagger*, October, pp. 64-71

20. Davenport, T. H., Harris, J. G., Morison R. (2010): *Analytics at Work: Smarter Decisions, Better Results.* Harvard Business School Press

21. Davenport , T. H., Harris, J. G. (2007): *Competing on Analytics: The New Science of Winning.* Harvard Business Scholl Press

22. Davenport T. H. (2006): Competing on Analytics. *Harvard Business Review*, January, pp. 97-106.

23. Duane, B. (2005): *Microsoft Excel VBA Programming for Absolute Beginners.* Second Edition, Thomson Course Technology PTR

24. Eiselt, H. A., Sandblom, C.-L. (2007): *Linear Programming and its Applications.* Springer

25. Evans, J. R., Baker N. R. (1982): Degeneracy and the (mis)interpretation of sensitivity analysis in linear programming. *Decision Sciences*, Vol. 13, pp. 348-354.

26. Farkas, A., Koltai, T., Szendrovits, A. (1993): Linear programming optimization of a network for an aluminium plant: A case study. *International Journal of Production Economics*, Vol. 32, pp. 155-168.

27. Farkas, J. (1902): Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 124, pp. 1-27.

28. Ford, H. (1922): *My Life and Work*. Doubleday, New York

29. Ford, Jr. L. R., Fulkerson, D. R. (1956): Maximal Flow Through a Network. *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 8, pp. 399-404.

30. Gábos Z. (1997): „A természet a matematika nyelvén szól hozzánk": százötven éve született Farkas Gyula. Természet Világa: Természettudományi Közlöny, 128. évf., 7. sz., pp. 290-293.

31. Gal, T. (1986): Shadow Prices and Sensitivity Analysis in Linear Programming under Degeneracy. *OR Spektrum*, Vol. 8, pp. 59-71.

32. Gal, T. (1979): *Postoptimal analysis, Parametric Programming and Related Topics.* McGraw-Hill, New York.

33. Garvin, W. W., Crandall, H. W., John, J. B., Spellman, R. A. (1957): Application of Linear Programming in the Oil Industry. *Management Science*, Vol 3, pp. 407-430.

34. Gáspár L., Temesi J. (1990): *Lineáris programozási gyakorlatok*. Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest

35. Graves, S. C., Rinnoy Kan, A. H. G., Zipkin, P. H. (Editors) (1993): *Logistics of Production and Inventory.* North-Holland.

36. Gyökér I. (2003): *Menedzsment.* Oktatási Segédanyag, Budapest, 2003.

37. Hadigheh, A. G., Mirna, K., Terlaky. T. (2007): Active constraint set invariance sensitivity analysis in linear optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 133, pp. 303-315.

38. Hadigeh, A. G. and Terlaky, T. (2006): Sensitivity analysis in linear optimization: Invariant support set intervals. *European Journal of Operational Research*, Vol. 169, pp. 1158-1175.

39. Hillier, S. F., and Lieberman, G. J. (1995): *Introduction into Operations Research.* McGraw-Hill International Editions

40. Hitt L. M., Wu D. J., Zhou W. (2002): Investment in Enterprise Resource Planning: Business Impact and Productivity Measures. *Journal of Management Information Systems*, Vol. 19, No. 1, pp. 71-98.

41. Ho J. K. (2000): Computing True Shadow Prices in Linear Programming. *Informatica*, Vol. 11, No. 4, pp. 421-434..

42. Ijiri, Y., Levy, F. K., Lyon, R. C. (1963): A Linear Programming Model for Budgeting and Financial Planning. *Journal of Accounting Research*, Vol. 1, No. 2, pp. 198-212.

43. Inczédy, K., Koltai, T., Tatay, V. (2010): The Comparison of the Optimal and Real Operation in a Yeast Production Plant – A Case Study. *microCAD 2010 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.18-20. 2010, pp. 159-164.

44. Jaiswal N. K. (2003): *Military Operations Research: qantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publisher

45. Jansen, B., Roos, C., Terlaky, T. (1993): An interior point approach to postoptimal and parametric analysis in linear programming, Report 92-21, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, p 29.

46. Jansen, B., de Jong, J. J., Roos, C., Terlaky, T. (1997): Sensitivity analysis in linear programming: just be careful! *European Journal of Operational Research*, Vol. 101, pp. 15-28.

47. Johnson, L. A., Montgomery, D. C (1974): *Operation Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control.* John Wiley and Sons

48. Johnson, R. V. (1983): A Branch and Bound Algorithm for Assembly Line Balancing Problems with Formulation Irregularities. *Management Science*, Vol. 29, pp. 1309-1324.

49. Jónás T. (2011): Üzleti folyamatok megbízhatóságának modellezése, Doktori értekezés, Budapest, p 147.

50. Jónás T., Tóth Zs. E. (2011): Termelési és szolgáltatási folyamatok felfutásának modellezése. *Szigma,* Vol. 41, pp. 65-88.

51. Kalló N. (2010): *Az időalapú versenyzés támogatása a termelésmenedzsment eszközeivel. A sorképzési szabályok szolgáltató rendszerekben történő alkalmazásának elméleti megalapozása.* Doktori értekezés, Budapest, p 111.

52. Kantorovich, L. V. (1960): Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. *Management Science*, Vol. 6, No. 4, pp. 366-422.

53. Kaufmann, A. (1964): *Az operációkutatás módszerei és modelljei*. Műszaki Könykiadó, Budapest

54. Kaufmann, A. (1968): *Az optimális programozás módszerek és modeleki*. Műszaki Könykiadó, Budapest

55. Kaufmann, A., Faure, R. (1969): *Bevezetés az operációkutatásba*. Műszaki Könykiadó,

56. Kolman, B., Beck, R. E. (1995): *Elementary Linear Programming with Applications*, Elsevier Science & Technology Books

57. Koltai T. (2001): *A termelésmenedzsment alapjai I.* Műegyetemi Kiadó, Budapest

58. Koltai T. (2003a): *A termelésmenedzsment alapjai II.* Műegyetemi Kiadó, Budapest

59. Koltai T. (2003b): Alkalmazhatók-e a termelésmenedzsment kvantitatív összefüggései a gyakorlatban? *Harvard Businessmanager* (Magyar kiadás), Sz. 5, pp. 52-59.

60. Koltai T., Kalló N., Tatay V. (2009a): Optimumkeresés bizonytalan paraméterekel a termelés- és szolgáltatásmenedzsmentben. In Veresné Somosi M. (szerk.) : *Vezetési ismeretek III.* Miskolci Egyetem Gazdaságtudományi Kar, (ISBN: 978-963-661-886-5; 978-963-661-889-6) pp. 104-115.

61. Koltai, T., Larraneta, J., Onieva, L. (1993): Examination of the sensitivity of an operation schedule with perturbation analysis. *International Journal of Production Research*, Vol. 31, pp. 2777-2787.

62. Koltai T., Romhányi G., Tatay V. (2009b): Optimalizálás bizonytalan paraméterekkel a termelés- és szolgáltatásmenedzsmentben. *Vezetéstudomány*, XL. évf., Június, pp. 68-73.

63. Koltai, T., Tatay, V. (2008a): A Practical Approach to Sensitivity Analysis of Linear Programming under Degeneracy in Management Decision Making. *15th International Working Seminar on Production Economics, Pre-Prints Volume III.* Innsbruck, Austria, 03.03-07.2008, pp. 223-234.

64. Koltai, T., Tatay, V. (2008b): The effect of degenerate LP sensitivity analysis results on management decision making. *microCAD 2008 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section.* Miskolc, Hungary, 03.20-21.2008, pp. 27-32.

65. Koltai, T., Tatay, V. (2008c): Support of production management decisions by sensitivity analysis of linear production planning models. *15th International Annual EurOMA Conference*. Groningen, Netherlands, 06.15-18.2008, pp. 1-10.

66. Koltai, T., Tatay, V. (2009): Application of Fuzzy Parameters in Production Planning Models. *microCAD 2009 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section.* Miskolc, Hungary, 03.19-20.2009, pp. 141-146.

67. Koltai, T., Tatay, V. (2010): Application of Simple Assembly Line Balancing Models to Support Production Quantity Related Decisions. *16th International Working Seminar on Production Economics*. Innsbruck, Austria, 03.01-05.2010, pp. 285-296.

68. Koltai, T., Tatay, V. (2011a): A Practical Approach to Sensitivity Analysis in Linear Programming under Degeneracy for Management Decision Making. *International Journal of Production Economics (IF=1,760)* , Vol. 131, No. 1, pp. 392-398.

69. Koltai, T., Tatay, V. (2011b): Formulation of Simple Workforce Skill Constraints in Assembly Line Balancing Models. *Periodica Polytechnica – Social and Management Sciences*, Vol. 19, No. 1, pp. 43-50.

70. Koltai, T., Tatay, V., Kalló, N.(2011): Application of Simple Assembly Line Balancing Models to Support Quick Response Operation in a Bicycle Production Process. *3rd Rapid Modelling Conference: Rapid Modelling for Sustainability.* Leuven, Belgium, 09.12-14.2011, pp. 1-10.

71. Koltai, T., Terlaky, T. (2000): The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming. *International Journal of Production Economics*, Vol. 65, pp. 257-274.

72. Kopányi M. (2007): *Mikroókönómia*. Akadémiai Kiadó, Budapest
73. Kovács Z. (2001): *Termelésmenedzsment. Interaktív bevezetés a termelőrendszerek tervezésébe, szervezésébe, irányításába*. Veszprémi Egyetem Kiadó
74. Kövesi J. (szerk.) (2007): *Menedzsment és vállalkozásgazdaságtan*. Typotex, Budapest.
75. Kövesi J. (szerk.), Topár J. (szerk.) (2007): *A minősémenedzsment alapjai*. Typotex, Budapest.
76. Lester, D. H. (1998): Critical Success Factors for New Product Development. *Research-Technology Management*, Vol. 41, pp. 36-43.
77. Luhn H. P. (1958): A Business Intelligence System. *IBM Research and Developement*, Vol. 2, No. 4, pp. 314-319.
78. Marcsa A. (2009): *Stratégiai menedzsment*. Oktatási segédanyag, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest
79. Marosán Gy. (2001): *Stratégiai menedzsment*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
80. Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol 7, No. 1, pp. 77-91.
81. McCloskey, J. F. (1987): The Beginnings of Operations Research: 1934-1941. *Operations Research*, Vol. 35, No. 1, pp. 143-152.
82. Meredith, J. R., Vineyard, M. (1993): A Longitudinal Study of the Role of Manufacturing Technology in Business Strategy. *Internation Journal of Operations and Production Management*, Vol. 13, No. 12, pp. 4-24.
83. Mészáros J. (2002): *Játékelmélet*. Oktatási segédanyag, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest
84. Murillo-Zamorano, L. R. (2004): Economic Efficiency and Frontier Techniques. *Journal of Economic Surveys*, Vol. 18, No. 1, pp. 34-77.
85. Nagy T. (1996): Matematikai programozás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
86. Nahmias, S. (1997): *Production and Operation Analysis*, Irwin
87. Negash, S. (2004): Business Intelligence. *Communications of the Assosiation for Information Systems*, Vol. 13, pp. 177-195
88. Ogryczak W. (2000): Multiple Criteria Linear Programming Model for Portfolio Selection. *Annuals of Operations Research*, Vol. 97, pp. 143-162.
89. Overby, S. (2005): The Price is Always Right. *CIO*, February, Vol. 18, No. 9, pp. 40-48.
90. Patterson, J. H., Albracht J. J. (1975): Assembly-Line Balancing: Zero-One Programming with Fibonacci Search. *Operations Research*, Vol. 23, pp. 166-174.
91. Porter, M. E. (2006): *Versenystratégia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
92. Prékopa A. (1980): On the Development of Optimization Theory. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 87, pp. 527-542.
93. Ragsdale, C. T. (2007): *Managerial Decision Modeling*, Thomson South-Western.
94. Rapcsák T. (1988): Az operációkutatás kialakulásáról és hazai helyzetéről. Magyar Tudomány, 4. sz., pp. 259-266.

95. Rodgers, R., Hunter, J., Rogers D. L. (1993): Influence of Top Management Commitment on Management Program Success. *Journal of Applied Psychology*, Vol. 78, pp. 151-155.

96. Roman, S. (2002): *Writing Excel Macros with VBA*, 2nd Edition, O'Reilly

97. Rubin, D. S., Wagner, H. M. (1990): Shadow Prices: Trips and Traps for Managers and Instructors. *The Institute of Management Sciences*, Vol. 20, pp. 150-157.

98. Salveson, M. E. (1955): The assembly line balancing problem. *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 6, pp. 18-25.

99. Scholl, A., Becker, C (2006): State-of-art Exact and Heuristic Soution Procedures for Simple Assembly Line Balancing. *European Journal of Operational Research*, Vol. 168. No.1, pp. 666-693.

100. Schrage, L. (2003): *Optimization Modeling with Lingo*. Lindo Systems Inc.

101. Schrijver A. (1998): *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and Sons

102. Sebestény Z., Koltai T. (2007): How to Consider the Cost of Unused Capacity in Managerial Decisions? MIC'07 Management International Conference, Portoroz, Szlovénia, 2007.11.20-2007.11.24., pp. 287-296.

103. Sebestény Z., Tóth T. (2012): Modellalkotás a projektmenedzsmentben. *Marketing és menedzsment*. Vol. 46, No. 1, pp. 148-157.

104. Shewhart, W. A. (1939): Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control, Dover

105. Stalk G. Jr. (1988): Time – The Next Sorce of Copetitive Advantage. *Harvard Business Review*, Vol. 66, No. Huly-August, pp. 41-51.

106. Stalk, G. Jr., Hout T. M. (1990): *Competing Against Time: How Time Based Competition is Reshaping Global Markets*, New York, Free Press

107. Stigler, G. (1945): The cost of subsistence. Journal of Farm Economics. Vol. 25, pp. 303-314.

108. Suri, R. (1998): *Quick Response Manufacturing: A Companywide Approach to Reducing Lead Times*. Productivitiy Press, Portland, OR, USA.

109. Talbot, F. B., Patterson, J. H. (1984): An Integer Programming Algorithm with Network Cuts for Solving the Assembly Line Balancing Problem. *Management Science*, Vol. 30, pp 85-99.

110. Tatay V. (2010): Gyártósor-kiegyenlítés alkalmazásának tapasztalatai egy kerékpárgyártó üzem példáján. *Pro Scientia Aranyérmesek X. jubileumi konferenciája*, Harvard Press, Budapest, (ISBN 978-963-88289-1-0) pp. 74-79.

111. Tatay, V., Koltai, T. (2011): Supporting Production Management Decisions with Assembly Line Balamcing Models in the Presence of Skilled and Unskilled Workers. *microCAD 2011 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.31-04.01.2011, pp. 125-130.

112. Tatay V., Koltai T. (2010a): Gyártósor-kiegyenlítés alkalmazásának tapasztalatai egy kerékpárgyártó üzem példáján., Pro Scientia Aranyérmesek X. jubileumi konferenciája, Budapest, 2010.09.30.- 2010.10.03.

113. Tatay V., Koltai T. (2010b): Menedzsmentdöntések támogatása munkások különböző képzettségeit figyelembe vevő gyártósor-kiegyenlítési modellekkel. *„Hitel, Világ, Stádium” jubileumi konferencia*, Sopron, 2010.

114. Tatay, V., Koltai, T. (2010c): Solving Assembly Line Balancing Models in Excel Environment to Support Production Management Decisions. *microCAD 2010 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.18-20. 2010, pp. 165-170.

115. Thangavelu, S. R., Shetty. C. M. (1971): Assembly Line Balancing by Zero-One Integer Programming. *AIIE Transactions*, Vol. 3, pp. 61-68.

116. Topár J. (2003): *Minőségmenedzsment*. Oktatási segédanyag, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

117. Vanderbei, R. J. (2008): *Linear Programming. Foundations and Extensions*. Springer,

118. Varian H. R. (2005): *Mikroökonómia középfokon*. Akadémiai Kiadó, Budapest

119. Vizvári B. (2006): *Egészértékű programozás*. Typotex, Budapest

120. Vörös J. (2010): *Termelés- és szolgáltatásmenedzsment.* Akadémiai Kiadó, Budapest

121. Ward, P. T., Duray (2000): Manufacturing Strategy in Context: Environment, Competitive Strategy and Manufacturing Strategy. *Journal of Operation Management*, Vol. 18, pp. 123-138.

122. Waters, D. (1996): *Operations Management*, Addison-Wesley Publishing Company.

123. White W. W. (1961), Comments on a Paper by Bowman. *Operations Research*, Vol. 9, pp. 274-276.

124. Wild, R. (1972): *Mass-Production Management*. John Wiley & Sons, London, New York

125. Williams, H. P. (1985): *Modell Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons Ltd.,

126. Winston, W. L. (2003): *Operációkutatás – módszerek és alkalmazások*. 1. kötet, Aula

127. Zimmermann, H-J. (1976): Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General Systems*, Vol. 2, pp. 209-215.

128. Zimmermann, H-J. (1983): Using fuzzy sets in operational research. *European Journal of Operational Research*, Vol. 13, pp. 201-216.

7. AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBŐL KÉSZÜLT PUBLIKÁCIÓK JEGYZÉKE

Könyv, könyvrészlet, egyetemi jegyzet

S1 Tatay V. (2010): Gyártósor-kiegyenlítés alkalmazásának tapasztalatai egy kerékpárgyártó üzem példáján. *Pro Scientia Aranyérmesek X. jubileumi konferenciája*, Harvard Press, Budapest, ISBN 978-963-88289-1-0, pp. 74-79.

S2 Koltai T., Kalló N., Tatay V. (2009): Optimumkeresés bizonytalan paraméterekkel a termelés- és szolgáltatásmenedzsmentben. In Veresné Somosi M. (szerk.) : *Vezetési ismeretek III.* Miskolci Egyetem Gazdaságtudományi Kar, ISBN: 978-963-661-886-5; 978-963-661-889-6, pp. 104-115.

Web of Science adatbázisban szereplő folyóiratcikk

S3 Koltai, T., Tatay, V. (2011): A Practical Approach to Sensitivity Analysis in Linear Programming under Degeneracy for Management Decision Making. *International Journal of Production Economics (IF=1,760)* , Vol. 131, No. 1, pp. 392-398.

Scopus adatbázisban szereplő folyóiratcikk

S4 Koltai, T., Tatay, V. (2011): Formulation of Simple Workforce Skill Constraints in Assembly Line Balancing Models. *Periodica Polytechnica – Social and Management Sciences*, Vol. 19, No. 1, pp. 43-50.

Magyarországon kiemelt folyóiratban megjelent folyóiratcikk

S5 Koltai T., Romhányi G., Tatay V. (2009): Optimalizálás bizonytalan paraméterekkel a termelés- és szolgáltatásmenedzsmentben. *Vezetéstudomány*, XL. évf., Június, pp. 68-73.

Nemzetközi részvételű konferencia kiadványában megjelent idegen nyelvű előadás

S6 Koltai, T., Tatay, V., Kalló, N.(2011): Application of Simple Assembly Line Balancing Models to Support Quick Response Operation in a Bicycle Production Process. *3rd Rapid Modelling Conference: Rapid Modelling for Sustainability*. Leuven, Belgium, 09.12-14.2011, pp. 1-10.

S7 Koltai, T., Tatay, V. (2010): Application of Simple Assembly Line Balancing Models to Support Production Quantity Related Decisions. *16th International Working Seminar on Production Economics*. Innsbruck, Austria, 03.01-05.2010, pp. 285-296.

S8 Koltai, T., Tatay, V. (2008): Support of production management decisions by sensitivity analysis of linear production planning models. *15th International Annual EurOMA Conference*. Groningen, Netherlands, 06.15-18.2008, pp. 1-10.

S9 Koltai, T., Tatay, V. (2008): A Practical Approach to Sensitivity Analysis of Linear Programming under Degeneracy in Management Decision Making. *15th International Working Seminar on Production Economics, Pre-Prints Volume III.* Innsbruck, Austria, 03.03-07.2008, pp. 223-234.

Helyi részvételű konferencia kiadványában megjelent idegen nyelvű előadás

S10 Tatay, V., Koltai, T. (2011): Supporting Production Management Decisions with Assembly Line Balamcing Models in the Presence of Skilled and Unskilled Workers. *microCAD 2011 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.31-04.01.2011, pp. 125-130.

S11 Tatay, V., Koltai, T. (2010): Solving Assembly Line Balancing Models in Excel Environment to Support Production Management Decisions. *microCAD 2010 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.18-20. 2010, pp. 165-170.

S12 Inczédy, K., Koltai, T., Tatay, V. (2010): The Comparison of the Optimal and Real Operation in a Yeast Production Plant – A Case Study. *microCAD 2010 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.18-20. 2010, pp. 159-164.

S13 Koltai, T., Tatay, V. (2009): Application of Fuzzy Parameters in Production Planning Models. *microCAD 2009 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.19-20.2009, pp. 141-146.

S14 Koltai, T., Tatay, V. (2008): The effect of degenerate LP sensitivity analysis results on management decision making. *microCAD 2008 International Scientific Conference, Economic Challenges in the XXI Century Section*. Miskolc, Hungary, 03.20-21.2008, pp. 27-32.

Magyar nyelvű, kiadványában megjelent konferencia-előadás

S15 Tatay V., Koltai T.: Menedzsmentdöntések támogatása munkások különböző képzettségeit figyelembe vevő gyártósor-kiegyenlítési modellekkel. *„Hitel, Világ, Stádium" jubileumi konferencia*, Sopron, 2010.

S16 Tatay V., Koltai T.: Gyártósor-kiegyenlítés alkalmazásának tapasztalatai egy kerékpárgyártó üzem példáján., Pro Scientia Aranyérmesek X. jubileumi konferenciája, Budapest, 2010.09.30.- 2010.10.03.

8. MELLÉKLETEK

1. sz. melléklet: Az alkalmazott jelölések jegyzéke

Indexek:

j – lineáris programozási feladatok sorainak indexe (j=1,…,J)
t – tervezési periódus időegységének indexe (t=1,…,T)
w – terméktípusok indexe (u=1,…,U)
l – erőforrások indexe (l=1,…,L)
v – gyártási folyamat indexe (v=1,…,V)
i – lineáris programozási feladatok változóinak indexe (i=1,…,I)
ρ – bázis indexek
m – feladatok indexe (m=1,…,M)
u – feladatok részhalmazának indexe
n – munkaállomások indexe (n=1,…,N)
k – tevékenységek és dolgozók képzettségi szintjének indexe (k=1,…,K)

Paraméterek:

$\mathbf{b}$ – jobboldali paramétereket tartalmazó vektor, amelynek elemei b_j
f_t – egy dolgozó felvételének a költsége a t időszakban
e_t – egy dolgozóelbocsátásának a költsége a t időszakban
i_t – a raktározás fajlagos költsége a t időszakban
g_t – a t időszak fajlagos gyártási költsége
t_t – a túlóra fajlagos gyártási költsége a t időszakban
u_t – a kapacitás-kihasználatlanság fajlagos költsége t időszakban
a_t – az alvállalkozói gyártás fajlagos gyártási költsége a t időszakban
H – termelékenységi együttható
ss_t – at időszakra előírt biztonsági készletszint
B_t – a gyártás felső korlátja a t időszakban
i_t^+ – a raktározás fajlagos költsége pozitív készlettel szemben a t időszakban
i_t^- – a raktározás fajlagos költsége negatív készlettel szemben, hiányköltség a t időszakban
D_t – igény t időszakban
α – igény-simítási paraméter
β – raktárszint-simítási paraméter
p_u – u terméktípus fajlagos eladási ára
q_u – u terméktípus fajlagos közvetlen költsége
v_{ul} – u terméktípus fajlagos erőforrás-szükséglete l erőforrásból
B_l – l erőforrásból a rendelkezésre álló mennyiség
U_u – u terméktípus gyártási mennyiségének felső korlátja
L_u – u terméktípus gyártási mennyiségének alsó korlátja
c_{uv} – u terméktípus fajlagos gyártási költsége a v útvonalon
D_u – u terméktípus iránti igény
a_{uvl} – u terméktípus, v útvonalon, l erőforrással történő előállításnak fajlagos erőforrás-szükséglete
$\mathbf{A}$ – együtthatómátrix, amelynek elemei a_{ji}

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ – együtthatómátrix transzponáltja, amelynek elemei a_{ij}
$\mathbf{a}^{\mathbf{i}}$ – **A** együtthatómátrix *i*-edik oszlopa
$\mathbf{B}_{\rho}$ – optimális bázis
$\mathbf{B}_{\rho}^{-1}$ – $\mathbf{B}_{\rho}$ bázis inverze
${}^{\rho}\mathbf{b}$ – ρ bázis indexekhez tartozó bázismegoldás vektor komponensei, primál megoldás
$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}$ – célfüggvény-együtthatókat tartalmazó vektor, amelynek elemei c_i
$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}$ – bázis célfüggvény-együttható vektor
$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}$ – az optimális bázismegoldásban szereplő döntési változókhoz tartozó célfügvény-együttható komponensek
${}^{\rho}\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}$ – kritérium vektor
${}^{\rho}\Delta\mathbf{c}_{i}$ – duál megoldás
M – feladatok száma a gyártósor-kiegyenlítési modellben
N – munkahelyek száma a bináris gyártósor-kiegyenlítési modellben
K – a modellben alkalmazott munkahelyszám
R – egymással precedencia kapcsolatban álló feladatok indexpárainak halmaza, vagyis $(p;q)\in R$, ha p feladat közvetlenül megelőzi q feladatot
t_m – *m* feladat végrehajtásához szükséges idő (tevékenységidő)
s_n – *n* állomáshoz rendelt feladatok végrehajtásához szükséges idő (állomásidő)
T_c – gyártósor ciklusideje
T – gyártásra rendelkezésre álló idő
LJ_m – a legkorábbi olyan munkahely, amelyhez az *m*-edik tevékenység a megelőző tevékenységek miatt hozzárendelhető
UJ_m – a legkésőbbi munkahely, amelyhez az *m*-edik tevékenység a követő műveletek miatt hozzárendelhető
Q – gyártási mennyiség
$Q_{Max}^{OPT}(N)$ – *N* darab munkahelyhez tartozó maximális gyártási mennyiség
c_m – *m* állomás kapacitás-kihasználtsága
W – speciális dolgozók száma
z – kellően nagy szám
W_k – a *k*-adik szintű speciális dolgozók száma

Halmazok:

O – az összes végrehajtandó feladat halmaza
L – utolsó feladatok halmaza, tehát $m\in L$ ha az *m*-edik feladat nem előz meg egyetlen más feladatot sem
P_m – azon feladatok halmaza, amelyeket be kell fejezni mielőtt az *m*-edik tevékenységet elkezdjük
S_m – azon feladatok halmaza, amelyek nem kezdhetőek addig el, amíg az *m*-edik tevékenység nincs befejezve
S_k – *k* szintű feladatok halmaza
S – speciális feladatok halmaza
$\overline{S}$ – nem speciális feladatok halmaza (*S* halmaz negáltja)

Változók:

$\mathbf{x}$ – a primál feladat változóit tartalmazó vektor, melynek elemei x_i

OF – a célfüggvény értéke
P_t – t időszak gyártási szintje
W_t – dolgozók száma a t időszakban
I_t – raktárkészlet a t időszak végén
S_t – a t időszak megrendelt termékmennyiség
F_t – a felvett dolgozók száma a t időszakban
E_t – a t időszakban elbocsátott dolgozók száma
G_t – elméletileg lehetséges gyártási szint a t időszakban
T_t – a túlóra alatt készített termékek száma a t időszakban
U_t – a kihasználatlan kapacitás miatt el nem készített termékek száma a t időszakban
A_t – az alvállalkozók által gyártott termékmennyiség a t időszakban
I_t^+ – pozitív raktárkészlet a t időszakban
I_t^- – negatív raktárkészlet a t időszakban
X_u – optimális gyártási mennyiség az u terméktípusból
X_{uv} – az u terméktípusból előállítandó termékmennyiség a v útvonalon
$\mathbf{x}^*$ – a primál feladat változóinak optimális értékeit tartalmazó vektor, melynek elemei x_i^*
$\mathbf{y}$ – a duál feladat változóit tartalmazó vektor, melynek elemei y_j
$\mathbf{y}^*$ – a duál feladat változóinak optimális értékeit tartalmazó vektor, melynek elemei y_j^*
OF^* – a célfüggvény optimális értéke
$\underline{\mathbf{e}}_i$ – I elemű egységvektor, melynél, e_i–1 és e_k–0 minden $k \neq i$ esetén
$\underline{\mathbf{e}}_j$ – J elemű egységvektor, melynél, e_i–1 és e_k–0 minden $k \neq j$ esetén
δ – jobb-oldali paraméter perturbációja
y_j^- – a b_j jobb oldali paraméter bal-oldali árnyékára ($\delta<0$) (SP^-)
y_j^+ – a b_j jobb oldali paraméter jobb-oldali árnyékára ($\delta>0$) ($SP^{+)}$
γ_i – a c_i célfüggvény-együttható változása
γ_i^- – a c_i célfüggvény-együttható megengedett csökkenésének értéke
γ_i^+ – a c_i célfüggvény-együttható megengedett növekedésének értéke
ξ_j – a b_j jobb oldali paraméter változása
$n\xi_j^-$ – a b_j jobb oldali paraméter baloldali árnyékárához tartozó megengedett csökkenés
$n\xi_j^+$ – a b_j jobb oldali paraméter baloldali árnyékárához tartozó megengedett növekedés
$p\xi_j^-$ – a b_j jobb oldali paraméter jobboldali árnyékárához tartozó megengedett csökkenés
$p\xi_j^+$ – a b_j jobb oldali paraméter jobboldali árnyékárához tartozó megengedett növekedés
ξ_j^- – a b_j jobb oldali paraméter megengedett csökkenése
ξ_j^+ – a b_j jobb oldali paraméter megengedett növekedése
x_{mn} – 0-1 döntési változó; x_{mn}=1, ha m-edik feladatot az n-edik munkahelyhez rendeljük, x_{mn}=0 különben
l_{nk} – 0-1 döntési változó; l_{nk}=1, ha az n-edik munkahelyen a k-adik szintű alacsony képzettségű dolgozó dolgozik, 0 különben
h_{nk} – 0-1 döntési változó; h_{nk}=1, ha az n-edik munkahelyen a k-adik szintű magas képzettségű dolgozó dolgozik, 0 különben
e_{nk} – 0-1 döntési változó; v_{nk}=1, ha az n-edik munkahelyen a k-adik szintű speciális képzettségű dolgozó dolgozik, 0 különben
l_n – 0-1 döntési változó; l_n=1, ha az n-edik munkahelyhez alacsony képzettségű dolgozót rendelünk, l_n=0 különben
h_n – 0-1 döntési változó; h_n=1, ha az $n$edik munkahelyhez magasan képzett dolgozót rendelünk, h_n=0 különben
e_n – 0-1 döntési változó; v_n=1, ha az n-edik munkahelyen speciális dolgozót alkalmazunk, v_n=0 különben

Rövidítések:

LP (Linear Programming): lineáris programozás
OFC (Objective Function Coefficient): célfüggvény-együttható
RHS (Right Hand Side) paraméter: jobboldali paraméter
SP (Shadow Price): árnyékár
SP^-: baloldali árnyékár
SP^+: jobboldali árnyékár
SALB (Simple Assembly Line Balancing): egyszerű gyártósor-kiegyenlítés
SALBP (Simple Assembly Line Balancing Problem): egyszerű gyártósor-kiegyenlítési probléma
SALBM (Simple Assembly Line Balancing Model): egyszerű gyártósor-kiegyenlítési modell
GALB (General Assembly Line Balancing): általános gyártósor-kiegyenlítés

2. sz. melléklet: A mintapélda primál LP feladatának LINGO kódja

```
SET DUALCO 2
SET ILFTOL 0.01
SET FLFTOL 0.009
MODEL:
SETS:
 VALTOZOK / @OLE(
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
       )/ : X,OFC;
 KORL / @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) / : RHS;
 MATR (KORL,VALTOZOK) : ARANY;
 PAR/1..1/: OPT;
ENDSETS
DATA:
 OFC, RHS, ARANY = @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
            ) ;
ENDDATA

MAX=@SUM(VALTOZOK(I) : X(I) * OFC(I));
 @FOR(KORL(I) : [K] @SUM(VALTOZOK(J) : ARANY(I,J) * X(J)) <= RHS(I));
OPT(1)=@SUM(VALTOZOK(I) : X(I) * OFC(I));

DATA:
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) = X, OPT;
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
 , 'OFCcs','OFCnov')= @RANGED(X), @RANGEU(X);
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
 , 'Y') = @DUAL(K);
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
 , 'Ycsokk','Ynov')= @RANGED(K), @RANGEU(K);
ENDDATA
END
GO
QUIT
```

3. sz. melléklet: A mintafeladat OFCinek megengedett csökkenését és megengedett növekedését meghatározó LINGO modellek

γ_i^- számítása:

```
SET ILFTOL 0.01
SET FLFTOL 0.009
MODEL:
SETS:
 VALTOZOK / @OLE(
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
       )/ : OFC, X, EX, GAMX;
 KORL / @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) / : Y,RHS;
 TRANSZP (VALTOZOK,KORL) : TRARANY;
 PAR/1..1/: OFCMOMIN;
ENDSETS
DATA:
 OFC, RHS, TRARANY,
 X, EX, OPT = @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
            ) ;
ENDDATA

 MAX= @SUM(VALTOZOK(I): EX(I) * GAMX(I));

 @FOR(VALTOZOK(I) :@SUM(KORL(J) :
     TRARANY(I,J) * Y(J)) + EX(I) * GAMX(I)>= OFC(I));
 @SUM(KORL(I) : Y(I) * RHS(I))+
 @SUM(VALTOZOK(J) : EX(J)* GAMX(J) * X(J)) = OPT;
 OFCMOMIN(1) = @SUM(VALTOZOK(I): EX(I) * GAMX(I));

 @FREE(OFCMOMIN(1));

DATA:
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
    ,'stofcmin' ) =
     @status();
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
             ) = OFCMOMIN;
ENDDATA
END
GO
QUIT
```

γ_i^+ számítása:

```
SET ILFTOL 0.01
SET FLFTOL 0.009
MODEL:
SETS:
 VALTOZOK / @OLE(
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
       )/ : OFC, X, EX, GAMX;
 KORL / @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) / : Y,RHS;
 TRANSZP (VALTOZOK,KORL) : TRARANY;
 PAR/1..1/: OFCMOMAX;
ENDSETS
DATA:
 OFC, RHS, TRARANY,
 X, EX, OPT = @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
            ) ;
ENDDATA

 MAX= @SUM(VALTOZOK(I): EX(I) * GAMX(I));

 @FOR(VALTOZOK(I) :@SUM(KORL(J) :
     TRARANY(I,J) * Y(J)) - EX(I) * GAMX(I)>= OFC(I));
 @SUM(KORL(I) : Y(I) * RHS(I))-
 @SUM(VALTOZOK(J) : EX(J)* GAMX(J) * X(J)) = OPT;
 OFCMOMAX(1) = @SUM(VALTOZOK(I): EX(I) * GAMX(I));

 @FREE(OFCMOMAX(1));

DATA:
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
    ,'stofcmax' ) =
     @status();
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
             ) = OFCMOMAX;
ENDDATA
END
GO
QUIT
```

4. sz. melléklet: A mintafeladat jobboldali paramétereinek menedzsment szemponbtól korrekt érzékenységvizsgálati eredményeit adó számítás LINGO kódja

perturbált primál feladat megoldása:
(δ>0)

```
SET DUALCO 2
SET ILFTOL 0.01
SET FLFTOL 0.009
MODEL:
SETS:
 VALTOZOK / @OLE(
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
       )/ : Xpertp,OFC;
 KORL / @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) / : RHSpertp;
 MATR (KORL,VALTOZOK) : ARANY;
 PAR/1..1/: OPTPERTp;
ENDSETS
DATA:
 OFC, RHSpertp, ARANY = @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
            ) ;
ENDDATA

MAX=@SUM(VALTOZOK(I) : Xpertp(I) * OFC(I));
 @FOR(KORL(I)   :[K]   @SUM(VALTOZOK(J)   :   ARANY(I,J)   *   Xpertp(J))   <=
RHSpertp(I));
OPTPERTp(1)=@SUM(VALTOZOK(I) : Xpertp(I) * OFC(I));

DATA:
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) = Xpertp, OPTPERTp;
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
  , 'Ypertp') = @DUAL(K);
ENDDATA
END
GO
QUIT
```

Megjegyzés: δ<0 esetén a `pertp` helyett `pertn` szerepel

$p\xi_j^-$ számítása:

```
SET ILFTOL 0.01
SET FLFTOL 0.009
MODEL:
SETS:
 VALTOZOK / @OLE(
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
       )/ : Xpertp,OFC;
 KORL / @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) / : RHSpertp,
 Ypertp, EY, GAMY;
 MATR (KORL,VALTOZOK) : ARANY;
 PAR/1..1/: SPpcsokk;
ENDSETS
DATA:
 OFC, RHSpertp, ARANY, Ypertp, EY, OPTPERTp = @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
            ) ;
ENDDATA

MAX= @SUM(KORL(I): EY(I) * GAMY(I));
 @FOR(KORL(I) : @SUM(VALTOZOK(J) : ARANY(I,J) * Xpertp(J)) + EY(I) * GAMY(I)
    <= RHSpertp(I));

 @SUM(VALTOZOK(I): OFC(I) * Xpertp(I)) +
 @SUM(KORL(J): EY(J) * GAMY(J) * Ypertp(J))= OPTPERTP;

SPpcsokk(1)= @SUM(KORL(I): EY(I) * GAMY(I));

 @FREE(SPpcsokk(1));

DATA:
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
  ,'stSPpcsokk' ) = @STATUS();
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
           ) = SPpcsokk;
ENDDATA
END
GO
QUIT
```

Megjegyzés: $\delta<0$ esetén a `pertp` helyett `pertn` szerepel

$p\xi_j^+$ számítása:

```
SET ILFTOL 0.01
SET FLFTOL 0.009
MODEL:
SETS:
 VALTOZOK / @OLE(
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
       )/ : Xpertp,OFC;
 KORL / @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
          ) / : RHSpertp,
 Ypertp, EY, GAMY;
 MATR (KORL,VALTOZOK) : ARANY;
 PAR/1..1/: SPpnov;
ENDSETS
DATA:
 OFC, RHSpertp, ARANY, Ypertp, EY, OPTPERTp = @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
            ) ;
ENDDATA

MAX= @SUM(KORL(I): EY(I) * GAMY(I));
 @FOR(KORL(I) : @SUM(VALTOZOK(J) : ARANY(I,J) * Xpertp(J)) - EY(I) * GAMY(I)
    <= RHSpertp(I));

 @SUM(VALTOZOK(I): OFC(I) * Xpertp(I)) -
 @SUM(KORL(J): EY(J) * GAMY(J) * Ypertp(J))= OPTPERTP;

SPpnov(1)= @SUM(KORL(I): EY(I) * GAMY(I));

 @FREE(SPpnov(1));

DATA:
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
  ,'stSPpnov' ) = @STATUS();
 @OLE (
 'C:\LINGO\IJPE.xls'
           ) = SPpnov;
ENDDATA
END
GO
QUIT
```

Megjegyzés: $\delta<0$ esetén a `pertp` helyett `pertn` szerepel

5. sz. melléklet: A mintafeladat menedzsment szempontból korrekt érzékenységvizsgálatát vezérlő VBA kódsorozat

```
'Megnyitás'
        Dim LINGO As Object
    Sub Auto_Open()
        Set LINGO = CreateObject("LINGO.Document.4")
    End Sub
```

```
'Primál megoldása'
    Sub LINGOSolvePR()
        Sheets("PrAdatok").Select
        Dim iErr As Integer
        iErr = LINGO.RunScriptRange("PRMODEL")
        If (iErr > 0) Then
            MsgBox ("Unable to solve model")
        End If
    End Sub
```

```
'OFC'
    Sub LINGOSolveOFC()
        Sheets("OFC").Select
        For eh = 1 To 12
            Range("E5:F5").Select
            Selection.ClearContents
            Range("H5:I5").Select
            Selection.ClearContents
            Range("C11") = eh
            Dim iErr As Integer
            'NÖV'
              iErr = LINGO.RunScriptRange("OFCMODELMAX")
              Range("E" & 1 + eh) = Range("E5")
              Range("F" & 1 + eh) = Range("F5")
            'CSÖKK'
              iErr = LINGO.RunScriptRange("OFCMODELMIN")
              Range("H" & 1 + eh) = Range("H5")
              Range("I" & 1 + eh) = Range("I5")
            If (iErr > 0) Then
            MsgBox ("Unable to solve model")
            End If
        Next eh
    End Sub
```

```
'SP+'
    Sub LINGOSolveRHS_SPp()
        Sheets("RHS").Select
        For korl = 1 To 8
            Range("C9") = korl
            If Worksheets("PrData").Range("D" & 27 + korl) = 0 Or
                        Worksheets("PrData").Range("E" & 27 + korl) = 0 Then
              Range("H9:I9").Select
              Selection.ClearContents
              Range("L9:M9").Select
              Selection.ClearContents
              Dim iErr As Integer
              iErr = LINGO.RunScriptRange("SPpPRIMAL")
              Worksheets("RHS").Range("K" & 1 + korl) =
                        Worksheets("RHSmodelSPp").Range("C" & 7 + korl)
              iErr = LINGO.RunScriptRange("RHSMODSPpMAX")
              Range("H" & 1 + korl) = Range("H9")
              Range("I" & 1 + korl) = Range("I9")
              iErr = LINGO.RunScriptRange("RHSMODSPpMIN")
              Range("L" & 1 + korl) = Range("L9")
              Range("M" & 1 + korl) = Range("M9")
              If (iErr > 0) Then
                    MsgBox ("Unable to solve model")
              End If
            Else:
              Range("L20:M20").Select
              Selection.ClearContents
              Range("O20:P20").Select
              Selection.ClearContents
              Dim jErr As Integer
              jErr = LINGO.RunScriptRange("filtSPinc")
              Range("L" & 12 + constr) = Range("L20")
              Range("M" & 12 + constr) = Range("M20")
              jErr = LINGO.RunScriptRange("filtSPdec")
              Range("O" & 12 + constr) = Range("O20")
              Range("P" & 12 + constr) = Range("P20")
              If (jErr > 0) Then
                    MsgBox ("Unable to solve model")
              End If
            End If
        Next korl
    End Sub
```

```
'SP-'
    Sub LINGOSolveRHS_SPn()
        Sheets("RHS").Select
        For korl = 1 To 8
            Range("C9") = constr
            If Worksheets("PrData").Range("D" & 27 + korl) = 0 Or
              Worksheets("PrData").Range("E" & 27 + korl) = 0 Then
            Range("O9:P9").Select
            Selection.ClearContents
            Range("S9:T9").Select
            Selection.ClearContents
            Dim iErr As Integer
            iErr = LINGO.RunScriptRange("SPnPRIMAL")
            Worksheets("RHS").Range("R" & 1 + korl) =
            Worksheets("RHSmodelSPn").Range("C" & 7 + korl)
            iErr = LINGO.RunScriptRange("RHSMODSPnMAX")
            Range("O" & 1 + korl) = Range("O9")
            Range("P" & 1 + korl) = Range("P9")
            iErr = LINGO.RunScriptRange("RHSMODSPnMIN")
            Range("S" & 1 + korl) = Range("S9")
            Range("T" & 1 + korl) = Range("T9")
            If (iErr > 0) Then
              MsgBox ("Unable to solve model")
            End If
        Next korl
    End Sub
```

<u>A teljes érzékenységvizsgálat VBA kódja:</u>

```
Sub FULL_LP_SEN()
        Application.Run "INICIALIZAL"
        Application.Run "Auto_Open"
        Application.Run "LINGOSolvePR"
        Application.Run "LINGOSolveOFC"
        Sheets("RHS").Select
        Application.Run "LINGOSolveRHS_SPp"
        Application.Run "LINGOSolveRHS_SPn"
        Sheets("Összefoglalás").Select
End Sub
```

6. sz. melléklet: A gyakorlati feladat SALB-1 modelljének LINGO kódja

```
SET ECHOIN 1
MODEL:
SETS:
 MUV / @OLE (
 'C:\LINGO\SALBP1'
                       ) / :T;
 PREC( MUV, MUV) : P;
 ALLOMAS / @OLE (
 'C:\LINGO\SALBP1'
                 ) /;
 TxS(MUV, ALLOMAS): A, X;
ENDSETS

DATA:
 T, P, CIKLUSIDO, A  = @OLE (
 'C:\LINGO\SALBP1'
);
 @OLE(
 'C:\LINGO\SALBP1'
      )= X;
ENDDATA

!Ciklusidő betartása;
 @FOR(ALLOMAS(J):
    @SUM(MUV(I): T(I)*X(I,J))<=CIKLUSIDO);

!Minden tevékenység kerüljön végrehajtásra;
 @FOR(MUV(I):
    @SUM(ALLOMAS(J):X(I,J))=1);

!A precedencia gráfnak való megfelelés;
 @FOR(MUV(M): @FOR(MUV(N)| P(M,N) #EQ# 1:
    @SUM(ALLOMAS(J): J*(X(N,J)-X(M,J)))>=0));

!A  legkorábbi  munkahely  előtti  és  a  legkésőbbi  munkahely  mögötti
munkahelyek változóinak értéke 0;
 @FOR(MUV(M): @FOR(ALLOMAS(L)| A(M,L) #EQ# 0:
    X(M,L)=0));

!A célfüggvény az utolsó művelet legkorábbi ütemezését írja elő;
 MIN=@SUM( ALLOMAS(J): J* X(31,J));

 @FOR(TxS(I,J): @BIN(X(I,J)));

END
TERSE
GO
QUIT
```

7. sz. melléklet: A gyakorlati feladat SALB-2 modelljének LINGO kódja

```
SET ECHOIN 1
MODEL:
SETS:
 MUV / @OLE (
 'C:\LINGO\BOWMAN\SALBP2.XLS'
                       ) / :T;
 PREC( MUV, MUV) : P;
 ALLOMAS / @OLE (
 'C:\LINGO\BOWMAN\SALBP2.XLS'
                 ) /;
 TxS(MUV, ALLOMAS): A, X;
 PAR/1..1/ : TC;
ENDSETS

DATA:
 T, P, A = @OLE (
 'C:\LINGO\BOWMAN\SALBP2.XLS'
);
ENDDATA

!Ciklusidő felírása;
 @FOR(ALLOMAS(J):
    @SUM(MUV(I): T(I)*X(I,J))<=C);

!Minden tevékenység kerüljön végrehajtásra;
 @FOR(MUV(I):
    @SUM(ALLOMAS(J):X(I,J))=1);

!A precedencia gráfnak való megfelelés;
 @FOR(MUV(M): @FOR(MUV(N)| P(M,N) #EQ# 1:
    @SUM(ALLOMAS(J): J*(X(N,J)-X(M,J)))>=0));

!A legkorábbi munkahely előtti és a legkésőbbi munkahely mögötti
munkahelyek változóinak értéke 0;
 @FOR(MUV(M): @FOR(ALLOMAS(L)| A(M,L) #EQ# 0:
    X(M,L)=0));

!A célfüggvény a ciklusidőt minimalizálja;
MIN=C;
TC(1)=C;

 @FOR(TxS(I,J): @BIN(X(I,J)));

DATA:
 @OLE(
 'C:\LINGO\BOWMAN\SALBP2.XLS'
     ) =X, TC;
ENDDATA

END
TERSE
GO
QUIT
```

8. sz. melléklet: A gyakorlati példában alkalmazott képzettségi szinteket előíró feltételek LINGO kódjai

<u>LSC feltételek:</u>

```
@FOR(ALLOMAS(J):
      @SUM(MUV(I)| SKILLS(I) #NE# 1: X(I,J))<=Z*(1-Y(J)));
 @SUM(ALLOMAS(J): Y(J))=SW;
 @FOR(ALLOMAS(J):
      @SUM(MUV(I) : X(I,J))>=Y(J));
```

<u>HSC feltételek:</u>

```
@FOR(ALLOMAS(J):
      @SUM(MUV(I)| SKILLS(I) #EQ# 1: X(I,J))<=Z*Y(J));
 @SUM(ALLOMAS(J): Y(J))<=SW;
 @FOR(ALLOMAS(J):
      @SUM(MUV(I) : X(I,J))>=Y(J));
```

<u>ESC feltételek:</u>

```
@FOR(ALLOMAS(J):
      @SUM(MUV(I)| SKILLS(I) #EQ# 1: X(I,J))<=Z*Y(J));
 @FOR(ALLOMAS(J):
      @SUM(MUV(I)| SKILLS(I) #NE# 1: X(I,J))<=Z*(1-Y(J)));
```