Többperiódusú befektetési stratégiák vizsgálata

Urbán András
urban@finance.bme.hu

Tézisfüzet
2011

témavezető: Dr. Ormos Mihály

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Gazdálkodás- és Szervezéstudományi Doktori Iskola

MŰEGYETEM 1782

Tartalomjegyzék

1. A kutatás célja

A dolgozat célja a többperiódusú növekedés-optimális befektetési stratégiák elméleti és empirikus elemzése, kiemelt hangsúlyt helyezve a klasszikus, egyperiódusú portfólió modell (Markowitz, 1952, Sharpe, 1964, Lintner, 1965, Mossin, 1966) és a többperiódusú stratégiák tulajdonságai közti párhuzamokra és különbségekre. Az értekezésben Györfi, Lugosi és Udina (2007), Györfi, Urbán és Vajda (2007), Györfi, Udina és Walk (2008), Urbán és Ormos (2010) és Ormos és Urbán (2010) alapján bevezetek egy többperiódusos befektetési modellt, amely lehetővé teszi, hogy matematikailag is formalizáljam a klasszikus és a többperiódusos megközelítés közötti különbségeket. A probléma fontossága abban rejlik, hogy míg a tradicionális modellek a befektetés várható hozam-variancia alapján való optimalizálására épülnek, addig egy többperiódusú, hosszútávú befektetési döntés leírására a dolgozatotban bemutatottak alapján alkalmatlanok. Egy többperiódusú befektetés egymást követő egyperiódusú döntések eredője, ahol egységnyi kezdeti befektetés után a befektetett tőke és annak hozamai egyaránt visszaforgatásra kerülnek. Annak ellenére, hogy matematikailag a várható hozam periódusonkénti maximalizálása egy többperiódusú befektetés esetén a hosszútávú befektetés által elérhető vagyon várható értékének maximalizálásához vezet, a befektető asszimptotikusan nulla valószínűséggel képes ezt a várható értéket megközelíteni (Györfi, Ottucsák és Urbán, 2007). Ebből következik, hogy a hosszútávú vagyonnövekedés ütemének leírására a várható hozam alkalmatlan, míg az értekezésben bemutatottak alapján a várható logaritmikus hozam igen.

A dolgozatban bevezetek egy új feltételt, amely matematikai kapcsolatot teremt a klasszikus, várható hozamon és variancián alapuló modellek és a hossztávú vagyon maximalizálás feltételei között (lásd Ormos és Urbán, 2010), azaz a tradicionális modell paraméterei segítségével eldönthetővé teszem, hogy egy többperiódusos stratégia pozitív növekedést eredményez-e vagy sem. További célom, hogy eredményeinket empirikus formában is igazoljam. Ennek érdekében a matematikai összefüggéseket az S&P 500 index 1970 és 2008 közötti komponenseinek hozamadatainak felhasználásával illusztráltam, amely vizsgálatok alapján a matematikai formulák alkalmazhatósága a gyakorlatban is megerősítést nyert.

A dolgozat másik fontos eredményeként meghatároztam, hogy több periódus esetén, milyen befektetések tartása racionális. Megmutatom, hogy egy többperiódusú befektetés esetén a kockázat és a növekedés mértékét leíró várható logaritmikus hozam viszonya másképpen alakul, mint a klasszikus, egyperiódusos rendszerben. Mivel a növekedési rátának a variancia függvényében egy jól definiált maximuma van, ezért a legnagyobb növekedést ígérő, úgynevezet növekedés-optimális pontban mért varianciánál nagyobb kockázat-vállalásáért a befektető már nem lesz kompenzálva növekvő növekedési ütem formájában. Ez az értekezésben empirikusan is igazolt eredmény rámutat a többperiódusú és tradicionális megközelítés közötti legélesebb különbségre, ugyanis a modern portfólió elmélet (Markowitz, 1952) és a ráépülő modell alapelvei értelmében növekvő kockázat vállalásért a befektetőket növekvő várható hozamok kompenzálják.

A dolgozatban bemutatásra kerülnek az ún. logoptimális és semi-logoptimális stratégiák (lásd Györfi, Urbán és Vajda, 2007), amelyek a növekedés-optimális elv szekvenciális kibővítései. A bevezetett semi-logoptimális stratégia közel optimális aszimptotikus növekedési rátát garantál minden stacionárius és ergodikus folyamat esetén. Az eljárás a Györfi, Lugosi és Udina (2005) által bevezetett magfüggvény alapú módszer olyan közelítése, amely csak az árfolyamok első és második feltételes momentumát használja fel. Az értekezésben a szakirodalomban korábban benchmarkként használt, a New York-i Értéktőzsde 36 db részvényét tartalmazó jól diverzifikált portfólió, 22 éves időintervallumot átfogó adathalmazán végzek teszteket. A vizsgálatok eredményei alapján összehasonlítom az új eljárást a Györfi, Lugosi és Udina által (2005) korábban bevezetett stratégiával. Az empirikus eredmények igazolják, hogy a vizsgált adatokon a stratégia teljesítményét nem rontja a logaritmus függvény várható értékének első és második feltételes momentumon alapuló közelítése, így a logoptimális és a Markowitz-féle elmélet közötti párhuzam a gyakorlatban alkalmazható. Mivel az itt bemutatott szekvenciális stratégia egy olyan változatát valósítottuk (Ormos és Urbán, 2011 és Ormos, Urbán és Zoltán, 2009) meg az empirikus tesztek elvégzéséhez, amely napi kereskedést feltételez, ezért nem hanyagolhatjuk el a tranzakciók járulékos költségeinek figyelembe vételét. A kereskedési modellt kibővítjük egy proporcionális tranzakciós költség modellel. A dolgozat harmadik fontos eredménye a bevezetett logoptimális kereskedési modell teljesítményének egyensúlyi modellekkel való elemzése (Ormos és Urbán, 2011 és Ormos, Urbán és Zoltán, 2009). Mivel a szakirodalom korábban a logoptimális stratégiák teljesítményének a pénzügyekben használatos egyensúlyi modellekkel való vizsgálatát nem tárgyalta, eddig nem született válasz arra a kérdésre, hogy ezen stratégiák valóban képesek-e a kockázati szintjükön elvárt hozam feletti abnormális hozamot produkálni. A korábbi vizsgálatok egyszerű növekedés összehasonlító jellegűek voltak, a logoptimális stratégiák teljesítményét más eljárások által elért vagyonnal vetették össze. Munkáink nagy része ennek a hiányosságnak a pótlására született (Ormos és Urbán, 2011 és Ormos, Urbán és Zoltán, 2009). Az elemzést a pénzügyekben használt négy egyensúlyi modellel végeztem: CAPM modell (Treynor, 1962, Sharpe, 1964, Lintner, 1965, Mossin, 1966), Fama és French (Fama-French 1992,1993) által kidolgozott 3-faktor modellel, majd a CAPM-et és a 3-faktor modellt kiegészítettem a momentum faktorral is (lásd Carhart, 1997). Az elemzéshez a Dow Jones 30 indexet alkotó részvények adatait használtuk fel. Empirikus vizsgálataink eredményei alátámasztják, hogy az általunk javasolt módszerek képesek megtalálni és hatékonyan kiaknázni a részvényárak közötti rejtett és bonyolult összefüggéseket. A bemutatott eredmények alapján arra a következtetésre jutok, hogy az alkalmazott logoptimális stratégia többlet teljesítménye egyfajta piaci hatékonytalanságra vezethető vissza, mivel az alkalmazott magfüggvényes szakértők képesek voltak a tisztán véletlenszerű választásnál jobb, az egyensúlyi modellekkel mérhető pozitív abnormális hozamot eredményező választást javasolni.

2. A tradicionális modell és a többperiódusos modell összehasonlítása

A dolgozatban olyan hosszútávú befektetések piacát vizsgálom, ahol a kezdetben befektetett tőke, illetve annak hozamai minden befektetési periódus után újrabefektetésre kerülnek. Egy ilyen piac matematikai formalizálása során az egyszerűbb matematikai leírás miatt célszerűbb az eszközök relatív árváltozásait vizsgálni, mint az általában használt hozamokkal számolni. $\mathbf{x}_i$ relatív ár alatt annak a valószínűségi változónak a realizációját értjük, amely egy eszköz vagy portfólió értékében bekövetkező relatív érték változást írja le az i-edik kereskedési periódusban a következőképpen

$$\mathbf{x}_i = \frac{p_i}{p_{i-1}},$$

ahol p_i, illetve p_{i-1} az i-edik és $i-1$-edik napon megfigyelt árat jelöli. A relatív ár és a hozam között természetesen egyszerű összefüggés áll fenn:

$$\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{r}_i + 1,$$

ahol $\mathbf{r}_i$ jelöli az elért hozamrátát a $i-1$-edik és az i-edik periódus között. Mivel a két érték között csak egy konstans különbség van, a két érték kölcsönösen megfeleltethető egymásnak, ezért bizonyos esetekben, ahol ez nem okoz értelmezésbeli nehézséget, a tradicionális szakirodalomban használt várható hozam kifejezést használom a várható relatív ár helyett.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ az $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ véletlen valószínűségi változók realizációja. Amennyiben a relatív árak *független azonos eloszlású (FAE)* valószínűségi változók, az n befektetési periódus után elérhető W_n vagyonszint várható értéke

$$\mathbb{E}\{W_n\} = \mathbb{E}\{W_0 \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{X}_n\} = W_0 \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} = W_0 e^{n \ln \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\}}, \tag{1}$$

ahol W_0 a kezdeti befektetés értéke és a relatív árak függetlensége miatt minden i-re:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}_i\} = \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\}.$$

(1) alapján egy befektető azt gondolhatja, hogy egy olyan befektetés, amely maximális várható hozamot (és maximális várható relatív árváltozást) ígér, a legnagyobb vagyon növekedést fogja eredményezni számos, egymást követő perióduson keresztüli befektetés után. Továbbá, FAE piacokon, ahol a relítv árak várható értéke és varianciája létezik

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i\right) \to \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\}, \text{ ha } n \to \infty$$

és

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i\right\} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Azaz, egy befektetőnek, akinek lehetősége van vagyonát több perióduson keresztül befektetni, nagyobb esélye van arra, hogy befektetése által eredményezett relatív árak átlaga közelíti az elvárásait, mint annak aki pusztán csak egy perióduson keresztül fektet be. A nagy számok törvényének ezen értelmezése azt sugallhatja, hogy amennyiben a befektetési időtáv nagyon hosszú, a befektetőnek csak a várható hozamot szükséges figyelembe vennie, mivel a realizálódó átlagos hozam szórása a nullához tart a periódusok számának növekedésével, és az átlagos hozam közel egyező lesz várható értékével. Ez az értelmezés elfogadható amennyiben tradicionális megközelítés szerint invesztáló befektetőket feltételezünk, akik hasznosság függvénye csak a relatív árak várható értékén és varianciáján alapul. A fenti egyszerű logika ahhoz az érveléshez vezethet, hogy hosszútávon magas várható hozamot ígérő befektetéseket érdemes eszközölni, még abban az esetben is, ha nagyon kockázatosak, mivel a számos befektetési perióduson keresztül az átlagos hozam kockázata jelentősen csökkenthető. Megjegyezzük, hogy az átlagos relatív ár és hozam varianciája valóban csökken növekvő periódus szám mellett, viszont a várható vagyonszint varianciája növekszik.

A klasszikus várható hozam-variancia alapú megközelítés helyett, a dolgozatban egy másik módszer bevezetését javaslom a vagyonnövekedés ütemének mérésére, amely az előbbi megközelítéssel szemben pontosan képes meghatározni a vagyonnövekedés természetét. Egy többperiódusú befektetés által elért W_n vagyon a megelőző W_{n-1} vagyonszint és az aktuális relatív ár szorzata

$$W_n = \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{x}_1 \cdot W_0.$$

Átalakítás után felírhatjuk, hogy

$$W_n = W_0 \prod_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i = W_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \ln \mathbf{x}_i} = W_0 e^{n G_n}, \tag{2}$$

ahol G_n az n-edik periódusig megfigyelt átlagos növekedési rátát jelöli,

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbf{x}_i.$$

A (2)-es egyenletben a természetes alapú logaritmus függvényt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\ln \left(\frac{W_n}{W_0} \right)^{1/n} = G_n,$$

amely azt jelenti, hogy a W_n vagyonszint és a G_n átlagos növekedési ráta maximalizálása ekvivalens. Továbbá, amennyiben az $\mathbf{x}_i$ relatív árak FAE-uak, $\ln \mathbf{x}_i$ loghozamok szintén azok és a nagy számok törvényét a következő formában ismét alkalmazhatjuk:

$$G_n \to \mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}, \text{ ha } n \to \infty, \tag{3}$$

ahol $\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}$ az ún. várható növekedési ráta, vagy egyszerűen várható loghozam. Amennyiben a befektetési periódusok száma, n, nagy, az átlagos növekedési ráta használatával jól megragadhatjuk W_n tipikus értékeit, mivel

$$W_n \approx W_0 e^{n\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}}$$

(2) és (3) alapján. Az értékezésben az általánosság korlátozása nélkül $W_0 = 1$ kezdeti befektetést feltételezek.

2.1. A hosszútávú növekedés követelményei

Ha egy befektető pozitív növekedést szeretne elérni, olyan befektetéseket kell eszközölnie, amelyeknél $\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}$ értéke nagyobb mint nulla. Mivel a tipikus relatív árak az 1 érték körül helyezkednek el (0%-os hozam), Györfi, Urbán és Vajda (2007) a logaritmus függvény következő közelítését javasolta az alkalmazások során:

$$\ln z \approx h(z) = z - 1 - \frac{1}{2}(z-1)^2, \tag{4}$$

amely a másodrendű Taylor-sor a $z = 1$ pont körül. A $\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}$ érték kiszámításához az alábbi közelítést használtam:

$$\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\} \approx \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1 - 1\} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{(\mathbf{X}_1 - 1)^2\right\}. \tag{5}$$

Györfi, Urbán és Vajda (2007) modelljében, Ottucsák és Vajda (2006,2007) a variancia következő azonosságának használatát javasolta:

$$\mathbf{Var}\{s\} = \mathbb{E}\{s^2\} - \mathbb{E}^2\{s\}.$$

Ezek alapján vezettem le a pozitív növekedés eléréséhez szükséges feltételünket (Ormos és Urbán, 2010):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\} &\approx 2\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\mathbf{X}_1^2\right\} - \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\mathbb{E}^2\{\mathbf{X}_1\} + 2\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left\{\mathbf{X}_1^2\right\} - \mathbb{E}^2\{\mathbf{X}_1\}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\mathbb{E}^2\{\mathbf{X}_1\} + 2\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{Var}\{\mathbf{X}_1\}\right) \\
&> 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

ahol az összefüggés érvényességének feltétele: $0 < \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} < 2$.

Ezek alapján a következő állítást fogalmaztam meg (Ormos és Urbán, 2010):

1. **A többperiódusú vagyonnövekedés feltétele a Markowitz-féle egyperiódusú modell paramétereit felhasználva, olyan befektetések létrehozása, amelyekre fennáll, hogy**

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} > 2 - \sqrt{1 - \mathbf{Var}\{\mathbf{X}_1\}}$$

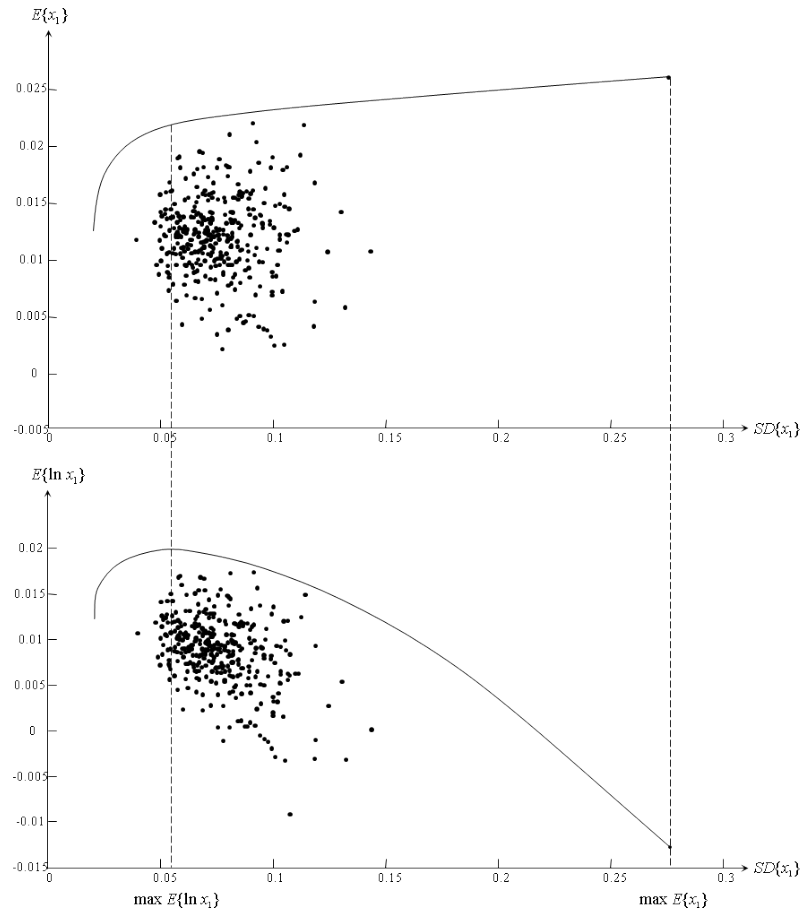
ahol az összefüggés érvényességének feltétele:

$$2 > \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} \text{ és } 1 > \mathbf{Var}\{\mathbf{X}_1\}.$$

Tehát amennyiben egy befektetés esetén a várható hozam növekedése nem múlja felül megfelelő mértékben a kockázat növekményét, a befektető nem számíthat a vagyona hosszútávú növekedésére.

2.2. Növekedés-optimális befektetések

A többperiódusban racionális portfólió választási probléma megoldásához empirikus vizsgálatot végeztem. Az elemzéshez az S&P 500 index 1970 és 2008 közötti komponenseinek hozamadatait használtuk fel (lásd Ormos és Urbán, 2010). Az 1. ábrán az index komponenseiből álló adatbázis hozamadatait használva illusztrálom két panelen, a $\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\}$ várható relatív ár és a $\mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}$ várható növekedési ráta alakulását a szórás függvényében. A befektetési lehetőségek várható hozamai és növekedési rátái a folytonos görbén, illetve a görbe alatt helyezkednek el. A $\max \mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\}$-t jelölő szagatott egyenes jelöli a historikusan legnagyobb növekedési ütemű portfóliót, amely a vizsgált időszakban a legnagyobb vagyonszintet eredményezte a befektetőnek. Az ettől jobbra elhelyezkedő befektetési lehetőségek esetén a kockázat növekedését nem kompenzálja magasabb növekedési ráta, ezért ezek a befektetési lehetőségek a magasabb kockázat ellenére, a vizsgált 20 éves periódusban kevesebb végső vagyonszintet eredményeztek, mint bizonyos kisebb kockázatú befektetések, annak ellenére, hogy a piac a magasabb kockázatot magasabb $\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\}$ várható hozammal kompenzálta. Tehát hosszútávú befektetés esetén, előfordulhat, hogy a befektető nem lesz kompenzálva a magasabb kockázatvállalásért. Az általunk bevezetett várható növekedési ütem-variancia rendszerben –mivel (6) egy konkáv, másodfokú függvény– a növekedési ütemnek egy jól definiált maximuma van, amely hosszútávú befektetés esetén a növekedés-optimális választással egyezik meg. Az optimális szintnél magasabb kockázat vállalásáért a befektetőt nem kompenzálja a piac.



1. ábra. A várható hozam-kockázat és növekedési ráta rendszerben hatékony portfóliók elhelyezkedése.

Az eredmény összefoglalására a következő állítást fogalmazom meg (Ormos és Urbán, 2010):

2. **A Markowitz-féle portfólió modell a befektetések egyperiódusú leírására alkalmas. Több periódus esetén a növekedési ütemnek egy jól definiált maximuma van. A maximumot ígérő portfólión kívül, az egy periódusban hatékony portfóliók nem racionális választások egy növekedés-optimalizáló befektető számára. Az optimális stratégia által tartott befektetés relatív ára, mint valószínűségi változó, a többperiódusú vagyon-maximalizálásra törekvő megközelítésében a következő összefüggéssel adható meg:**

$$\arg\max_{\mathbf{X}_1} \mathbb{E}\{\ln \mathbf{X}_1\} \approx \arg\max_{\mathbf{X}_1} -\frac{1}{2}\mathbb{E}^2\{\mathbf{X}_1\} + 2\mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{Var}\{\mathbf{X}_1\}\right)$$

ahol

$$2 > \mathbb{E}\{\mathbf{X}_1\} \text{ és } 1 > \mathbf{Var}\{\mathbf{X}_1\}$$

a közelítő kifejezés 1. tézisben meghatározott érvényességi tartománya.

3. Szekvenciális befektetési stratégiák

A dolgozat második felében a hosszútávú növekedés elvén alapuló szekvenciális befektetési (portfólióválasztási) stratégiákat mutatok be. Célom, hogy Györfi, Lugosi és Udina (2007) és Györfi, Urbán és Vajda (2007) alapján egy olyan saját kereskedési modellt és algoritmust hozzak létre, amely a következő fejezetben ismertetett költségmodellel kiegészítve lehetővé teszi számunkra, hogy választ kaphassunk arra a szakirodalom által korábban nem tárgyalt kérdésre, hogy a logoptimális stratégiák a klasszikus egyensúlyi modellek szerint is képesek-e az egyensúlyi szint feletti, többlethozam elérésére.

3.1. Logoptimális portfólióstratégiák

A dolgozatban vizsgált részvénypiaci modellt alkalmazta többek között Breiman (1961), Algoet és Cover (1988), Cover (1991), Gerencsér, Rásonyi, Szepesvári és Vágó (2005), Györfi, Lugosi és Udina (2007), Györfi, Urbán és Vajda (2007), Györfi, Udina és Walk (2008), Urbán és Ormos (2010) és Ormos és Urbán (2011). Tegyük fel, hogy a piacon d darab részvény van, és a tőkénket minden nap elején szabadon újraoszthatjuk a részvények között. Jelölje $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots x^{(d)}) \in \mathbb{R}_+{}^d$ a hozamvektort, amelynek j-edik komponense, $x^{(j)} > 0$, a j-edik részvény záró árainak arányát fejezi ki az adott nap és az azt követő nap között. Más szóval, $x^{(j)}$ azt mutatja meg, hogy az adott nap végén a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér a következő nap végén. $x^{(j)}$ tehát egy 1-hez közeli szám.

A befektető minden egyes kereskedési periódus elején diverzifikálja a tőkéjét egy $\mathbf{b} = (b^{(1)}, \dots b^{(d)})$ portfólióvektor szerint. A $\mathbf{b}$ j-edik komponense $b^{(j)}$, azt mondja meg, hogy a befektető a j-edik részvénybe tőkéjének mekkora hányadát fekteti be. A dolgozatban feltesszük, hogy $\mathbf{b}$ portfólióvektor nem negatív komponensekből áll, amelyeknek az összege 1, azaz, $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a befektetési stratégia önfinanszírozó, az előbbi pedig a rövidre eladási (short sale) üzleteket zárja ki. Jelölje S_0 a befektető kezdeti tőkéjét, ekkor a tőkéje egy nap múlva

$$S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x^{(j)} = S_0 \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{x} \rangle\,,$$

ahol $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ a skalárszorzatot jelöli.

A piac időbeli alakulását $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \in \mathbb{R}_+{}^d$ hozamvektor-sorozatával jellemezhetjük. $\mathbf{x}_i$ hozamvektor j-edik komponense $x_i^{(j)}$, azt mondja meg, hogy az i-edik napi kereskedési periódus előtt a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér az i-edik nap végén. Minden $j \leqslant i$ esetén az $\mathbf{x}_j^i$ rövidítést használjuk a hozamvektorok $(\mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_i)$ sorozatára, és jelölje Δ_d az összes $\mathbf{b} \in {\mathbb{R}_+}^d$ nemnegatív komponensű vektor szimplexét, amely komponenseinek az összege 1. Egy $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots\}$ befektetési stratégia függvények egy sorozata

$$\mathbf{b}_i : \left({\mathbb{R}_+}^d\right)^{i-1} \to \Delta_d , \qquad i = 1,2,\ldots$$

úgy, hogy $\mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1})$ jelöli a befektető által az i-edik napra a piac korábbi viselkedése alapján választott portfólióvektort. Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben a következő jelölést használjuk $\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) = \mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1})$.

Az S_0 kezdeti tőkéből kiindulva, n-edik nap végén a $\mathbf{B}$ befektetési stratégia tőkéje

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) , \mathbf{x}_i \right\rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) , \mathbf{x}_i \right\rangle} = S_0 e^{n W_n(\mathbf{B})},$$

ahol $W_n(\mathbf{B})$ a növekedési ráta (kamatszinten vett átlagos hozam):

$$W_n(\mathbf{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) , \mathbf{x}_i \right\rangle .$$

Nyilvánvalóan, $S_n = S_n(\mathbf{B})$ maximalizálása ekvivalens $W_n(\mathbf{B})$ maximalizálásával.

Feltételek. Ahhoz, hogy a dolgozatban ismertetett elemzések elvégezhetőek legyenek a következő egyszerűsítő feltételeket használjuk a logoptimális portfólióelméletben:

- a részvények között a tőke bármilyen arányban szétosztható,
- a részvényekből korlátlan mennyiség áll a rendelkezésre az aktuális (napi záró) árfolyamon, azaz tetszőlegesen kevés vagy sok részvényt tudunk venni vagy eladni azonos áron,
- nincs tranzakciós költség és
- a befektető tranzakciói nincsenek hatással a piaci árakra.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ az $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ véletlen valószínűségi változók realizációja, amelyek egy vektorértékű stacionárius és ergodikus folyamatot $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ alkotnak.

Logoptimális portfólió. Algoet és Cover (1988) rámutattak, hogy az úgynevezett *logoptimális portfólió* $\mathbf{B}^* = \{\mathbf{b}^*(\cdot)\}$ a legjobb választás. Az n-edik kereskedési periódusban jelölje $\mathbf{b}^*(\cdot)$ a logoptimális portfóliót:

$$\mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \underset{\mathbf{b}(\cdot)}{\arg\max}\, \mathbb{E} \left\{ \log \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1}) , \mathbf{X}_n \right\rangle \middle| \mathbf{X}_1^{n-1} \right\} . \tag{7}$$

Ha általános esetben $S_n^* = S_n(\mathbf{B}^*)$ jelöli a $\mathbf{B}^*$ logoptimális portfólióstratégiával elért tőkét n nap után, akkor minden tetszőleges $\mathbf{B}$ befektetési stratégia által elért $S_n = S_n(\mathbf{B})$ vagyonra és $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tetszőleges stacionárius és ergodikus folyamat esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \leqslant 0 \quad \text{1 valószínűséggel}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n^* = W^* \quad \text{1 valószínűséggel,}$$

ahol

$$W^* = \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_{-\infty}^{-1}), \mathbf{X}_0\right\rangle\right\}$$

a lehetséges befektetési stratégiák által elérhető maximális növekedési ráta. Vagyis (1 valószínűséggel) egyetlen befektetési stratégia sem képes W^*-nál nagyobb növekedési ráta elérésére.

3.2. A semi-logoptimális portfólióstratégia

A $\mathbf{b}^*$ meghatározásához az $\mathbf{X}_n$-nek az $\mathbf{X}_1^{n-1}$ szerinti feltételes eloszlásának ismerete szükséges. Ezzel szemben a Markowitz-féle klasszikus várható hozam-kockázat alapú megközelítés szerint az optimális $\mathbf{b}$ portfólió $\mathbb{E}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}$ várható hozam és $\mathbf{Var}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}$ kockázat alapján kerül meghatározásra, csupán $\mathbf{X}_n$ első és második momentumának felhasználásával (Francis, 1980), azaz $\mathbb{E}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}$ maximalizálására törekszik $\mathbf{Var}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}$ minél kisebb szinten tartása mellett.

Az értekezésben egy olyan Györfi, Urbán és Vajda (2007) által bevezetett új portfólióválasztási elvet mutatok be, amely csak a feltételes első és második momentumok ismeretére épít, és közel optimális teljesítménnyel (maximális növekedési ráta) bír. Vegyük ismét az ln függvény (4) szerinti $z = 1$ pontban vett másodrendű Taylor-sorfejtését. Ha a logaritmus függvény helyett közelítését használjuk, akkor

$$\mathbb{E}\left\{\ln\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \middle| \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} \approx$$
$$\approx \mathbb{E}\left\{\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle - 1 \middle| \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle - 1\right)^2 \middle| \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} .$$

Semi-logoptimális portfólió. Ezek után a semi-logoptimális portfólió választás a következőképpen történik:

$$\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{h\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n\right\rangle\right) \middle| \mathbf{X}_1^{n-1}\right\}, \tag{8}$$

ahol $h(z)$ logarimtus függvény közelítése (4) alapján.

A $\bar{\mathbf{B}} = \{\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \ldots\}$ *semi-logoptimális befektetési stratégia* függvények egy sorozata, ahol $\bar{\mathbf{b}}_n = \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1})$. A semi-logoptimális portfólió-stratégia teljesítményével kapcsolatban Vajda (2006) bebizonyította $\bar{S}_n = S_n(\bar{\mathbf{B}})$-re, hogy ha

$$0{,}5 \leqslant X^{(j)} \text{ és } \mathbb{E}\{|X^{(j)} - 1|^3\} < \infty,$$

akkor

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \bar{S}_n \geqslant W^* - \frac{5}{6}\mathbb{E}\{\max_m |X^{(m)} - 1|^3\} \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Vagyis a semi-logoptimális stratégia teljesítménye alig rosszabb mint a logoptimális stratégiáé, ha a harmadik momentumok elhanyagolhatók.

3.3. Empirikus becslés szakértőkkel

Az értekezésben olyan módszereket ismertetek, amelyek a feltételes eloszlás empirikus becslését alkalmazzák. A stratégiához definiáljuk a szakértők[1] egy végtelen osztályát $\mathbf{H}^{(k,\ell)} = \{\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ pozitív egészek. Minden fix k, ℓ pozitív egészhez válasszunk egy sugarat, amire igaz $r_{k,\ell} > 0$ úgy, hogy minden fix k-ra[2]

$$\lim_{\ell\to\infty} r_{k,\ell} = 0.$$

Ekkor minden $n > k+1$ esetén definiáljuk $\mathbf{h}^{(k,\ell)}$ szakértőt a következőképpen. Legyen J_n az illeszkedések helyét tartalmazó halmaz:

$$J_n = \left\{k < i < n : \|\mathbf{x}_{i-k}^{i-1} - \mathbf{x}_{n-k}^{n-1}\| \leqslant r_{k,\ell}\right\},$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi normát jelöli.

Magfüggvény alapú logoptimális stratégia. A fentiek alapján egy $\mathbf{h}^{(k,\ell)}$ szakértő által meghatározott magfüggvényes logoptimális portfólió az n-edik befektetési napra legyen[3]

$$\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}\in\Delta_d} \sum_{\{i\in J_n\}} \ln \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{x}_i \rangle\ , \tag{9}$$

ha a szumma nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $\mathbf{b}_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót.

[1] Szakértőknek az elemi stratégiákat nevezzük. A magfüggvény alapú stratégiát a szakértők kombinálásával kapjuk.

[2] Ez a feltétel a matematikai bizonyításhoz szükséges. Részletesen lásd Györfi, Lugosi és Udina, 2006

[3] A magfüggvény alapú módszerrel meghatározott portfóliókat a megkülönböztethetőség érdekében **b** helyett **h** betűvel jelöljük.

Szakértők kombinálása. Mivel előre nem tudhatjuk, hogy melyik (k,ℓ) pár fog optimális $r_{k,\ell}$ sugarat meghatározni[4], vagyis a hasonlónak tekintett hozamvektorok egy ideális halmazát felhasználni, a szakértők között szét kell osztanunk a rendelkezésre álló vagyonunkat. A magfüggvény alapú stratégiát a $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$-beli szakértők kombinálásával kapjuk, felhasználva egy $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűségi eloszlást, amely minden pozitív egész (k,ℓ) halmazán értelmezett úgy, hogy k,ℓ, $q_{k,\ell} > 0$. Ha $S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)})$ a $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ elemi stratégiák által összegyűjtött tőke n periódus után és a kezdeti tőke $S_0 = 1$, az n-edik nap utáni vagyont a szakértők egyszerű súlyozásával a következőképpen kapjuk:

$$S_n(\mathbf{B}) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}) \,. \tag{10}$$

3.4. Logoptimális stratégiák tranzakciós költséggel

A kezdeti modell felépítésekor azon feltevéssel éltem, hogy az értékpapír-kereskedés során nincsen tranzakciós költség. Ez a feltételezés azonban ellentmond a valós kereskedés általános feltételeinek, mivel a brókerdíjak és a szabályozott kereskedés folytonossága érdekében felszámított jutalékok járulékos költségekkel terhelik meg a tőzsdei ügyleteket. Ahhoz, hogy a logoptimális stratégiák empirikus eredményei összevethetőek legyenek a korábban ismertetett módszerek eredményeivel, a tranzakciós költségek figyelembe vétele elkerülhetetlen. Mivel a logoptimális stratégiák a portfóliót gyakran változtathatják, a kereskedés járulékos költségei az eredményeket nagyságrendekkel csökkenthetik. A dolgozatban a forgalomarányos tranzakciós költség logoptimális modellekbe építésének lehetőségét mutattam be Schäfer (2002) alapján azzal a feltevéssel, hogy nincs fix költségtényező. Ezek alapján módosítottam alapfeltevéseimet a költségek szempontjából:

- van forgalomarányos tranzakciós költség, nincs fix költségtényező.

Mivel a kereskedés jelen esetben járulékos költségeket von maga után, a befektető a forgalom arányában tranzakciós költséget fizet, ezért az $(n+1)$-edik periódus előtt a $\mathbf{b}_{n+1}$ portfólió szerint átrendezett nettó N_n vagyona nem nagyobb mint az átrendezés előtti bruttó S_n. Mivel az n-edik befektetési nap elején a kezdőtőke N_{n-1}, ezért a fenti jelöléseket használva, a bruttó S_n vagyon ekkor az n-edik kereskedési nap végén

$$S_n = N_{n-1} \langle \mathbf{b}_n \,, \mathbf{x}_n \rangle \,. \tag{11}$$

Jelölje w_n a következő arányt:

$$w_n = \frac{N_n}{S_n}.$$

Ekkor

$$\frac{2c}{1+c} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{b_n^{(j)} x_n^{(j)}}{\langle \mathbf{b}_n \,, \mathbf{x}_n \rangle} - b_{n+1}^{(j)} w_n \right)^{+} = 1 - w_n, \tag{12}$$

[4]Optimalitás alatt azt értve, hogy az adott sugarat választó szakértő olyan portfóliókat választ, hogy a befektetés által elért vagyon maximális.

és
$$\frac{1-c}{1+c} \leqslant w_n \leqslant 1,$$
ahol c a költségtényező értéke (0 és 1 között).

Vagyongyarapodás tranzakciós költséggel. Amennyiben a kezdőtőkénk $S_0 = 1$ és $w_0 = 1$, az n-edik kereskedési nap végére elért S_n vagyon mértéke a következőképpen számolható:
$$S_n = N_{n-1} \langle \mathbf{b}_n \, , \, \mathbf{x}_n \rangle = w_{n-1} S_{n-1} \langle \mathbf{b}_n \, , \, \mathbf{x}_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} [w(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}) \langle \mathbf{b}_i \, , \, \mathbf{x}_i \rangle],$$
azaz a tranzakciós költségek levonása az aktuális S bruttó vagyon w költségtényezőkkel való szorzását jelenti. Az átlagos növekedési ráta tranzakciós költség figyelembevételével jelen esetben
$$W_{n,c>0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n} \ln S_n \, .$$
A befektető célja e ráta maximalizálása. A 3.1. alfejezetben bemutattuk, hogy tranzakciós költség nélkül a befektető a korábbi hozamvektorok függvényében miként próbálhatja meg maximalizálni a növekedési rátát. Amennyiben nincs tranzakciós költség a befektető a
$$W_{n,c=0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) \, , \, \mathbf{x}_i \right\rangle$$
kifejezést igyekszik maximalizálni, ahol $\mathbf{B}$ egy olyan piacon alkalmazott befektetési stratégia, ahol nincsennek a kereskedésnek járulékos költségei. Ennek analógiájára egy olyan befektetési stratégia W_n növekedési rátáját amelyben a portfólióvektorokat szintén a piac korábbi viselkedése alapján határozzuk meg és létezik tranzakciós költség
$$W_{n,c>0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\{w(\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-2}), \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_{i-1}) \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) \, , \, \mathbf{x}_i \right\rangle\}$$
módon írhatjuk fel.

Vezessük be az alábbi jelölést:
$$g(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i) = \ln(w(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}) \langle \mathbf{b}_i \, , \, \mathbf{x}_i \rangle).$$
Ezek alapján a növekedési ráta értéke
$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln S_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(w(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}) \langle \mathbf{b}_i \, , \, \mathbf{x}_i \rangle) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i). \end{aligned} \tag{13}$$
Költségek mellett a célunk ezen érték maximalizálása.

4. Egyensúlyi modellezés

A fejezetben azt a feltételezést vizsgálom, hogy az előzőleg bemutatott empirikus stratégia képes-e a főbb egyensúlyi modellek szerint szignifikáns, pozitív abnormális hozamot elérni a vizsgált periódusban (lásd Ormos és Urbán, 2011 és Ormos, Urbán és Zoltán, 2009). Az elemzéshez a korábbi mérésektől eltérően nem a klasszikus benchmark adatbázist használtam, hanem egy újabb és a pénzügyi szakirodalomban elfogadott adatsort, a Dow Jones Industrial Average (Dow Jones 30) indexet alkotó részvények adatait. Az elemzéshez négy egyensúlyi modellt használtam: a CAPM modellt (lásd Treynor, 1962, Sharpe, 1964, Lintner, 1965, Mossin, 1966), a Fama és French (1992,1993) által kidolgozott 3-faktor modellelt, majd a CAPM-et és a 3-faktor modellt kiegészítettem a momentum faktorral is (lásd Carhart, 1997), de ez sem nyújtott kielégítő magyarázatot a mért abnormális pozitív hozamokra. A teszteredmények alátámasztják, hogy a javasolt módszerek képesek megtalálni és hatékonyan kiaknázni a részvényárak közötti rejtett és bonyolult összefüggéseket.

A logoptimális portfólió-stratégia teljesítményének értékelését az egyensúlyi modellezésen túl kibővítettem, és megvizsgáltam egy passzív, buy-and-hold stratégia teljesítményét is, amely ugyanazokból a részvényekből alkotja meg a portfólióját, amelyekre a logoptimális stratégia is épül. Az előbbi stratégia előnye, hogy mivel a portfólión a vizsgálat közben nem hajt végre újrasúlyozást, nem emészt fel tranzakciós költségeket.

4.1. Módszertan

A bemutatott logoptimális módszer empirikus tesztelésére a Dow Jones Ipari Átlag (Dow Jones Industrial Average, DJIA) komponenseinek hozamadatait használtam fel egy 15 év hosszú időintervallum figyelembevételével. Az elemzésbe bevont részvények 1991 január és 2008 december között alkották az Ipari Átlagot, míg a vizsgálati intervallum 1991 januárjától 2005 decemberéig tart. Az elemzéseket három adathalmazon végeztem el: (i) a DJIA indexet 2005 decemberében alkotó részvények halmazán; (ii) az indexet 1991 januárjában alkotó részvények halmazán, valamint (iii) mindig az index aktuális komponenseit tartalmazó részvényhalmazon. A vizsgálat úgy lett felépítve, hogy a logoptimális portfólió, illetve a passzívan kezelt benchmark portfólió mindig az adott részvényhalmaz hozamadatait használja, azaz minden halmaznak megfeleltethető egy logoptimális, illetve egy passzív portfólió is. Ennek értelmében az egyensúlyi modellezés is három részre oszlik. Jelen tézis füzetben a (iii). vizsgálat eredményeit foglaltam össze.

A hozamadatok a CRSP (The Center for Research in Security Prices) adatbázisból[5] kerültek kinyerésre. Az egyensúlyi modellezéshez szükséges kockázat mentes hozamrátát az 1 hónapos lejáratú amerikai kincstárjegy (U.S. Treasury bill) hozamaként mérjük, és szintén a CRSP adatbázisból töltjük le. A piaci portfólió értékének mérésére a CRSP adatbázisában elérhető piaci kapitalizációval súlyozott, osztalékkal korrigált

[5] *http://www.crsp.com*

hozamindexet (VWRETD)[6] alkalmazzuk, amely a New York Stock Exchange (NYSE), American Stock Exchange (AMEX) és NASDAQ részvények hozamai alapján kerül meghatározásra. A tranzakciós költséget $c = 0.1\%$-ban állapítottuk meg.

4.2. Egyensúlyi modellek

Az egyensúlyi modellek meghatározásához a szakirodalom által általánosan elfogadott kockázati tényezőket alkalmaztam. Felépítésre került egy klasszikus CAPM modell, egy Fama-French féle 3-faktor modell (Fama és French, 1993), egy momentum faktorral kiegészített CAPM és egy Carhart által bevezetett 4-faktor modell (Carhart, 1997). A logoptimális stratégia kockázati prémiumát ezek alapján a következő módokon becsültem:

$$r_l^t - r_f^t = \alpha_l + \beta_l(r_m^t - r_f^t) + \varepsilon_l^t \tag{14}$$

$$r_l^t - r_f^t = \alpha_l + \beta_l(r_m^t - r_f^t) + mom_l MOM^t + \varepsilon_l^t \tag{15}$$

$$r_l^t - r_f^t = \alpha_l + \beta_l(r_m^t - r_f^t) + s_l SMB^t + h_l HML^t + \varepsilon_l^t \tag{16}$$

$$r_l^t - r_f^t = \alpha_l + \beta_l(r_m^t - r_f^t) + s_l SMB^t + h_l HML^t + mom_l MOM^t + \varepsilon_l^t, \tag{17}$$

ahol t index az időt, r_f pedig a kockázatmentes kamatlábat jelöli, $(r_m^t - r_f^t)$ a piaci kockázati prémium, ε becslési hibatag. SMB a kis és nagy piaci kapitalizációjú vállalatok részvényeinek átlagos hozamkülönbségét, HML a magas és alacsony könyv szerinti érték/piaci érték aránnyal bíró vállalatok részvényeinek átlagos hozamkülönbségét, MOM pedig a momentum faktort jelöli. A momentum faktor a részvény hozamok magyarázatánál azt az empirikus megfigyelést használja fel, hogy a közelmúltban a piaci átlag fölött teljesítő részvények nagyobb valószínűséggel teljesítenek a következő időszakban is az átlag felett (lásd Jegadeesh és Titman, 1993, Carhart, 1997). Az α, β, s, h és mom a faktorokhoz tartozó elméleti együtthatók, amelyek többváltozós lineáris regressziós modellel kerülnek becslésre (14), (15), (16) és (17) alapján a *legkisebb négyzetek módszerével*. Ha a tőkepiac hatékony és a modell jó leíró képességű, feltehető az $\alpha = 0$ feltétel minden értékpapír, illetve befektetés esetén. Amennyiben ez nem teljesül, a felderített anomáliát kihasználva lehetőség nyílik abnormális hozam realizálására. A 4 kockázati faktor értékei Kenneth French adatbázisából[7] származnak és transzformáció nélkül kerültek felhasználásra.

4.3. Empirikus eredmények

Az itt bemutatott stratégia az Ipari Átlagot aktuálisan alkotó részvényekből összeállított portfólióba fektet. Ezek alapján jelen esetben a passzívan kezelt portfólió sem egy klasszikus értelemben vett buy-and-hold stratégiát követ, mivel ez a portfólió is

[6] value weighted return including distributions

[7] *http ://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html*

újrasúlyozásra kerül valahányszor a komponensek halmaza megváltozik. A regresszió-analízis eredményeit az 1. táblázatban foglaltam össze. Nagy jelentőségű az a tény, hogy a 3-faktor modell kivételével minden esetben szignifikáns, pozitív $\widehat{\alpha}$-ákat mértem[8], míg a passzív stratégia esetén sehol sem tér el szignifikánsan a nulla értéktől. Fontos megjegyezni, hogy a legmagasabb R^2 értékeket itt mérem, amire magyarázatként szolgál, hogy a portfóliók mindig az adott időszakban legfontosabbnak tartott[9] részvényekből épülnek fel. A $\widehat{\beta}$ együtthatók magasabbak a logoptimális stratégia esetén, amely hatás tükröződik a hozamok magasabb szórásértékében is. A többi portfólióval ellentétben, a $\widehat{h}$ együtthatók nem negatívak a logoptimális stratégia esetén, míg szignifikánsan pozitívak a passzív stratégiára. Mind a logoptimális, mind a passzív stratégia esetén negatív kitettséget mérek a momentum faktorral szemben, bár a legnagyobb magyarázó erővel bíró 4-faktor modellben $\widehat{m}$ nem szignifikáns a logoptimális portfólióra mérve.

								CAPM					
	Logopt	**Passzív**		$\widehat{\alpha}_L$	$\widehat{\alpha}_P$	$\widehat{\beta}_L$	$\widehat{\beta}_P$	$\widehat{s}_L$	$\widehat{s}_P$	$\widehat{h}_L$	$\widehat{h}_P$	$\widehat{m}_L$	$\widehat{m}_P$
$\mathbf{R^2}$	0,62	0,78	**Koeff**	0,53	0,03	1,12	0,93						
F-stat	287,6	622,3	**t-stat**	1,92	0,16	16,96	24,95						
p-val	0,00	0,00	**p-val**	0,06	0,87	0,00	0,00						
kor. $\mathbf{R^2}$	0,62	0,78											
								CAPM+Mom					
	Logopt	**Passzív**		$\widehat{\alpha}_L$	$\widehat{\alpha}_P$	$\widehat{\beta}_L$	$\widehat{\beta}_P$	$\widehat{s}_L$	$\widehat{s}_P$	$\widehat{h}_L$	$\widehat{h}_P$	$\widehat{m}_L$	$\widehat{m}_P$
$\mathbf{R^2}$	0,63	0,81	**Koeff**	0,68	0,19	1,09	0,89					-0,14	-0,16
F-stat	151,6	376,7	**t-stat**	2,43	1,28	16,50	25,50					-2,57	-5,48
p-val	0,00	0,00	**p-val**	0,02	0,20	0,00	0,00					0,01	0,00
kor. $\mathbf{R^2}$	0,63	0,81											
								3-faktor modell					
	Logopt	**Passzív**		$\widehat{\alpha}_L$	$\widehat{\alpha}_P$	$\widehat{\beta}_L$	$\widehat{\beta}_P$	$\widehat{s}_L$	$\widehat{s}_P$	$\widehat{h}_L$	$\widehat{h}_P$	$\widehat{m}_L$	$\widehat{m}_P$
$\mathbf{R^2}$	0,65	0,85	**Koeff**	0,47	-0,14	1,22	1,07	-0,21	-0,17	0,13	0,26		
F-stat	108,3	341,0	**t-stat**	1,67	-1,06	16,35	30,14	-2,72	-4,57	1,37	5,50		
p-val	0,00	0,00	**p-val**	0,10	0,29	0,00	0,00	0,01	0,00	0,17	0,00		
kor. $\mathbf{R^2}$	0,64	0,85											
								4-faktor modell					
	Logopt	**Passzív**		$\widehat{\alpha}_L$	$\widehat{\alpha}_P$	$\widehat{\beta}_L$	$\widehat{\beta}_P$	$\widehat{s}_L$	$\widehat{s}_P$	$\widehat{h}_L$	$\widehat{h}_P$	$\widehat{m}_L$	$\widehat{m}_P$
$\mathbf{R^2}$	0,66	0,87	**Koeff**	0,58	-0,01	1,18	1,03	-0,19	-0,15	0,11	0,23	-0,10	-0,11
F-stat	83,19	289,06	**t-stat**	2,05	-0,10	15,56	29,80	-2,48	-4,21	1,17	5,29	-1,84	-4,52
p-val	0,00	0,00	**p-val**	0,04	0,92	0,00	0,00	0,01	0,00	0,24	0,00	0,07	0,00
kor. $\mathbf{R^2}$	0,65	0,87											

Logopt				**Passzív**			
Átl. havi prém.	1,14%	**Szórás**	5,93%	**Átl. havi prém.**	0,87%	**Szórás**	4,35%
Átl. éves prém.	13,68%	**Szórás**	22,69%	**Átl. éves prém.**	10,44%	**Szórás**	16,24%

1. táblázat. Regressziós együtthatók a Dow Jones Ipari Átlag aktuálisan változó komponenseiből létrehozott portfóliók esetén.

[8] Az $\widehat{\alpha}$ együttható $0{,}1$-es szinten a 3-faktor modell esetén is szignifikáns.

[9] A Dow Jones szerint.

Az ismertetett saját kereskedési modell és algoritmus, valamint a Dow Jones Ipari Átlag alapján alkotott portfóliók vizsgálatához kapcsolodó új eredményem: az $\widehat{\alpha}$ együtthatók vizsgált periódusban mért szignifikáns pozitív értékei nyomán a következő állítást fogalmazom meg (Ormos, Urbán és Zoltán, 2009, Ormos és Urbán, 2011):

3. **A logoptimális megközelítésen alapuló, proporcionális tranzakciós költségekkel kibővített aktív stratégia szignifikáns, pozitív, abnormális hozamokat ígér az empirikus vizsgálatok alapján.**

Azaz, a logoptimális portfóliók már pénzügyi értelmeben igazolva is extrahozam elérésére képesek.

5. Hivatkozások

Hivatkozások

[1] P. Algoet és T. Cover, Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investments, *Annals of Probability*, **16** (1988) 876–898.

[2] L. Breiman, Optimal gambling systems for favorable games, In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, University of California Press (1961) 65–78.

[3] M. M. Carhart, On Persistence in Mutual Fund Performance, *The Journal of Finance*, **52** (1991) 1:57–82.

[4] E. F. Fama és K. R. French, The cross-section of expected stock returns, *The Journal of Finance*, **47** (1992) 427–465.

[5] E. F. Fama és K. R. French, Common risk factors in the returns on stocks and bonds, *Journal of Financial Economics*, **33** (1993) 1:3–56.

[6] E. F. Fama és K. R. French, The CAPM is Wanted, Dead or Alive, *The Journal of Finance*, **51** (1996) 1947–1958.

[7] J. C. Francis, *Investments – Analysis and Management*. (McGraw-Hill, New York, 1980).

[8] L. Gerencsér, M. Rásonyi, Cs. Szepesvári és Zs. Vágó, Log-optimal currency portfolios and control Lyapunov exponents, Proceedings of the 44th IEEE conference on decision and control, and the European control conference 2005, Seville, 1764–1769. (2005).

[9] L. Györfi, G. Lugosi és F. Udina, Nonparametric kernel-based sequential investment strategies, *Mathematical Finance*, **16** (2006) 337–357.

[10] L. Györfi, Gy. Ottucsák és A. Urbán, Empirical log-optimal portfolio selections: a survey, *In Machine Learning Summer School 2007, MLSS 2007* (2007).

[11] L. Györfi, F. Udina és H. Walk, Nonparametric nearest neighbor based empirical portfolio selection strategies, *Statistics & Decisions*, **26** (2008) 145–157.

[12] L. Györfi, A. Urbán és I. Vajda, Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **10** (2007) 505–516.

[13] N. Jegadeesh és S. Titman, Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency, *The Journal of Finance*, **48** (1993) 1:65–91.

[14] J. Kelly, A new interpretation of information rate, *Bell System Technical Journal*, **35** (1956) 917–924.

[15] H. Latané, Criteria for choice among risky ventures, *Journal of Political Economy*, **38** (1959) 145–155.

[16] J. Lintner, The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, *Review of Economics and Statistics*, **47** (1965) 1:13–37.

[17] H. Markowitz, Portfolio selection, *The Journal of Finance*, **7** (1952) 77–91.

[18] J. Mossin, Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, **34** (1966) 4:468–483.

[19] Gy. Ottucsák és I. Vajda, Empirikus portfólióstratégiák, *Közgazdasági Szemle*, **53, július-augusztus** (2007) 624–640.

[20] Gy. Ottucsák és I. Vajda, An Asymptotic Analysis of the Mean-Variance portfolio selection, *Statistics and Decisions*, **25** (2007) 63–88.

[21] M. Ormos és A. Urbán, Requisites for Long-term Growth in Financial Markets, *International Research Journal of Finance and Economics*, **59** (2010) 127–133.

[22] M. Ormos és A. Urbán, Performance analysis of log-optimal portfolio strategies with transaction costs, *Quantitative Finance*, közlésre elfogadva 2011-ben

[23] M. Ormos, A. Urbán és T. Zoltán, Logoptimális portfóliók empirikus vizsgálata, *Közgazdasági Szemle*, **56, január-február** (2009) 1–18.

[24] D. Schäfer, *Nonparametric Estimation for Finantial Investment under Log-Utility.* PhD disszertáció, Mathematical Institute, University Stuttgart, (Shaker Verlag, Aachen, 2002).

[25] W. F. Sharpe, Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *The Journal of Finance*, **19** (1964) 425–442.

[26] J. L. Treynor, A Theory of Market Value of Risky Assets In Korjczyk, R. A., szerkesztő, *Asset Pricing and Portfolio Performance, Risk Books*, 15–22. (1962).

[27] A. Urbán és M. Ormos, Growth optimal investments with transaction costs. *5th International Conference, An Enterprise Odyssey: From Crisis to Prosperity, Challenges for Government and Business*. Opatija, Horvátország, (2010), 887–899.

[28] I. Vajda, Analysis of semi-log-optimal investment strategies, in *Prague Stochastics 2006*, M. Huskova, M. Janzura (Eds.), 719–727, MATFYZPRESS, Prague (2006).

6. A tézispontokhoz kapcsolódó közlemények

Hivatkozások

[1. és 2. Tézis] M. Ormos és A. Urbán, Requisites for Long-term Growth in Financial Markets, *International Research Journal of Finance and Economics*, **59** (2010) 127–133.

[3. Tézis] M. Ormos és A. Urbán, Performance analysis of log-optimal portfolio strategies with transaction costs, *Quantitative Finance*, közlésre elfogadva 2011-ben

[3. Tézis] M. Ormos, A. Urbán és T. Zoltán, Logoptimális portfóliók empirikus vizsgálata, *Közgazdasági Szemle*, **56, január-február** (2009) 1–18.

7. A témában megjelent egyéb publikációk

Hivatkozások

[1] L. Györfi, Gy. Ottucsák és A. Urbán, Empirical log-optimal portfolio selections: a survey, *In Machine Learning Summer School 2007, MLSS 2007* (2007).

[2] L. Györfi, Gy. Ottucsák és H. Walk (szerkesztők), *Györfi, Horváth, Ottucsák, Telcs, Urbán, Walk: Machine Learning for Financial Engineering*. (Imperial College Press, London, 2012).

[3] L. Györfi, A. Urbán és I. Vajda, Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **10** (2007) 505–516.

[4] M. Horváth és A. Urbán, Reverse Optimization of Growth Optimal Portfolio Selection. *Advances in Business-Related Scientific Research Conference 2010*. Olbia, Olaszország, (2010)

[5] A. Urbán és M. Ormos, Growth optimal investments with transaction costs. *5th International Conference, An Enterprise Odyssey: From Crisis to Prosperity, Challenges for Government and Business*. Opatija, Horvátország, (2010), 887–899.

[6] A. Urbán és M. Ormos, Performance Analysis of Equally weighted Portfolios: USA and Hungary, *Acta Polytechnica Hungarica*, közlésre elfogadva, várható megjelenés 2012-ben