Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Sztochasztika Tanszék

Nem konformális attraktorok és átfedő önhasonló halmazok dimenzió elmélete

Tézisfüzet

Bárány Balázs

Témavezető: Prof. Simon Károly

2012

1. Bevezetés

Dolgozatomban önhasonló illetve önaffin halmazok bizonyos tulajdonságait vizsgáljuk. Különös tekintettel olyan fraktálok dimenzió elméletére, melyek egy Iterált Függvényrendszer (IFS) segítségével generálhatóak.

Legyen $\Phi = \{f_1, \dots, f_n\}$ kontrakciók egy halmaza (azaz $\|D_{\underline{x}}f\| < 1$) $\mathbb{R}^d$-n, amelyek egy U korlátos, nyílt halmazt önmagába képeznek. Ekkor jól ismert (lásd [H]), hogy létezik egyértelműen egy Λ nem üres, kompakt halmaz, melyre

$$\Lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} f_{i_1} \circ \cdots f_{i_k}(U) \text{ és } \Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(\Lambda).$$

Ekkor Λ-t a Φ iterált függvényrendszer attraktorának nevezzük.

Ezen halmazok egyik legfontosabb tulajdonsága a dimenzió. Dolgozatomban főleg az úgynevezett *Minkowski dimenzióra* (vagy box dimenzióra), illetve a *Hausdorff dimenzióra* fókuszálunk. Egy Λ halmaz Hausdorff dimenzióját (box dimenzióját) $\dim_H \Lambda$-val ($\dim_B \Lambda$-val) jelöljük, továbbá, az s dimenziós *Hausdorff mértéket* $\mathcal{H}^s$-sel. A Hausdorff és box dimenzió valamint a Hausdorff mérték definíciói illetve alaptulajdonságai megtalálhatóak Falconer [Fa1, Fa2] könyveiben.

2. Önhasonló halmazok

2.1. Előzmények

A legegyszerűbb esetben az iterált függvényrendszer függvényei összehúzó hasonlósági leképezések a valós számegyenesen

$$\Phi = \{f_i(x) = \lambda_i x + t_i\}_{i=1}^{n}.$$

Ez esetben Φ attraktorát *önhasonlónak* nevezzük. Ekkor a nem-triviális felső becslés a halmaz Hausdorff illetve box dimenziójára az úgynevezett hasonlósági dimenzió, mely az

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^s = 1$$

egyenlet egyértelmű megoldása.

Az önhasonló halmazok dimenzió elmélete jól megértett abban az esetben, amikor valamilyen szeparációs feltétel teljesül. Pontosabban, Hutchinson biznyította, amennyiben a $\{f_i(\Lambda)\}_{i=1}^n$ cilinderhalmazok egymástól jól elkülönülnek, azaz teljesül a nyílt halmaz feltétel (létezik egy olyan U nyílt, korlátos halmaz, melyre $f_i(U) \subset U$ minden i és $f_i(U) \cap \ f_j(U) = \emptyset$ minden $i \neq \ j$ esetén) akkor a hasonlósági dimenzió megegyezik a halmaz Hausdorff és box dimenziójával, lásd [H]. A box dimenzió és a Hausdorff dimenzió minden önhasonló halmazra megegyezik, függetlenül a szeparációs feltételektől, lásd [Fa5].

Cilinderek közötti átfedések esetén csak keveset tudunk az attraktor struktúrájáról. Ilyen esetek vizsgálatára jelenleg két módszer ismeretes:

- Ahelyett, hogy egyes iterált függvényrendszereket vizsgálnánk, iterált függvényrendszerek paraméteres családjait tekintjük, melyekre az úgynevezett *transzverzalitási feltételt* alkalmazzuk. Ezt a feltételt először Pollicott Simon [PoSi] alkalmazta. Lásd [PeSo1], [PeSo2] eredményeit a módszer általános alkalmazására. Dolgozatomban elsősorban ezt a módszert alkalmazzuk.

- Néhány speciális esetben alkalmazható az úgynevezett *gyenge szeparálási feltétel* [Ze, LNR, NW1], vagy annak egy változata. Ennek a módszernek a segítségével kezelhető például a $\left\{f_i(x) = \frac{1}{N}x + t_i\right\}_{i=1}^m$ IFS, ahol $N, t_i \in \ \mathbb{Z}$.

Abban az esetben, amikor az IFS néhány függvényének közös a fixpontja, akkor az ismert módszerek nem alkalmazhatóak közvetlenül. A legegyszerűbb ilyen esetet, amikor két függvénynek közös a fixpontja, a [B3] cikkben vizsgálták. Pontosabban, [B3] dolgozatban a $\{\gamma x, \lambda x, \lambda x + 1\}$ IFS és annak Λ attraktorának struktúráját vizsgálták a valós számegyenesen, ahol $\gamma < \lambda$. Jelölje $I = [0, \frac{1}{1-\lambda}]$ a Λ konvex burkát. Az iterált függvényrendszer hatását az I intervallumra lásd az 1. ábrán. A Λ attraktor dimenziójának problémáját Pablo Shmerkin vetette fel 2008-ban egy greifswaldi konferencián. A [B3] által bevezetett eredmény újdonsága a közös fixpontból származó nehézségek kezelése volt.

Ezen dolgozatom egyik fő eredménye a dimenzió kiszámítása és a bonyolult átfedések kezelése, melyeket közös fixpontok eredményeznek.

2.2. Bonyolult átfedésű önhasonló halmazok dimenziója

Ebben a fejezetben önhasonló halmazok két típusát fogjuk elemezni. Mindkét esetben feltesszük, hogy a *konvex burok két függvény által vett képei akkor és csak akkor fedhetnek át, ha a függvényeknek közös a fixpontja.* Az első esetben tegyük fel, hogy az IFS függvényeinek fixpontjainak a halmaza kételemű, de egy fixponthoz tetszőlegesen sok függvény tartozhat (lásd például a 3. ábrát).

Az A eset fő feltételei:

A1. Legyen $\mathcal{R}$ valós, lineáris leképezések egy véges halmaza úgy, hogy minden $\varphi \in \mathcal{R}$ esetén $\mathrm{Fix}(\varphi) \in \{0,1\}$ és $\varphi([0,1]) \subseteq [0,1]$.

A2. Bármely $\varphi, \phi \in \mathcal{R}$ esetén vagy $\varphi([0,1]) \cap \phi([0,1]) = \emptyset$ vagy $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\phi)$.

2.1. Tétel. *Legyen* $\mathcal{R} = \{\phi_{i,1}(x) = \gamma_{i,1}x\}_{i=0}^{p} \cup \{\phi_{i,2}(x) = \gamma_{i,2}x + (1-\gamma_{i,2})\}_{i=0}^{q}$ *úgy, hogy* $0 < \gamma_{i,1} < \gamma_{0,1} < 1$ *minden* $i = 1, \ldots, p$ *és* $0 < \gamma_{j,2} < \gamma_{0,2} < 1$ *minden* $j = 1, \ldots, q$ *esetén, ekkor*

$$\dim_B \Lambda = \dim_H \Lambda = \min\{1, s\} \quad \text{Lebesgue majdnem minden } (\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2) \in (0, \gamma_{0,1})^p \times (0, \gamma_{0,2})^q \text{ esetén,} \tag{2.1}$$

ahol $\underline{\gamma}_1 = (\gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{p,1})$ *és hasonlóan* $\underline{\gamma}_2 = (\gamma_{1,2}, \ldots, \gamma_{q,2})$*, valamint* s *az*

$$\prod_{i=0}^{p}(1-\gamma_{i,1}^{s}) + \prod_{i=0}^{q}(1-\gamma_{i,2}^{s}) = 1 \tag{2.2}$$

egyenlet egyértelmű megoldása.

Továbbá, $\mathcal{L}(\Lambda) > 0$ *Lebesgue majdnem minden* $(\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2)$ *esetén, melyre* $s > 1$.

Megjegyezzük, ha $\gamma_{0,1} + \gamma_{0,2} \geq 1$, akkor $\mathcal{R}$ attraktora egy intervallum s így a 2.1. Tétel állítása automatikusan teljesül. Ezért tehetjük fel, az általánosság megszorítása nélkül, hogy $\gamma_{0,1} + \gamma_{0,2} < 1$, ami ekvivalens a $\varphi_{0,1}([0,1]) \cap \varphi_{0,2}([0,1]) = \emptyset$ kifejezéssel.

A második esetre vonatkozó feltevésünk szerint minden fixpont legfeljebb két függvényhez tartozhat. Lásd például a 2. ábrát.

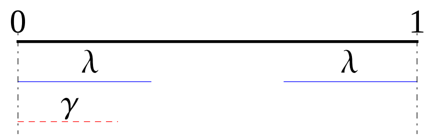
A B eset fő feltevései:

B1. $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$

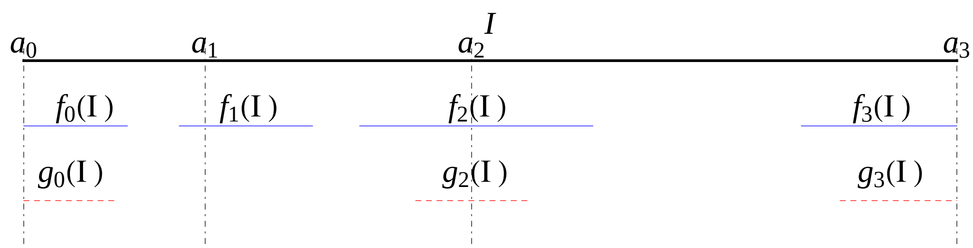
B2. $\mathcal{F} = \{f_i(x) = \lambda_i x + a_i(1-\lambda_i)\}_{i=0}^{N-1}$ ahol $0 < \lambda_i < 1$ és $a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1}$.

B3. Legyen $I = [a_0, a_{N-1}]$ (az attraktor konvex burka). Ekkor $f_{i-1}(I) < f_i(I)$, azaz

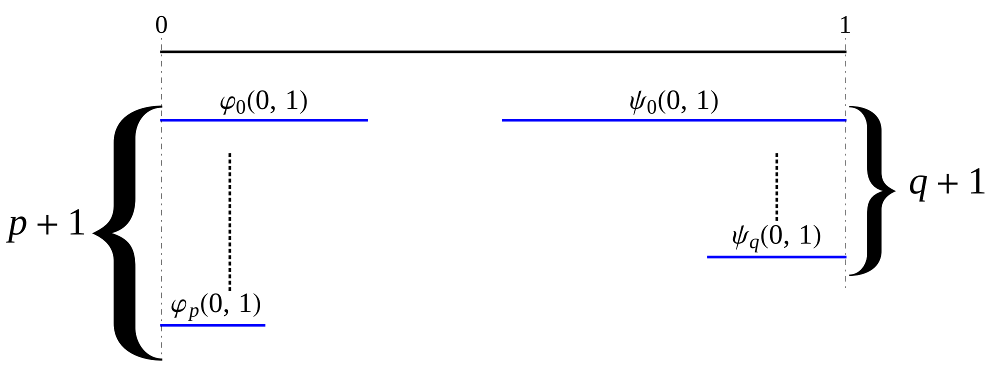
$$f_{i-1}(a_{N-1}) < f_i(a_0) \text{ minden } i = 1, \ldots, N-1 \text{ esetén.} \tag{2.3}$$



1. ábra. A legegyszerűbb, [B3]-ban vizsgált példa iterált függvényrendszerekre, mely néhány függvényének van közös fixpontja.



2. ábra. Az $\{f_0, g_0, f_1, f_2, g_2, f_3, g_3\}$ IFS attraktorának konvex burkának képei, ahol $a_0 = \mathrm{Fix}(f_0) = \mathrm{Fix}(g_0)$, $a_1 = \mathrm{Fix}(f_1)$, $a_2 = \mathrm{Fix}(f_2) = \mathrm{Fix}(g_2)$ és $a_3 = \mathrm{Fix}(f_3) = \mathrm{Fix}(g_3)$.



3. ábra. Az $\{\phi_i\}_{i=0}^{p} \cup \{\psi_j\}_{j=0}^{q}$ IFS attraktorának konvex burkának képei, ahol $\mathrm{Fix}(\phi_i) = 0$ és $\mathrm{Fix}(\psi_j) = 1$ minden i, j esetén.

B4. $\mathcal{G} = \{g_i(x) = \beta_i x + a_i(1-\beta_i)\}_{i\in\mathcal{J}}$, ahol $\mathcal{J} \subseteq \{0,\ldots,N-1\}$ és $0 < \beta_i < \lambda_i$ bármely $i \in \mathcal{J}$ esetén.

Vegyük észre, hogy $i \in \mathcal{J}$, $\mathrm{Fix}(f_i) = \mathrm{Fix}(g_i) = a_i$.

Jelölje $\underline{\beta} \in (0,1)^{\sharp\mathcal{J}}$ a $\mathcal{G}$ kontrakciós rátáiból képzett vektor, valamint jelölje $\underline{\lambda} \in (0,1)^N$ az $\mathcal{F}$ kontrakciós rátáiból képzett vektort. Továbbá, legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ a fixpontokból képzett vektor és legyen Ω az $\mathcal{S}$ attraktora. Az egyszerűség kedvéért legyen $\mathcal{I} = \{0,\ldots,N-1\}$.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ teljesíti a (B1)-(B4) feltételeket, ekkor $\mathcal{S}$ IFS Ω attraktorára teljesül*

$$\dim_B \Omega = \dim_H \Omega = \min\{1, s\}\,, \text{ Lebesgue majdnem minden } \underline{\beta} \in \mathfrak{T} \text{ esetén,} \tag{2.4}$$

ahol s az

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^s + \sum_{i\in\mathcal{J}} \beta_i^s - \sum_{i\in\mathcal{J}} \lambda_i^s \beta_i^s = 1, \tag{2.5}$$

egyenlet egyértelmű megoldása, valamint

$$\mathfrak{T} = \left\{ \underline{\beta} : 0 < \beta_i < \min\left\{ \lambda_i, \frac{2}{(1+\sqrt{2})(\alpha_i^2 \lambda_{\max} + 2)} \right\} \right\}, \tag{2.6}$$

ahol $\lambda_{\max} = \max_i \{\lambda_i\}$ és

$$\alpha_i = \frac{\max\{a_{N-1} - a_i, a_i - a_0\}}{\min\{f_{i+1}(a_0) - a_i, a_i - f_{i-1}(a_{n-1})\}} \text{ minden } i \in \mathcal{I}\text{-re.}$$

Továbbá $\mathcal{L}(\Omega) > 0$ Lebesgue majdnem minden $\underline{\beta} \in \mathfrak{T}$ esetén, melyre $s > 1$.

Másrészről, meghatározzuk az s dimenziós Hausdorff mértékét az Ω attraktornak. Kiderül, hogy minden paraméter esetén ez az érték zérus. Ennek következménye, hogy s, mely (2.5) egyértelmű megoldása, minden paraméterértékre felső becslése a Hausdorff és a box dimenziónak.

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\mathcal{S}$ IFS teljesíta a (B1)-(B4) feltételeket, és legyen s az (2.5) egyenlet egyértelmű megoldása. Ekkor*

$$\mathcal{H}^s(\Omega) = 0.$$

A 2.1. Tétel és a 2.2. Tétel bizonyításához az úgynevezett transzverzalitási módszert alkalmaztuk. Megjegyezzük, hogy az eredeti iterált függvényrendszerek nem teljesítik a transzverzalitási feltételt, de a magasabb iteráltak néhány jól megválasztott alrendszere igen. Ennek megmutatására két különböző módszert használtunk, ezek egyikét Simon, Solomyak és Urbański [SSU1, SSU2] vezette be, a másik megfelel [PeSo1, PeSo2] módszerének.

A 2.3. Tétel bizonyítása hasonló [PSS2, Theorem 1.1] bizonyításához, mely Brandt, Graf [BG] módszerének módosítása.

A fenti eredmények [B1, B2] cikkekre alapulnak.

3. Nem konformális halmazok

3.1. Előzmények

Az elmúlt két évtizedben jelentős figyelmet kapott a nem konformális halmazok dimenzió elmélete. Egy Λ halmazt *konformálisnak* nevezünk, ha Λ az attraktora egy $C^{1+\alpha}$ konformális függvényekből álló iterált függvényrendszernek (ahol egy függvényt konformálisnak nevezünk, ha deriváltja egy hasonlósági transzformáció minden pontban). A konformális attraktorok dimenzió elmélete szorosan összefügg az önhasonló halmazok dimenzió elméletével.

A nem konformális iterált függvényrendszerek dimenzió elmélete igen bonyolult s csak kevés eredmény ismert. Ennek a területnek az egyik legfontosabb eszköze az úgynevezett *szubadditív nyomás*, melyet K. Falconer [Fa4] és L. Barreira [Barr] definált. Sajnálatosan, magáról a szubadditív nyomásról is igen keveset tudunk.

A legegyszerűbb nem konformális eset, amikor a halmaz önaffin. Egy $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ halmazt önaffinnak nevezzük, ha az egy $\{f_i(x) = A_i x + a_i\}_{i=1}^m$ IFS attraktora, mely kontraktív affin leképezésekből áll, ahol A_i $d \times d$ valós mátrixok. Az önaffin halmazok dimenzió elmélete közel sem jól megértett, még abban az esetben sem, amikor A_i diagonális mátrixok.

Az önaffin attraktorok dimenziójának tanulmányozásához először is az attraktor k. közelítését (k. cilindereit) tekintjük, melyet természetes módon az IFS függvényeinek k-szor egymás utáni alkalmazásából kapunk. Egy k. cilinder, a Hausdorff mérték definíciójában szereplő, fedőösszeghez való hozzájárulásának méréséhez be kell vezetnünk az úgynevezett *szinguláris érték függvényt*, mely az attraktor egy környezetében definiált, nem negatív valós értékű függvény. Önaffin esetben, az attraktor dimenziója kapcsolódik az exponenciálisan sok szinguláris érték függvény összegének exponenciális növekedési rátájához. Pontosabban, Falconer Tétele szerint (lásd [Fa6]) az önaffin attraktor Hausdorff és box dimenziója megegyezik a szingularitási dimenzióval majdnem minden eltolási paraméter esetén, amennyiben az összes affin leképezés normája kisebb, mint 1/3. Ezt a határt később Solomyak [So1] bővítette 1/2-re. A tétel bizonyításához alapvető volt, hogy az exponenciális növekedési ráta nagysága nem függ a szinguláris érték függvény kiértékelésének a helyétől, mivel a szinguláris érték függvény konstant az önaffin esetben.

Falconer [Fa4] és Barreira [Barr] olyan eseteket tekintett, amikor az iterált függvényrendszerek már nem önaffin rendszerek. Bevezettek egy technikai feltételt, melyet "1-bunched" tulajdonságnak neveznek. Ennek következményeként a cilinderhalmazok minden iterációban konvex halmazok maradnak. Ebben az esetben a szinguláris érték függvények összegének exponenciális növekedési rátája nem függ azok kiértékelési helyétől. Ezt a jelenséget "érzéketlenségi" tulajdonságnak nevezzük. Ez egy rendkívül fontos tulajdonsága a szubadditív nyomásnak, de általánosságban nem ismerjük, hogy teljesül-e vagy sem.

Zhang [Zh] bebizonyította, hogy még abban az esetben is, amikor az 1-bunched tulajdonság nem teljesül, a szubadditív nyomás gyöke felső becslése a Hausdorff dimenziónak.

3.2. Háromszög leképezésekből álló iterált függvényrendszerek szubadditív nyomása

Ezen fejezet legfontosabb eredménye az érzéketlenségi tulajdonság bizonyítása egy speciális esetben, amikor az 1-bunched tulajdonság nem teljesül, de az IFS olyan függvényeket tartalmaz, melyek deriváltja alsó háromszög mátrix. Ez az eredmény Simon és Manning [MS2] eredményének általánosításaként tekinthető, mely a fenti eredményt a síkon bizonyítja.

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, nyílt és korlátos halmaz, valamint legyenek $F_i : M \mapsto M$ kontraktív leképezések minden $i = 1, \dots, l$ esetén. Vezessük be egy $\mathbf{i} = i_1 i_2 ... i_k$, $i_j \in \{1, ..., l\}$ véges szó esetén a következő jelölést, $F_{\mathbf{i}}(\underline{x}) = F_{i_1} \circ F_{i_2} \circ \dots \circ F_{i_k}(\underline{x})$. Az F_i függvényekre vonatkozó fő feltevésünk, hogy

$$F_i(x_1, ..., x_n) = \left(f_i^1(x_1), f_i^2(x_1, x_2), ..., f_i^n(x_1, ..., x_n)\right), \tag{3.1}$$

és $F_i(x_1, ..., x_n) \in C^{1+\varepsilon}(\overline{M})$ minden $i = 1, ..., l$. Továbbá megköveteljük, hogy $D_{\underline{x}} F_i$ legyen reguláris (nem szinguláris) mátrix minden $\underline{x} \in \overline{M}$ és $i = 1, \dots, l$ esetén. Jelöljük $D_{\underline{x}} F_{\mathbf{i}}$ elemeit x_{ij} $(\mathbf{i}, \underline{x})$-vel.

Egy T mátrix szinguláris értékein a TT^* mátrix sajátértékeinek pozitív gyökeit értjük, ahol T^* a T adjungáltja. Jelölje $\alpha_k(D_{\underline{x}} F_{\mathbf{i}})$ a k-adik legnagyobb szinguláris értékét a $D_{\underline{x}} F_{\mathbf{i}}$ mátrixnak. Ekkor a szinguláris érték függvényt minden $0 \leq s \leq n$ esetén a következő módon definiáljuk

$$\phi^s(D_{\underline{x}}F_{\mathbf{i}}) := \alpha_1(D_{\underline{x}}F_{\mathbf{i}})...\alpha_{k-1}(D_{\underline{x}}F_{\mathbf{i}})\alpha_k(D_{\underline{x}}F_{\mathbf{i}})^{s-k+1}, \tag{3.2}$$

ahol k pozitív egész, melyre $k-1 < s \leq k$. Definiáljuk a szinguláris függvény maximumát és minimumát, mint

$$\overline{\phi}^s(\mathbf{i}) := \max_{\underline{x}\in\overline{M}} \phi^s(D_{\underline{x}}F_{\mathbf{i}}) \ , \ \underline{\phi}^s(\mathbf{i}) := \min_{\underline{x}\in\overline{M}} \phi^s(D_{\underline{x}}F_{\mathbf{i}}).$$

Definiáljuk a szubadditív nyomást K. Falconer [Fa4] és L. Barreira [Barr] után:

$$P(s) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{|\mathbf{i}|=k} \overline{\phi}^s(\mathbf{i}) \tag{3.3}$$

és vezessük be az alsó nyomás függvényét is:

$$\underline{P}(s) := \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \sum_{|\mathbf{i}|=k} \underline{\phi}^s(\mathbf{i}). \tag{3.4}$$

3.1. Tétel. *Minden $0 \leq s \leq n$ esetén, ha $F_1, ..., F_l$ kontraktív, (3.1) alakú leképezések, melyekre $F_i \in C^{1+\varepsilon}$ minden $1 \leq i \leq l$-re, ekkor*

$$P(s) = \underline{P}(s) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log(\max_{\substack{j_1,\dots,j_{m-1}\\ j'_1,\dots,j'_m}} \sum_{|\mathbf{i}|=r} \left(\left|x_{j_1 j_1}(\mathbf{i},\underline{x})\right| ... \left|x_{j_{m-1} j_{m-1}}(\mathbf{i},\underline{x})\right|\right)^{m-s} \times \\ \times \left(\left|x_{j'_1 j'_1}(\mathbf{i},\underline{x})\right| ... \left|x_{j'_m j'_m}(\mathbf{i},\underline{x})\right|\right)^{s-m+1}) \tag{3.5}$$

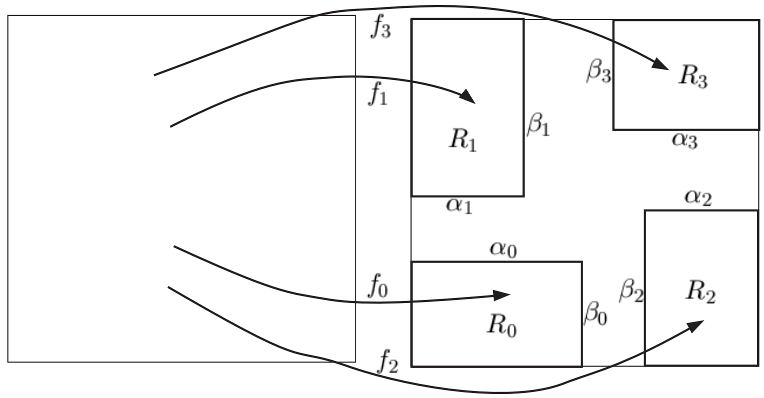
bármely $\underline{x} \in M$-re.

A (3.5) formula értelmében a szubadditív nyomás ebben az eseteben csak a derivált mátrixok diagonális elemeitől függ. A fenti eredmény Falconer és Miao [FM] eredményének általánosításaként is tekinthető, melyben a szerzők felső háromszögmátrixok által generált önaffin fraktálok dimenziójának becslésére mutatnak formulát.

A 3.1. Tétel eredménye [B4]-re alapul s [FM] módszerét használja. A fejezet eredményei Bárány Balázs diplomamunkájának is részét képezték.

3.3. Az általánosított 4-sarok halmaz box dimenziója

A következőkben önaffin halmazok egy speciális családját tekintjük, melyet általánosított 4-sarok halmaznak nevezünk. Az általánosított 4-sarok



4. ábra. Az általánosított 4-sarok halmazhoz tartozó függvények.

halmaz a 4. ábrán látható affin IFS attraktorának nevezünk, s $\Lambda(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$-vel jelöljük.

Pontosabban, legyen $\Psi = \{f_0(\underline{x}), f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x})\}$ a valós számsík egy iterált függvényrendszere és $\Lambda(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ az attraktora, ahol

$$\begin{aligned}
f_0(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \underline{x}, \\
f_1(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\beta_1 \end{pmatrix}, \\
f_2(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
f_3(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1-\alpha_3 \\ 1-\beta_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Az $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ és $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ paramétereket úgy választjuk meg, hogy a 4. ábrán látható R_0, R_1, R_2, R_3 téglalapok diszjunktak legyenek. Célunk, hogy meghatározzuk ezen halmaz box dimenzióját Lebesgue tipikus paraméterek esetén.

Mielőtt azonban kiszámolnánk az általánosított 4-sarok halmaz box dimenzióját, először egy általános tételt fogalmazunk meg diagonálisan önaffin halmazok esetére.

Legyenek

$$f_i(x, y) = (\alpha_i x + t_i, \beta_i y + u_i) \tag{3.7}$$

minden $i = 0, \ldots, m$-re úgy, hogy

$$\begin{aligned} &0 < \alpha_i, \beta_i < 1 \\ &f_i([0,1]^2) \subseteq [0,1]^2,\ i = 0, \ldots, m, \text{ valamint} \\ &f_i((0,1)^2) \bigcap f_j((0,1)^2) = \emptyset,\ i \neq j \text{ esetén.} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Jelöljük a $\Psi = \{f_i(x,y)\}_{i=0}^m$ IFS attraktorát $\mathbf{\Lambda}$-val és jelöljük $\mathrm{proj}_x \mathbf{\Lambda}$-val (és $\mathrm{proj}_y \mathbf{\Lambda}$-val) a $\mathbf{\Lambda}$ halmaz x-tengelyre (és y-tengelyre) vett merőleges vetületét.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\Psi = \{f_i(x,y)\}_{i=0}^m$ IFS teljesíti, hogy az f_i függvények (3.7) alakúak minden $i = 0, \ldots, m$ esetén, valamint telesíti a (3.8) feltételt. Ekkor Ψ attraktora, $\mathbf{\Lambda}$, teljesíti*

$$\dim_B \mathbf{\Lambda} = \max\{d_\alpha, d_\beta\}$$

ahol d_α és d_β az

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i^{s_\alpha} \beta_i^{d_\alpha - s_\alpha} = 1 \text{ és } \sum_{i=0}^m \beta_i^{s_\beta} \alpha_i^{d_\beta - s_\beta} = 1,$$

egyenletek egyértelmű megoldásai, és $s_\alpha = \dim_B \mathrm{proj}_x \mathbf{\Lambda}$, valamint $s_\beta = \dim_B \mathrm{proj}_y \mathbf{\Lambda}$.

A 3.2. Tétel bizonyítása [B1]-re alapul, mely Feng, Wang [FW, Theorem 1] és Barański [Bara, Theorem B] módszerét használja csekély módosítással.

Használva A 3.2. Tételt valamint [SS, Theorem 2.1] eredményét, ki tudjuk számítani a box dimenziót majdnem minden eltolási paraméter esetén, melyek teljesítik (3.8) feltételt.

3.3. Következmény. *Tegyük fel, hogy $\Psi = \{f_i(x,y)\}_{i=0}^m$ IFS teljesíti, hogy az f_i függvények (3.7) alakúak minden $i = 0, \ldots, m$ esetén, és legyen $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{2m+2}$ az eltolási paraméterek halmaza, hogy Ψ telesíti a (3.8) feltételt. Ekkor Ψ attraktora, $\mathbf{\Lambda}$, teljesíti*

$$\dim_B \mathbf{\Lambda} = \max\{d_\alpha, d_\beta\} \ \ 2m+2\text{-dimenziós Lebesgue mérték szerinti majdnem minden eltolásra } \mathcal{T} \text{ halmazból}$$

ahol d_α illetve d_β az

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i^{\min\{1,s_\alpha\}} \beta_i^{d_\alpha - \min\{1,s_\alpha\}} = 1 \text{ és } \sum_{i=0}^m \beta_i^{\min\left\{1,s_\beta\right\}} \alpha_i^{d_\beta - \min\left\{1,s_\beta\right\}} = 1$$

egyenletek egyértelmű megoldásai, ahol s_α, s_β *az*

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{s_\alpha} = 1 \textit{ and } \sum_{i=0}^{m} \beta_i^{s_\beta} = 1$$

egyenletek egyértelmű megoldásai.

Használva a 3.2. Tételt és a 2.2. Fejezet eredményeit képesek vagyunk kiszámolni az általánosított 4-sarok halmaz box dimenzióját majdnem minden kontrakciós paraméter esetén.

3.4. Tétel. *Legyen* $\Lambda(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ *a 4. ábrán látható IFS attraktora. Ekkor*

$$\dim_B \Lambda(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \max\{d_\alpha, d_\beta\}, \textit{ Lebesgue m. m. } (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \textit{ esetére, melyekre}$$
$$\max\{\alpha_i + \alpha_{i+2}, \beta_i + \beta_{i+2}\} < 1 \textit{ és } \min\{\alpha_i + \alpha_{3-i}, \beta_i + \beta_{3-i}\} < 1, \quad (3.9)$$

ahol d_α *és* d_β *két lépésben definiálhatóak. Először legyenek* s_α, s_β *az*

$$\alpha_0^{s_\alpha} + \alpha_1^{s_\alpha} + \alpha_2^{s_\alpha} + \alpha_3^{s_\alpha} - \alpha_0^{s_\alpha}\alpha_1^{s_\alpha} - \alpha_2^{s_\alpha}\alpha_3^{s_\alpha} = 1$$
$$\beta_0^{s_\beta} + \beta_1^{s_\beta} + \beta_2^{s_\beta} + \beta_3^{s_\beta} - \beta_0^{s_\beta}\beta_2^{s_\beta} - \beta_1^{s_\beta}\beta_3^{s_\beta} = 1$$

egyenletek egyértelmű megoldása. Ekkor d_α *és* d_β *definiálható, mint az*

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^{\min\{1,s_\alpha\}} \beta_i^{d_\alpha - \min\{1,s_\alpha\}} = 1, \qquad \sum_{i=0}^{3} \beta_i^{\min\left\{1,s_\beta\right\}} \alpha_i^{d_\beta - \min\left\{1,s_\beta\right\}} = 1 \qquad (3.10)$$

egyenletek egyértelmű megoldása.

4. A Sierpiński háromszög szeleteinek dimenzió elmélete

Jelölje $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ a szokásos Sierpiński háromszöget, azaz Δ az a nem üres, kompakt halmaza a síknak, mely teljesíti a

$$\Delta = S_0(\Delta) \cup S_1(\Delta) \cup S_2(\Delta)$$

összefüggést, ahol

$$S_0(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \; S_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right), \; S_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right). \quad (4.1)$$

Jól ismert, hogy $\dim_H \Delta = \dim_B \Delta = \frac{\log 3}{\log 2} = s$.

Jelöljük proj_θ-val az origón átmenő, az x-tengellyel θ szöget bezáró egyenesre vett merőleges vetítést. Egy $a \in \text{proj}_\theta(\Delta)$ pont esetén legyen

$$L_{\theta,a} = \{(x,y) : \text{proj}_\theta(x,y) = a\} = \{(x, a + x\tan\theta) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Célunk az $E_{\theta,a} = L_{\theta,a} \cap \Delta$ szeletek dimenzió elméletének vizsgálata. Különösen szögek egy megszámlálható családjának megfelelően vett szeletekre szeretnénk multifraktális tulajdonságot vizsgálni.

Mivel Δ forgatás és tükrözés invariáns, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\theta \in [0, \frac{\pi}{3})$.

Jelölje ν a Δ természetes önhasonló mértékét. Azaz, $\nu = \frac{\mathcal{H}^s|_\Delta}{\mathcal{H}^s(\Delta)}$. Esetünkben ν teljesíti, hogy

$$\nu = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{3} \nu \circ S_i^{-1}.$$

Jelölje ν_θ a ν mérték θ szögű projekcióját, azaz $\nu_\theta = \nu \circ \text{proj}_\theta^{-1}$. Hasonlóan, legyen Δ_θ a Δ θ szögű vetülete.

Definiáljuk egy η mérték alsó és felső lokális dimenzióját egy x pontban, hogy

$$\underline{d}_\eta(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \eta(B_r(x))}{\log r}, \ \overline{d}_\eta(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \eta(B_r(x))}{\log r}.$$

Első eredményünk, a 4.1. Állítás, egy dimenzió megmaradási formula, mely kapcsolatot teremt a szeletek box dimenziója és a projektált természetes önhasonló mérték lokális dimenziója között. Manning és Simon az alábbi formulát a Sierpiński szőnyeg esetére igazolta, lásd [MS1, Proposition 4].

4.1. Állítás. *Tetszőleges $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ és $a \in \Delta_\theta$ esetén*

$$\underline{d}_{\nu_\theta}(a) + \overline{\dim}_B E_{\theta,a} = s, \tag{4.2}$$

$$\overline{d}_{\nu_\theta}(a) + \underline{\dim}_B E_{\theta,a} = s. \tag{4.3}$$

Alkalmazva a 4.1. Állítást és Feng, Hu [FH, Theorem 2.12], valamint Young [You] korábbi eredményeit könnyen látható az alábbi következmény:

4.2. Következmény. *Tetszőleges $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ és ν_θ-majdnem minden $a \in \Delta_\theta$ esetén*

$$\dim_B E_{\theta,a} = s - \dim_H \nu_\theta \geq s - 1,$$

ahol $\dim_H \nu_\theta$ jelöli a ν_θ mérték Hausdorff dimenzióját.

Liu, Xi és Zhao mutatott egy formulát a Sierpiński szőnyeg racionális meredekségű szeleteinek box illetve Hausdorff dimenziójának becslésére és azt sejtették, hogy Lebesgue tipikus pontokra és minden racionális meredekség esetén a dimenzió szigorúan kisebb, mint a szőnyeg dimenziója mínusz egy (a pontos részletekért lásd [LXZ]). Manning és Simon [MS1] bizonyította ezt a sejtést. Második állításunk, hogy hasonló eredmény igaz a Sierpiński háromszög esetére is.

Továbbá, a 4.3. Tétel szerint azok a θ szögek, melyekre $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}p}{2q+p}$ ahol p, q pozitív egészek, a Marstrand Tétel szempontjából kivételes irányoknak számítanak (lásd [Mar1] vagy [Mat, Theorem 10.11]).

4.3. Tétel. *Legyenek $p, q \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}p}{2q+p}$ illetve $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$. Ekkor léteznek olyan $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ konstansok úgy, hogy azok csak θ-tól függenek és*

1. *Lebesgue majdnem minden $a \in \Delta_\theta$-ra*

$$\alpha(\theta) := \dim_B E_{\theta,a} = \dim_H E_{\theta,a} < s - 1,$$

2. *ν_θ-majdnem minden $a \in \Delta_\theta$-ra*

$$\beta(\theta) := \dim_B E_{\theta,a} = \dim_H E_{\theta,a} > s - 1.$$

Egyszerű számítással megmutatható, hogy a fenti tételben szereplő szögek tangenseinek a halmaza egyenlő a $\mathbb{Q}' = \big\{0 < \sqrt{3}\frac{m}{n} < \sqrt{3} :$ ha m páratlan, akkor n is páratlan$\}$ halmazzal.

Furstenberg [Fur] bevezetett és bizonyított egy (4.1. Állításban szereplőtől eltérő) dimenzió megmaradási formulát [Fur, Definition 1.1] homogén fraktálokra (például olyan önhasonló halmazokra, melyekhez tartozó IFS függvényei homotéciák). A 4.3. Tétel és 4.2. Következmény eredményeképp bizonyítható Furstenberg formulájának egy speciális esete megszámlálhatóan sok θ esetén. A [Fur, Theorem 6.2] formula teljesül minden θ esetén.

4.4. Következmény (Furstenberg). *Legyenek $p, q \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}p}{2q+p}$ valamint $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$. Ekkor a proj_θ vetítés teljesíti a [Fur, Definition 1.1] dimenzió megmaradási formulát $\beta(\theta)$ választással. Azaz,*

$$\beta(\theta) + \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} \geq \beta(\theta)\} = s. \tag{4.4}$$

A 4.4. Következmény állítása érvényes a

$$\beta(\theta) + \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} = \beta(\theta)\} = s$$

formulával is.

A következőkben a $\Gamma : \delta \mapsto \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} \geq \delta\}$ függvényt fogjuk analizálni abban az esetben, amikor $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}p}{2q+p}$, ahol $p, q \in \mathbb{N}$ és $(p,q) = 1$. A vizsgálathoz kettő, az $\{S_0, S_1, S_2\}$ IFS vetülete által természetes módon generált mátrixot fogunk használni. Az egyszerűség kedvéért ezeket a mátrixokat az úgynevezett derékszögű Sierpiński háromszögön mutatjuk be, mely a

$$\Phi = \left\{ F_0(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right),\ F_1(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right),\ F_2(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) \right\} \tag{4.5}$$

iterált függvényrendszer Λ attraktora. Ekkor létezik egy T lineáris transzformáció, mely

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

és amely a szokásos Sierpiński háromszöget a derékszögű Sierpiński háromszögre képezi. Mivel az invertálható lineáris transzformációk nem módosítják egy halmaz dimenzióját, ezért eredményeinket a szokásos Sierpiński háromszögre mondjuk ki.

Jelölje Λ_θ a Λ halmaz θ-szöggel vett vetületét az y-tengelyre. Ekkor $\Lambda_\theta = [-\tan\theta, 1]$. Továbbá, legyen ϕ a projektált IFS, azaz

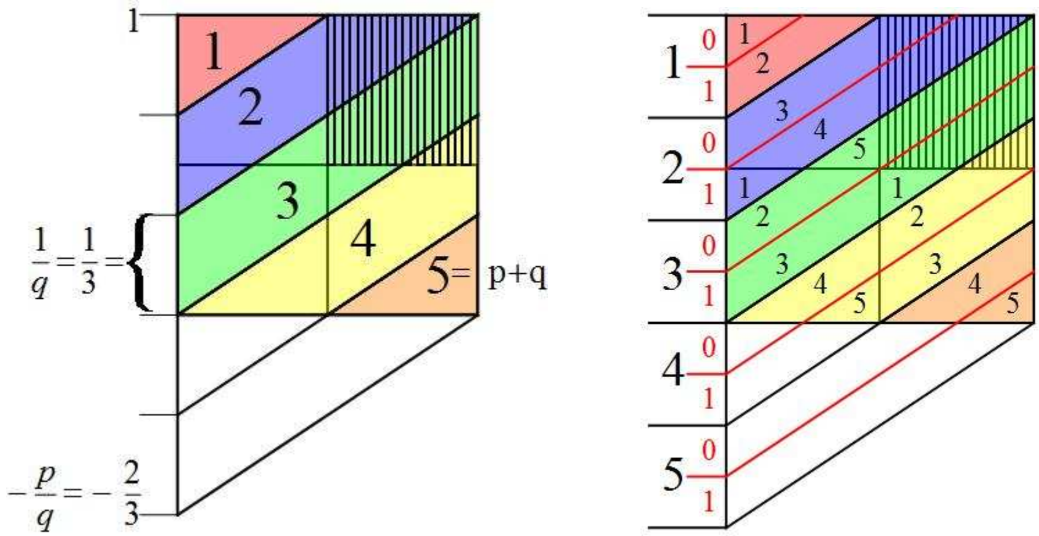
$$\phi = \left\{ f_0(t) = \frac{t}{2}, f_1(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, f_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{p}{2q} \right\}.$$

Osszuk fel Λ_θ-t $p+q$ egyenlő intervallumra úgy, hogy $I_k = \left[1 - \frac{k}{q}, 1 - \frac{k-1}{q}\right]$, ahol $k = 1, \ldots, p+q$. Továbbá osszuk fel minden I_k intervallumot két egyenlő részre úgy, hogy $I_k^0 = \left[1 - \frac{k}{q}, 1 - \frac{2k-1}{2q}\right]$ és $I_k^1 = \left[1 - \frac{2k-1}{2q}, 1 - \frac{k-1}{q}\right]$. Definiáljuk az A_0, A_1 $(p+q) \times (p+q)$ mátrixokat a következő módon:

$$(A_n)_{i,j} = \sharp \{k \in \{0,1,2\} : f_k(I_j) = I_i^n\}. \tag{4.7}$$

Például, a $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$ esetben a mátrixok konstrukcióját lásd az 5. ábrán és ekkor a mátrixok:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



5. ábra. Az A_0, A_1 mátrixok konstrukciója a $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$ esetben.

4.5. Állítás. *Legyen $p, q \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}p}{2q+p}$ és $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$. Továbbá legyen $\alpha(\theta)$ és $\beta(\theta)$ a 4.3. Tételnek megfelelő konstansok. Ekkor*

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\log 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\xi_1,\dots,\xi_n=0}^{1} \frac{1}{2^n} \log \underline{e} A_{\xi_1} \cdots A_{\xi_n} \underline{e},$$

$$\beta(\theta) = \frac{1}{\log 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\xi_1,\dots,\xi_n=0}^{1} \frac{1}{3^n} \underline{e} A_{\xi_1} \cdots A_{\xi_n} \underline{p} \log \left(\underline{e} A_{\xi_1} \cdots A_{\xi_n} \underline{p} \right),$$

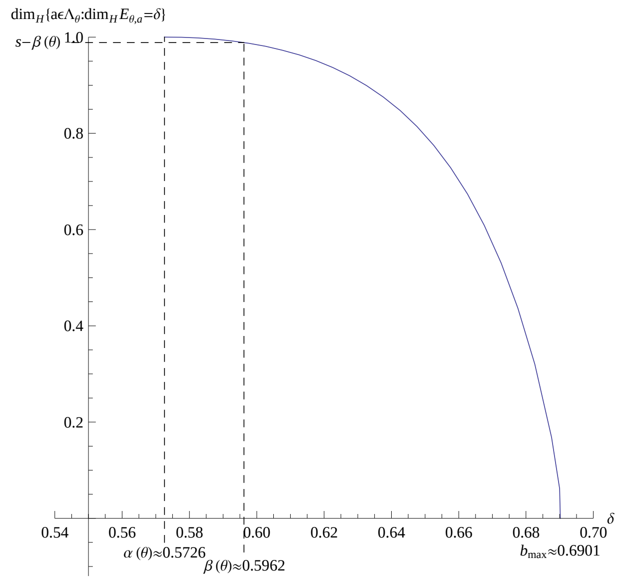
ahol $\underline{e} = (1, \cdots, 1)$ és $\underline{p}$ az az egyértelmű valószínűségi vektor, melyre $(A_0 + A_1)\, \underline{p} = 3\, \underline{p}$.

A $\Gamma : \ \delta \mapsto \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} \geq \delta\}$ függvény vizsgálatához a nem negatív mátrixok szorzataira vonatkozó multifraktál elméletet alkalmazzuk, lásd [Fe1, Fe2, FL2]. Ennek megfelelően vezessük be a nyomásfüggvényt, mely a következő módon definiálható:

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\xi_1,\dots,\xi_n=0}^{1} \left(\underline{e} A_{\xi_1} \cdots A_{\xi_n} \underline{e} \right)^t . \tag{4.8}$$

Továbbá legyen

$$b_{\max} = \lim_{t\to\infty} \frac{P(t)}{t}.$$



6. ábra. A $\delta \mapsto \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} = \delta\}$ függvény grafikonja a $\frac{p}{q} = 1$ esetben.

4.6. Tétel. *Legyen* $p, q \in \mathbb{N}$ *és tegyük fel, hogy* $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}p}{2q+p}$ *és* $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$. *Ekkor*

1. $\Gamma(\delta) = \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} \geq \delta\} = \inf_{t>0}\left\{-\delta t + \frac{P(t)}{\log 2}\right\}$ *ha* $b_{\max} \geq \delta > \alpha(\theta)$ *és* $\Gamma(\delta) = 1$ *ha* $\delta \leq \alpha(\theta)$. *A* Γ *függvény csökkenő és folytonos.*

2. $\chi(\delta) = \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} = \delta\} = \inf_{t>0}\left\{-\delta t + \frac{P(t)}{\log 2}\right\}$ *ha* $b_{\max} \geq \delta \geq \alpha(\theta)$. *A* χ *függvény csökkenő és folytonos.*

A $\delta \mapsto \dim_H \{a \in \Delta_\theta : \dim_H E_{\theta,a} = \delta\}$ függvény grafikonját, amikor $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lásd a 6. ábrán.

A fenti eredmények a [BFS] eredményeire alapulnak, mely a szerző közös munkája Andrew Fergusonnal Simon Károllyal.

5. Véletlen iterált függvényrendszerek inavriáns mértékeinek abszolút folytonossága

Végezetül olyan iterált függvényrendszerek invariáns mértékeivel foglalkozunk, melyek véletlen perturbációval rendelkeznek. Pontosabban, ezen mértékek abszolút folytonosságát és L^2 sűrűségeit vizsgáljuk.

Legyen $\{f_1, \ldots, f_l\}$ egy iterált függvényrendszer a valós számegyenesen. Tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, l\}$ esetén az f_i függvény a $[-1, 1)$ intervallumot önmagára képezi úgy, hogy $f_i([-1, 1))$ el van szeparálva egytől és mínusz egytől is. Továbbá $f_i \in C^{1+\alpha}([-1, 1))$ és

$$0 < \lambda_{i,\min} \leq |f_i'(x)| \leq \lambda_{i,\max} < 1 \tag{5.1}$$

minden $x \in [-1, 1)$-re. Valamint tetszőleges i esetén f_i fixpontja $a_i \in (-1, 1)$ és

$$i \neq j \;\Rightarrow\; a_i \neq a_j. \tag{5.2}$$

Az $\{f_i\}_{i=1}^n$ IFS Λ attraktora elemeinek a $\Sigma = \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$ tér elemeivel való természetes kódolását $\pi : \Sigma \mapsto \Lambda$ természetes projekciónak nevezzük. Legyen $\mu = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathbb{N}}$ a Σ tér egy Bernoulli mértéke. Legyen $h = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ a balra tolás operátor entrópiája a μ mértékre nézve. Jelölje ν a μ mérték vetületét, azaz $\nu = \mu \circ \pi^{-1}$. Ekkor ν egy önhasonló mérték, azaz

$$\nu = \sum_{i=1}^{l} p_i \nu \circ f_i^{-1}. \tag{5.3}$$

Nem lineáris, átlagosan összehúzó iterált függvényrendszerek esetén

$$\dim_H(\nu) \leq \frac{h}{|\chi|},$$

ahol $\dim_{\mathrm{H}}(\nu)$ a ν mérték Hausdorff dimenziója, χ pedig az IFS μ mérték szerinti entrópiáját jelöli (lásd [BNS, FST]).

Arra lehet számítani, legalább "tipikus" értelemben, hogy a ν mérték abszolú folytonos, ha $h/|\chi| > 1$. Alapvetően, az egyetlen ismert megközelítése a problémának a transzverzalitás. Például, a lineáris esetet uniform kontrakciós rátákkal lásd [PeSc, PeSo2], a lineáris nem uniform kontrakciós rátákkal vett esetet lásd például [N, NW2]. Nem lineáris esetet lásd például [SSU2].

Ebben a fejezetben a függvények egy véletlen perturbációját tekintjük. A lineáris esetet Peres, Simon és Solomyak tanulmányozta [PSS1] cikkükben. Abszolút folytonosságot bizonyítottak véletlen lineáris iterált függvényrendszerek esetén, nem uniform kontrakciós rátákkal, valamint L^2 és folytonos sűrűséget bizonyítottak az uniform esetben. Ezeket az eredményeket szeretnénk kiterjeszteni, L^2 sűrűség bizonyításával nem lineáris esetben.

Legyen Y_ε az $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású véletlen valószínűségi változó. Jelöljük Y_ε valószínűségi mértékét η_ε-nal. Legyen

$$f_{i,Y_\varepsilon}(x) = Y_\varepsilon f_i(x) + a_i(1 - Y_\varepsilon) \tag{5.4}$$

minden $i \in \{1, \ldots, l\}$-re. Ekkor megfelelően kis $\varepsilon > 0$ esetén minden $x \in [-1, 1)$ esetén $f_{i,Y_\varepsilon}(x) \in [-1, 1)$.

Legyen Z_ε a következő valószínűségi változó:

$$Z_\varepsilon := \lim_{n\to\infty} f_{i_1,y_{1,\varepsilon}} \circ f_{i_2,y_{2,\varepsilon}} \circ \cdots \circ f_{i_n,y_{n,\varepsilon}}(0), \tag{5.5}$$

ahol i_k független, azonos μ eloszlás szerint választott $\{1, \ldots, l\}$ halmazról, és $y_{k,\varepsilon}$ független, azonos η_ε eloszlású valószínűségi változók. Jelölje ν_ε mérték Z_ε eloszlását.

Az így kapott IFS Lyapunov exponensét a

$$\chi(\mu, \eta_\varepsilon) = \mathbb{E}(\log(Y_\varepsilon f'))$$

összefüggéssel definiáljuk, s ekkor könnyű látni, hogy

$$\chi(\mu, \eta_\varepsilon) < \sum_{i=1}^{l} p_i \log((1+\varepsilon)\lambda_{i,\max}) < 0,$$

megfelelően kis $\varepsilon > 0$ esetén. Könnyű látni a következő tételt.

5.1. Tétel. *A ν_ε mérték gyengén konvergál ν mértékhez, amint $\varepsilon \to 0$.*

5.2. Tétel. *Legyen ν_ε a (5.5) képletben definiált határérték eloszlása. Tegyük fel, hogy (5.1) és (5.2) teljesül, valamint*

$$\sum_{i=1}^{l} p_i^2 \frac{\lambda_{i,\max}}{\lambda_{i,\min}^2} < 1. \tag{5.6}$$

Ekkor minden megfelelően kis $\varepsilon > 0$ esetén ν_ε abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve L^2-beli sűrűséggel, és létezik egy C konstans úgy, hogy ν_ε sűrűségére

$$\|\nu_\varepsilon\|_2 \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

5.3. Következmény. *Legyen $\{\lambda_i Y_\varepsilon x + a_i(1 - \lambda_i Y_\varepsilon)\}_{i=1}^{l}$ egy véletlen iterált függvényrendszer. Tegyük fel, hogy (5.2) teljesül és*

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{p_i^2}{\lambda_i} < 1. \tag{5.7}$$

Ekkor minden megfelelően kis $\varepsilon > 0$ esetén ν_ε abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve L^2-beli sűrűséggel, és létezik egy C konstans úgy, hogy ν_ε sűrűségére

$$\|\nu_\varepsilon\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

A következőkben egy másik esetét is tekintjük a véletlen perturbációnak, azaz legyen $\widetilde{\lambda}_{i,\varepsilon}$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó $[\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$ intervallumon. Legyen $\left\{\widetilde{\lambda}_{i,\varepsilon}x + a_i(1 - \widetilde{\lambda}_{i,\varepsilon})\right\}_{i=1}^{l}$ véletlen iterált függvényrendszer, melyre $a_i \neq a_j$ ha $i \neq j$. Jelölje $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, és legyen $X_{\underline{\lambda},\varepsilon}$ a következő valószínűségi változó:

$$X_{\underline{\lambda},\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{i_k}(1 - \widetilde{\lambda}_{i_k,\varepsilon}))\prod_{j=1}^{k-1}\widetilde{\lambda}_{i_j,\varepsilon} \tag{5.8}$$

ahol i_k független, azonos μ eloszlásúak $\{1, \ldots, l\}$ halmazon, és $\widetilde{\lambda}_{i_k,\varepsilon}$ páronként függetlenek. Jelölje $\nu_{\underline{\lambda},\varepsilon}$ az $X_{\underline{\lambda},\varepsilon}$ valószínűségi változó mértéket. Továbbá jelölje $\nu_{\underline{\lambda}}$ a $\{\lambda_i x + a_i(1 - \lambda_i)\}_{i=1}^{l}$ IFS μ mértéknek megfelelő invariáns mértékét.

5.4. Tétel. *A $\nu_{\underline{\lambda},\varepsilon}$ mérték gyengén konvergál $\nu_{\underline{\lambda}}$ mértékhez, amint $\varepsilon \to 0$.*

Ahhoz, hogy az 5.2. Tételhez hasonló állítást fogalmazzunk meg szükségünk van egy technikai feltételre, azaz

$$\min_{i \neq j}\left|\frac{a_j\lambda_i - a_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}\right| > 1. \tag{5.9}$$

5.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy (5.9) és (5.2) teljesül, továbbá*

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{p_i^2}{\lambda_i} < 1. \tag{5.10}$$

Ekkor minden megfelelően kis $\varepsilon > 0$ esetén a $\nu_{\underline{\lambda},\varepsilon}$ mérték abszlút folytonos a Lebesgue mértékre nézve L^2-beli sűrűséggel, és létezik C konstans, hogy

$$\|\nu_{\underline{\lambda},\varepsilon}\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

A fő különbség az 5.5. Tétel és az 5.3. Következmény között a véletlen perturbáció. Azaz az 5.5. Tételben a kontrakciós rátákat uniform módon választjuk λ_i-k egy ε sugarú környezetéből, de az 5.3. Következményben a kontrakciós rátákat λ_i-k egy $\lambda_i\varepsilon$ környezéből választjuk.

A fentiek [BP] eredményeire alapulnak, amely a szerző Tomas Perssonnal közös munkaája.

Hivatkozások

[Bara] K. Barański: Hausdorff dimension of the limit sets of some planar geometric constructions, *Advances in Mathematics* **210**, (2007), 215-245.

[B1] B. Bárány: Dimension of the generalized 4-corner set and its projections, *Erg. Th. & Dyn. Sys.*, (2011).

[B2] B. Bárány: Iterated Function Systems with Non-Distinct Fixed Points, *J. Math. Anal. Appl.* **383** No. 1 (2011), 244-258.

[B3] B. Bárány: On the Hausdorff Dimension of a Family of Self-Similar Sets with Complicated Overlaps, *Fund. Math.* **206** (2009), 49-59.

[B4] B. Bárány: Sub-Additive Pressure for IFS with Triangular Maps, *Bulletin of the Pol. Ac. of Sci. Math.* **57** No. 3 (2009), 263-278.

[BFS] B. Bárány, A. Ferguson, K. Simon: Slicing the Sierpiński gasket, preprint, (2011).

[BP] B. Bárány, T. Persson: The Absolute Continuity of the Invariant Measure of Random Iterated Function Systems with Overlaps, *Fund. Math.* **210** No. 1 (2010), 47-62.

[Barr] L. Barreira: A non-additive thermodinamic formalism and applications of dimension theory of hyperbolic dynamical systems. *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **16**, (1996), 871-927.

[BG] C. Bandt, S. Graf: Self-Similar Sets 7. A Characterisation of Self-Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure, *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** No. 4, (1992), 995-1001.

[BNS] D. Broomhead, M. Nicol, N. Sidorov: On the fine structure of stationary measures in systems which contract on average, *J. Theoret. Probab.* **15** No. 3, (2002), 715-730.

[Fa1] K. J. Falconer: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 1990.

[Fa2] K. J. Falconer: *Techniques in Fractal Geometry*, Wiley, 1997.

[Fa4] K. Falconer: Bounded distortion and dimension for non-conformal repellers, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, (1994), 315-334.

[Fa5] K. J. Falconer: Dimensions and measures of quasi self-similar sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** No. 2, (1989), 543-554.

[Fa6] K. Falconer: The Hausdorff dimension of self-affine fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **103** No. 2, (1988), 339-350.

[FM] K. Falconer, J. Miao: Dimensions of self-affine fractals and multifractals generated by upper-triangular matrices, *Fractals* **15** No. 3, (2007), 289-299.

[FST] A. H. Fan, K. Simon, H. Tóth: Contracting on average random IFS with repelling fixed point, *J. Statist. Phys.* **122**, (2006), 169-193.

[Fe1] D.J. Feng: Lyapunov exponents for products of matrices and multifractal analysis. Part I: Positive matrices, *Israel Journal of Mathematics* **138**, (2003), 353-376.

[Fe2] D.J. Feng: Lyapunov exponents for products of matrices and multifractal analysis. Part II: General matrices, *Israel Journal of Mathematics* **170**, (2009), 355-394.

[FH] D.J. Feng, H. Hu: Dimension theory of iterated function systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **62** Issue 11, (2009), 1435-1500.

[FL2] D.J. Feng, K.S. Lau: The pressure function for products of non-negative matrices, *Mathematical Research Letters* **9**, (2002), 363-378.

[FW] D.-J. Feng, Y. Wang: A Class of Self-Affine Sets and Self-Affine Measures, *Journal of Fourier Analysis and Applications* **11** No. 1, (2005), 107-124.

[Fur] H. Furstenberg: Ergodic fractal measures and dimension conservation, *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **28** No. 2, (2008), 405-422.

[H] J. E. Hutchinson: Fractals and Self-Similarity, *Indiana Univ. Math. Journal* **30** No. 5, (1981), 713-747.

[LNR] K.-S. Lau, S.-M. Ngai and H. Rao, Iterated function systems with overlaps and self-similar measures, *J. London Math. Soc.* **63** No. 2, (2001), no. 1, 99-116.

[LXZ] Q.H. Liu, L.F. Xi and Y.F. Zhao: Dimension of intersections of the Sierpiński carpet with lines of rational slopes, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **50**, (2007), 411-428.

[MS1] A. Manning, K. Simon: Dimension of slices through the Sierpiński carpet, preprint, (2011).

[MS2] A. Manning, K. Simon: Subadditive pressure for triangular maps, *Nonlinearity* **20** No. 1, (2007), 133-149.

[Mar1] J.M. Marstrand: Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimension, *Proc. London Mathematical Society* **4**, (1954), 257-302.

[Mat] P. Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge, 1995.

[N] J. Neunhäuserer: Properties of some overlapping self-similar and some self-affine measures, *Acta Math. Hungar.* **92** (2001), 143-161.

[NW1] S.-M. Ngai and Y. Wang: Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps, *J. London Math. Soc.* **63** No. 2, (2001), 655-672.

[NW2] S.-M. Ngai and Y. Wang: Self-similar measures associated with IFS with non-uniform contraction ratios, *Asian J. Math.* **9** No. 2, (2005), 227-244.

[PeSc] Y. Peres and W. Schlag: Smoothness of projections, Bernoulli convolutions, and the dimension of exceptions, *Duke Math. J.* **102** No. 2, (2000), 193-251.

[PSS1] Y. Peres, K. Simon and B. Solomyak: Absolute continuity for random iterated function systems with overlaps, *J. London Math. Soc.* **74** No. 2, (2006), 739-756.

[PSS2] Y. Peres, K. Simon and B Solomyak: Self-similar sets of zero Hausdorff and positive Packing measure, *Israel Journal of Mathematics* **117**, (2000), 353-379.

[PeSo1] Y. Peres and B. Solomyak: Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof, *Math. Research Letters* **3** No. 2, (1996), 231-239.

[PeSo2] Y. Peres and B. Solomyak: Self-similar measures and intersections of Cantor sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** No. 10, (1998), 4065-4087.

[PoSi] M. Pollicott and K. Simon: The Hausdorff dimension of λ-expansions with deleted digits, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** No. 3, (1995), 967-983.

[SS] K. Simon, B. Solomyak: On the dimension of self-similar sets, *Fractals* **10** No. 1, (2002), 59-65.

[SSU1] K. Simon, B. Solomyak and M. Urbański: Hausdorff dimension of limit sets for parabolic IFS with overlaps, *Pacific J. Math.* **201** No. 2, (2001), 441-478.

[SSU2] K. Simon, B. Solomyak, and M. Urbański: Invariant measures for parabolic IFS with overlaps and random continued fractions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**, (2001), 5145-5164.

[So1] B. Solomyak: Measure and dimension for some fractal families, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **124** No. 3, (1998), 531-546.

[You] L.S. Young: Dimension entropy and Lyapunov exponents, *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **2** No. 1, (1982), 109-124.

[Ze] M. W. Zerner: Weak separation properties for self-similar sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124**, No. 11, (1996), 3529-3539.

[Zh] Y. Zhang: Dynamical upper bounds for Hausdorff dimension of invariant sets, *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **17**, (1997), 739-756.