



# Dinamikai rendszerek paraméterbecslése

Kovács Benedek  
Matematikai Analízis Tanszék  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezető: Dr. Tóth János  
Matematikai Analízis Tanszék  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

May 12, 2011

## 1 Bevezető

A munka célja, hogy a dinamikai rendszerek paraméterbecslésének témakörét matematikai, statisztikai elméletekkel megvizsgálja és eljárásokat javasoljon a paraméterek becslésére. A legtöbb megoldandó feladat biológiai és kémiai modellekkel, valamint hálózati technológiákkal kapcsolatos.

Munkám első részében egy új módszert javaslok időben inhomogén Poisson-folyamatok becslésére. Az általam bevezetett rekurzív becési eljárás nem csak jó statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik, használható on-line beczésre és gyorsabb, hatékonyabb az ismert eljárásoknál. Kidolgoztam a becési eljárás matematikai hátterét és tételekkel támsztom alá a szimulációs eredményeimet. Nagyon fontos, hogy számítógépes hálózatok esetén, gyakorlati alkalmazással magasabb kihasználtságot érhetünk el.

Telekommunikációs hálózatokban gyakran szűk keresztmetszet a jelzésforgalmi kapacitás. Sokszor szükséges magát a jelzésforgalmat optimalizálni, — amire módszert adok, — de sokszor ez nem elég és a hálózat ennek ellenére túlterhelődhet, pl.: földrengés, árvizek, tűz, stb. esetén. Ilyen helyzetekben a hívások közötti prioritások kezelése is alapvető fontosságú.

Munkám második felében a Token Bucket hívásengedélyezési eljárást vizsgálom és egy hatékony algoritmust javaslok a paramétereinek beállítására, hogy adott követelményeknek megfelelő karakterisztikával működjön.

A harmadik rész az úgynevezett "call gapping" típusú üzenetszűrési eljárással kapcsolatos. Kifejezetten olyan környezetben tárgyalom a problémát, ahol több különböző prioritású, illetve azonos prioritású, de különböző osztályú üzenetekből álló üzenetfolyamot kell szűrni. Egy ennek megfelelő mechanizmust dolgoztam ki és mutatok be, valamint azt a matematikai modellt, amivel a formalizált követelményeket tárgyalni lehet. A modell eleminek tűnik, azonban nagyon sok fontos, nem nyilvánvaló tényre világít rá az ilyen rendszerekkel és a velük kapcsolatos elméleti korlátokkal kapcsolatban.

Technikai megvalósítása implementálva van az Ericsson által fejlesztett telekommunikációs eszközökbe.

A dinamikus modellek egyik klasszikus alkalmazási területe a biológiai és kémiai reakciók leírása. A reakciókinetika területén, a paraméterbecslés a modell identifikációt és kalibrációt jelenti.

Két eltérő modell van vizsgálataim középpontjában. Az egyik az úgynevezett *globális determinisztikus* modell, mely közönséges differenciálegyenleteket használ, a másik pedig a *globális sztochasztikus* modell, mely diszkrét állapotterű, folytonos idejű sztochasztikus folyamatokat használ a reakciók leírására.

A *globális determinisztikus* modell esetén leginkább lineáris regressziót használnak paraméterbecslésre. A gond ezzel az, hogy nagyon sok mérést igényel és nagy számításigényű. A negyedik részben ezen modellek paramétereinek becslésére egy olyan, neurális hálózatokat alkalmazó eljárást javaslok, mely, — a hálózat tanítása után, — gyors paraméterbecslést tesz lehetővé lineáris és nem lineáris modellekre. Egy *mátrix inverziót* alkalmazó módszert is bemutatok, melyet kiterjeszttek a differenciálegyenletek szélesebb körére. A mérések és a numerikus integrálás hibáját modellezve, a becsléshez használt mintára adok korlátot.

Az ötödik részben foglalkozom a Markov-láncokat használó, folytonos idejű, diszkrét állapotterű *globális sztochasztikus* modellel, melyhez kapcsolódóan többek között Rényinek voltak fontos eredményei. Az ilyen modellek paraméterbecslésének kérdésére nem sok eredmény van (a triviálison kívül). Azzal az esettel foglalkozom, amikor az állapottér jóval nagyobb a mérések számánál, de az egy állapotból kiinduló lehetséges átmenettípusok száma már jóval kisebb. A becslés egyik alapötlete, hogy az első részben bemutatott intenzitásbecslést, vagy bármilyen hasonló intenzitásbecslési eljárást alkalmaz.

Bemutatom mindhárom módszer alkalmazását biológiai és kémiai modellekre. Égési modellek, a Volterra-Lotka egyenletek, a Brusszelator dinamika, a Michaelis-Menten reakció, a butadién transzport az emberi szervezetben és néhány más problémát vizsgáltam, szimuláltam, hogy alátámasszam a javaslataimat.

## 2 Új eredmények

Ebben a fejezetben mutatom be az új eredményeimet. *Tézisként* hivatkozok azokra a fontosabb kijelentésekre, melyeket az általam bevezetett és definiált módszerekről, a lemmákból és tételekből vonok le következtetésként.

### 2.1 Eljárás nemhomogén pontfolyamatok intenzitásbecslésére

A pontfolyamatok intenzitásának definiálásához Brémaud martingálokra alapuló definícióját veszem alapul. Az erre vonatkozó maximum likelihood becslés alapjait Ogata cikkében találhatjuk meg [Ogata (1978)].

A problémafelvetést telekommunikációs hálózati alkalmazások motiválják. A feladat egy jó leírást találni a jelzés- és adatforgalom sebességére. A forgalommal kapcsolatos eseményeket Erlang egy Poisson-folyamat ugrásaival modellezte [Erlang (1917)]. Általánosan elterjedt, népszerű technika az úgynevezett rejtett Markov-láncok alkalmazása. Ilyen speciális esetben a becslésre leginkább az Expectation Maximization eljárást alkalmazzák, mely fokozatosan közelíti a látens paraméterek maximum likelihood becslését (pl., [Dempster et al.(1977)]). Az öngerjesztő Hawkes-folyamat is logikus választásnak tűnik a forgalom modellezéséhez, hiszen a lényege, hogy bizonyos események a csomag, vagy üzenet újraküldését követelik meg és ilyen módon megváltoztatják az intenzitást. Mindezek ellenére, a legtöbb megvalósításkor egy egyszerű statisztikát használnak az alkalmazások. Az egységnyi idő alatt beérkező események számát használják becslésre. A cél, hogy egy egyszerű és hatékony módszert adjunk, mely számításigényét tekintve is megfelelő valós idejű rendszerekben.

Egy rekurzióval adott becslést javaslok, mely általános, időben változó intenzitású Poisson-folyamat intenzitásának becslésére használható. Egy ilyen becslés statisztikai tulajdonságait vizsgálom, támasztom alá tételekkel és szimulációs eredményekkel.

<p><b>1. Tézis</b> Egy statisztika családot javaslok, amely hatékonyan becsüli egy Poisson-folyamat időben változó intenzitását.</p>
--

**Definition 1 (Rekurziós Intenzitás Becslés (RIB))** *Tegyük fel, hogy a pontfolyamatot  $t_i$  ugrási időpontokban figyeljük meg és  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  jelenti az előző időponttól eltelt időt. Az intenzitás becslést a következő egyenlet definiálja:*

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(t_n; T) &:= \max\{1/T, (T\hat{\lambda}(t_{n-1}; T) - (t_n - t_{n-1})\hat{\lambda}(t_{n-1}; T) + 1)/T\}, \\ \hat{\lambda}(t_0; T) &:= 0\end{aligned}\tag{1}$$

### 2.1.1 Eredmények a becslés helyességére

Először is bevezetünk néhány jelölést a feltételes torzítottságra és szórásnégyzetre, melyek szükségesek az elméleti háttér tárgyalásához. A legfontosabb tulajdonságok ezekkel lesznek összefüggésben és a következő tételekkel vannak megfogalmazva.

**Proposition 1 ( $\hat{\lambda}$  torzítottsága.)** *A  $\hat{\lambda}(t_n; T)$  becslés torzítottsága azonos várható értékű  $\Delta t_i$ -vel rendelkező pontfolyamatra  $\mathbb{E}[\Delta t_i] \equiv \mathbb{E}[\Delta t] = \text{const.} \in \mathbb{R}^+$ , a következő:*

$$\hat{B}_n[T|F_s] = \frac{1}{T(1 - \mathbb{P}[T]) + \mathbb{E}[\Delta t|\Delta t < T]} - \mathbb{E}[\lambda(t_n)|F_s].$$

Hasonló eredményeket kapunk a szórásnégyzetre:

**Theorem 1 (A szórásnégyzet tart a nullához)** *Minden folyamatra, melyre  $\mathbb{E}[\Delta t_i] = \mathbb{E}[\Delta t] = \text{const.} < +\infty$  és  $\mathbb{E}[\Delta t_i^2] = \mathbb{E}[\Delta t^2] = \text{const.} < +\infty$ , igaz, hogy a szórásnégyzet nullához tart, azaz  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \text{V}\hat{\text{A}}\text{R}_{+\infty}[T] = 0$  majdnem biztosan.*

A bizonyítás lényege mindkét esetben hasonló. Bizonyításvázlat:

- A  $\hat{\lambda}(t_n)$  becslés egy Markov-lánc.
- Rekurziót állíthatunk fel a feltételes első és második momentumra.
- Geometriai sorokat kapunk, melyek konvergenciája szükséges.
- A bizonyítást a konvergenciakritériumok kiszámítása, majd némi határérték-számítás teszi teljessé.

Kiemelném a bizonyítás egyik lényeges elemét. A következő lemma egyszerűnek tűnik, de mindkét bizonyításban fontos szerepet játszik. Általánosságban is igaz a következő:

**Lemma 1** *Legyen  $\Delta t$  sűrűségfüggvénye  $f_t(s)$ , eloszlásfüggvénye  $F_t(s)$  és feltételes eloszlásfüggvénye  $F_t[T](s)$ , ahol  $0 < \Delta t < T$  és tegyük fel, hogy léteznek a következő feltételes momentumok:  $\mathbb{E}[\Delta t | \Delta t < T]$ ,  $\mathbb{E}[\Delta t^2 | \Delta t < T]$ , ...,  $\mathbb{E}[\Delta t^n | \Delta t < T]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ekkor*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{i+1} \mathbb{E}[\Delta t^i | \Delta t < T] / T^i < 1.$$

*Proof.* A bizonyításhoz először vegyük észre, hogy  $F_t(T) \leq 1$ , majd ez alapján

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{i+1} \int_0^T \frac{s^i}{T^i} \frac{f_t(s)}{F_t(T)} ds = \\ & = \int_0^T \left(1 - \frac{s}{T}\right)^n \frac{f_t(s)}{F_t(T)} ds < \int_0^T 1 \frac{f_t(s)}{F_t(T)} ds = 1 \end{aligned}$$

ahol az egyenlőtlenség a  $0 < s \leq T$  egyenlőtlenségből következik. ■

### 2.1.2 Eredmények a Poisson-folyamatra

Az eddigi eredmények  $n \rightarrow +\infty$  esetén adják meg a torzítottságot, adott  $T$  értékekre. Homogén Poisson-folyamat esetén a nagyobb  $T$  érték kisebb torzítottságot ad,  $T \rightarrow +\infty$  esetén pedig torzítatlanságot. Ezek a tulajdonságok nagyon fontosnak bizonyulnak az alkalmazásoknál.

**Proposition 2** *Homogén Poisson-folyamatra,  $\hat{\lambda}(t_n; T)$   $t_{n-1}$ -feltételes torzítottsága majdnem biztosan 0-hoz tart ahogyan  $T \rightarrow +\infty$ .*

A bizonyítás vázlata: Induljunk ki a torzítottságra adott zárt képletből. Nyilvánvaló, hogy mind  $T(1 - \mathbb{P}[T])$  és  $\mathbb{E}[\Delta t | \Delta t < T]$  monoton  $n$   $T$ -ben.

**Proposition 3 (Magasabb feltételes várhatóérték.)** *A  $\hat{\lambda}$  statisztika feltételes várható értéke mindig nagyobb, mint a Poisson-folyamat intenzitása:  $\lambda \leq \mathbb{E}[\hat{\lambda}(t_n, T) | F_n]$ .*

Ez a tulajdonság kifejezetten fontos az alkalmazások számára, hiszen lehetővé teszi például a torzítottságon alapuló prioritás kezelést telekommunikációs hálózatokban, sürgősségi hívások esetében.

### 2.1.3 A rekurzív becslő és a jelenleg használt módszerek összehasonlítása

**2. Tézis** A javasolt statisztika aszimptotikusan hasonló, de egy-egy lépésben jobb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a jelenleg használt, maximum likelihood alapon működő becslések, mert figyelembe veszi a legfrissebb mérhető információt.

A gyakorlatban az alább definiált Periodikus Intenzitás Becslés a legelterjedtebb, így én ezzel hasonlítom össze az általam fentebb javasoltat.

#### Definition 2 (Periodikus Intenzitás Becslő (PIB))

$$\bar{\lambda}(t_n; T) := \frac{N(t_n) - N((t_n - T) \wedge 0)}{t_n \wedge T}$$

$$\bar{\lambda}(0; T) := 0. \quad (2)$$

Megvizsgáltam a becslő statisztikai tulajdonságait a rekurzív becslő vizsgálatokor bevezetett feltételes torzítottság és variancia szerint. A következő tétel egy jól kezelhető ellenőrzést ad a torzítottság eldöntésére.

**Proposition 4** *Feltéve, hogy  $F_s, s \leq t_n - T$ , a  $\bar{\lambda}$  statisztika olyan  $\lambda$  intenzitások esetén ad torzítatlan becslést, ha  $\lambda' \in L_1$  és  $\mathbb{E}[\int_{t_n-T}^{t_n} u \lambda'(u) du | F_s] = 0$  minden  $t_n \in \mathbb{R}$  esetén.*

Nagyon fontos, hogy amennyiben a fenti feltételek nem teljesülnek, (pl.  $\lambda(t) = 1 + \sin(t)$  or  $\lambda(t) = 2ct$ ), úgy a becslés torzított lesz.

A két definíció által adott becslések közelítenek egymáshoz  $T \rightarrow +\infty$  esetén.

**Proposition 5** *Minden  $t_n$ -re:  $\bar{\lambda}(t_n; +\infty) = \hat{\lambda}(t_n; +\infty)$ .*

A következő kulcsfontosságú tétel hasonlítja össze a  $\hat{\lambda}$  és  $\bar{\lambda}$  becsléseket.

**Theorem 2** *Tegyük fel, hogy  $t_{n-1}$ -ben egy torzítatlan becslés áll a rendelkezésünkre, aminek az értéke  $\lambda_{n-1}$  megegyezik az intenzitás értékével. Tegyük fel továbbá, hogy  $\mathbb{P}[\Delta t < T] = 1$ . A véletlen  $t_n$  időponthoz tartozó átlagos intenzitást definiáljuk a  $\lambda_n = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda(u) du$  egyenlettel. Ekkor a következő állítások igazak:*

1. *A  $\bar{\lambda}$  becslés  $F_{n-1}$ -feltételes torzítottsága (azaz  $\bar{B}_n[T | F_{n-1}]$ ),  $t_n$ -ben nulla, akkor és csakis akkor, ha  $\lambda_{n-1} = \lambda_n$  minden  $0 < T$ -re;*

2. A  $\hat{\lambda}$  becslés  $F_{n-1}$ -feltételes torzítottsága (azaz  $\hat{B}_n[T|F_{n-1}]$ ),  $t_n$ -ben nulla, akkor és csakis akkor, ha  $\lambda_{n-1} = \lambda_n$  vagy  $\lambda_n = 1/T$  minden  $0 < T$ -re;
3. Ha  $\lambda_{n-1} \neq \lambda_n$ , akkor  $\hat{B}_n[T|F_{n-1}] \leq \bar{B}_n[T|F_{n-1}]$  akkor és csakis akkor, ha  $\lambda_n \leq \frac{1}{2}(1/T)$ .

A bizonyítások menetéről:

- Mindkét statisztika megadható a  $\hat{\lambda}$  definíciójához hasonló, rekurzív definícióval.
- Egy diszkrét időpontokban megfigyelt folyamat esetén, ha csak adott időpillanatokban tudjuk számítani az intenzitást, akkor az intenzitás definíciója nem egyértelmű. (A gyakorlatban általában diszkrét megfigyelésekről beszélhetünk.)
- Az átlagos intenzitás  $\lambda_n = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda(u) du$  minden felmerülő esetben definiálható.
- A fenti eszközök bevezetése után a tételek bizonyítása elemi számításokat igényel.

Úgy sejttem, hogy  $\hat{\lambda}$  statisztika  $F_{n-1}$ -feltételes varianciája alacsonyabb, mint a  $\bar{\lambda}$  statisztikáé adott  $t_n$ -ben, a legtöbb esetben, de ezt bizonyítani nem tudom.

#### 2.1.4 Token Bucket becslés a forgalom intenzitására

Telekommunikációs hálózatok jelzésforgalom intenzitásának becslésére szoktak egy Token Bucket módszeren alapuló statisztikát használni a gyakorlatban. Ez a fajta statisztika azonban nem alkalmas inenzitás becslésre.

**3. Tézis** A Token bucketen alapuló statisztika nem alkalmazható intenzitás becslésre, így nem szabad használni a fair kiszolgálás biztosítására.

**Definition 3 (Token Bucketen alapuló becslés)**

$$\tilde{\lambda}(t_n) = \frac{\chi(t_n)}{T_j} + \max\left\{0, \frac{T\tilde{\lambda}(t_{n-1}) - (t_n - t_{n-1})r(t_n)}{T}\right\}. \quad (3)$$



**Proposition 6** ( $\tilde{\lambda}(t_n; T, r)$  torzítottsága.) *Független azonos eloszlású pont-folyamat esetén, ahol  $\mathbb{E}[\Delta t | \Delta t < \infty]$ , a  $\tilde{\lambda}(t_n; T, r)$  statisztika  $\lambda(t_n)$  vonatkozó torzítottsága a következő:*

$$\tilde{B}_n[T, r | F_s] = \frac{1}{T} \frac{1 - r\mathbb{E}[\Delta t | \Delta t < T]}{1 - \mathbb{P}[T]} - \mathbb{E}[\lambda(t_n) | F_s]$$

A baj itt az, hogy  $T \rightarrow +\infty$  esetén a torzítottság mértéke tetszőlegesen nagy illetve kicsit lehet,  $T$  értékétől függetlenül. Ezt a statisztikát nem szabad intenzitásbecslésre használni. Elméletileg, ha  $\lambda = r$  akkor  $\tilde{\lambda} \sim \text{Uniform}(0, r)$ . A továbbiakban nem tekintjük ezt intenzitás becslésnek.

## 2.2 A Token Bucket mechanizmus paramétereinek beállítása

A Token Bucket mechanizmus a hívás engedélyezés egyik legelterjedtebb mechanizmusa. A matematikai háttérrel a Markov-láncok technikájára építem és jópár kisebb tételt adok a vízjelek beállítására, amikkel elérhető a kívánt átviteli karakterisztika.

**4. Tézis** Token Bucket mechanizmuson alapuló jelzésforgalom szűrés, Crawford [Crawford (1980)] szabadalma és az ITU-T [ITU-T H.248.11] ajánlás alapján, modellezhető egy folytonos idejű, diszkrét állapotterű Markov-lánccal és így az elutasítási valószínűségek kiszámíthatók. Az itt kidolgozott eljárásokkal a vízjeleket hatékonyan állíthatjuk be, hogy a mechanizmus így megfeleljen a telekommunikációs rendszerekre adott követelményeknek. [CP2-IEEE-SoftCom-2009]

**Definition 4** (Token Bucket hívásszűrési stratégia ( $\gamma_t(r, \mathbf{W})$ )) *Adottak diszkrét események, —kérések, —  $t_0, t_1, \dots, t_n$  időpontokban. Minden kérésnek van egy  $j, j = 1..m$  prioritási szintje. A Token Bucket mechanizmus az adott kérést elfogadhatja vagy visszautasíthatja. Erre egy Bucket telítettséget tart nyilván, a következőképpen:*

$$b(t) = \max\{\chi(t), b(t_{n-1}) - r(t_n - t_{n-1}) + \chi(t)\}, \quad (4)$$

ahol  $\chi(t) = 1$  pontosan akkor, ha éppen egy kérésről dönteni kell. A  $j$ -edik prioritási szinttel rendelkező kérést elfogadja, ha  $b(t_n) \leq W_j$ , ahol  $W_j$  a  $j$ -edik vízjel,  $\mathbf{W} = (W_1, W_2, \dots, W_m)$  a vízjel vektor. Ha a döntés elfogadás, akkor a fenti definíció alapján  $b$  Bucket telítettség értékét frissíti a mechanizmus. Ha a hívást elutasítása a döntés, akkor  $b(t_n)$ -t  $\chi(t) = 0$ -val kell újraszámolni és frissíteni.

A token generálási ráta a Token Bucketben lehet determinisztikus vagy sztochasztikus, diszkrét vagy folytonos idejű. A sztochasztikus esetben a két token generálása közötti idő exponenciális eloszlású. Ebben az esetben egy Markov-láncot írhatunk fel modellként. Az állapotok legyenek  $\mathbf{S} = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_{W_m})$ , a bejövő forgalom rátája pedig  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  minden egyes  $1, \dots, m$  prioritási osztályra és  $\mu$  legyen a token generálási ráta,  $\mathbf{W}$  pedig a vízjel vektor. A Token Bucket mechanizmust ekkor a  $\mathfrak{M} = (\mathbf{S}, \Lambda, \mu, \mathbf{W})$  diszkrét állapotterű, folytonos idejű Markov-lánc írja le.

Tegyük fel, hogy  $m = 2$  prioritási osztályunk és ezekhez rendelve  $m = 2$  vízjelünk ( $W_1 = 3, W_2 = 5$ ) van. Tegyük fel továbbá, hogy a tokenek  $\mu$  paraméter exponenciális időközönként generálódnak, és a bejövő kérések  $\lambda_1, \lambda_2$  rátájú Poisson-folyamattal érkeznek. Ebben az esetben a rendszert modellező Markov-lánc mátrixa a következő:

$$\begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & (\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda_1 + \lambda_2) - \mu & (\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda_1 + \lambda_2) - \mu & (\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda_1 - \mu & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\lambda_1 - \mu & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Legyen  $p_i = \mathbb{P}[S = S_i]$  annak a valószínűsége, hogy az  $\mathfrak{M} = (\mathbf{S}, \Lambda, \mu, \mathbf{W})$  Markov-lánc az  $S_i$  állapotban van. A  $j$ -edik prioritási szintű *kérés* visszautasításának feltételes várható értéke pontosan annak a valószínűsége, hogy a lánc a  $S_{W_j}$  állapotnál nagyobb sorszámú állapotban van:  $\mathbb{P}[\text{"Reject"} | j] = \sum_{k > W_j} p_k$  amiből  $\mathbb{P}[\text{"Reject"} \text{ of type } j] = \mathbb{P}[\text{"Reject"} | j] \mathbb{P}[j] = \sum_{k > W_j} p_k \mathbb{P}[j]$ . Ezek alapján egy *kérés* visszautasításának a valószínűsége  $\mathbb{P}[\text{"Reject"}] = \sum \mathbb{P}[\text{"Reject"} | j] = \sum \mathbb{P}[\text{"Reject"} | j] \mathbb{P}[j] = \sum \sum_{k > W_j} p_k \mathbb{P}[j]$ .

A legfontosabb állítások:

**Proposition 7** *Az  $m = 1$  paraméterű Token Bucket-ben a visszutasítás valószínűsége  $\lambda = \lambda_1$ -től függetlenül csökken, ha  $W$  nő.*

Ez alapján nyilvánvaló, hogy túlterheltség és kihasználatlanság esetén is nő az elfogadás valószínűsége, ha  $W$ -t növeljük.

**Proposition 8** *A következő, intuitív állítások igazak:*

- $(W'_j = W_j + 1 \& \Lambda_{W_j} > 1)$   
 $\Rightarrow (p'_{i \leq W_j} < p_{i \leq W_j} \& p'_{i > W_j} \geq p_{i > W_j})$

- $(\lambda'_j = \lambda_j + \epsilon > \lambda_j)$   
 $\Rightarrow (p'_{i \leq W_j} < p_{i \leq W_j} \& p'_{i > W_j} \geq p_{i > W_j}),$

ahol  $\Lambda_w = \sum_{j=1}^w \lambda_j.$

Tehát, ha a rendszer túlterhelt, akkor egy vízjelszint növelése megnöveli annak a valószínűségét, hogy egy annál nagyobb állapotban vagyunk, vagyis néhányal több tokent fogyaszthatunk el, szóval nagyobb valószínűséggel lesz kevesebb tartalék. A helyzet hasonló, ha a  $j$  prioritási szintű kérések száma növekszik (miközben a többi változatlan), azaz ebben a helyzetben is valószínűbb, hogy magasabb állapotban vagyunk és így a *visszautasítás* valószínűsége nő.

Ezeket az eredményeket felhasználva javaslok egy algoritmust arra, hogy hogyan lehet adott átviteli követelményekhez igazítani a vízjelszinteket.

A matematikai szempontból értelmes átviteli követelmények maximális  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  kérés veszteség valószínűségeket írnak elő, a prioritási szintek adott  $\mathbb{P}[j]$  eloszlásával és adott  $\Lambda$  bejövő rátára. Ezek alapján definiálható a *lehetséges* vízjel vektorok halmaza, melyekre igaz, hogy kielégítik a követelményeket:

**Definition 5 (Lehetséges vízjelvektorok, fix forgalmi paraméterek esetén.)**

$$\mathfrak{W}_{\text{fix}}(\lambda, \mathbf{L}_{\text{fix}}) = \{\mathbf{W} : \text{Loss}[\lambda, \mathbf{W}] < \mathbf{L}_{\text{fix}}\}$$

A fenti feltételekhez hatékonyan talál megfelelő vízjelvektort a következő, általam javasolt algoritmus:

```

Check:=Function[j,
  For[k = m to j do
    Repeat
      Check[k];
      W_k ++
    until Loss_k < L_k
  ]
];
Run{Check[1]}.

```

A fenti 7. és 8. tételek (Proposition 7 és Proposition 8) alapján az  $m$ -edik prioritási osztály elutasításának valószínűségének csökkentése csakis  $W_m$  növelésével érhető el. Ezekután ciklikusan addig megyünk végig a prioritási szinteken, hogy minden színre megfelelő értéket kapjunk. Az algoritmus nem biztos, hogy a legkisebb lehetséges beállítást találja meg, de gyorsan talál egy jót.

## 2.3 Sorbanállás nélküli hívásszűrési mechanizmusok

A hálózatoptimalizálás és a forgalom osztályozás mindig a távközlési ipar figyelmének középpontjában állt. Az IP mobilitás megoldásoknál a jelzésforgalmi terhelés minimalizálásának céljából javasolt korábbi algoritmus [J6-LTRACK-JOURNAL] és [CP4-HTE 2005] vonatkozásában végeztem paraméter optimalizálást. Ez az algoritmus később több ízben is tovább lett gondolva, például a [J5-MMM-Telecom], [J5b-MMM-Hiradas\*], [HTE 2006\*] és [CP3-MOMM 2006] publikációkban, amelyekben az IP mobilitás rendszerek hívásátadási stratégiájának optimalizálására használható általános modellre tettünk javaslatot. Az ott ismert eredmények az IP mobilitás újszerű megközelítésére irányuló javaslatokhoz vezettek, amely hívásmegszakítás döntés esetében minden vezérlési és irányítási funkciót átad a hálózattól a terminálnak (lásd pl. [J3-CMFS-Telecom] és [Networks 2008\*]). További megfontolásokat fogalmaztunk meg a javaslatról és általam kifejlesztett algoritmusról [MOMM 2008\*]-ban.

Másrészről viszont, a hálózatok gondos tervezése és optimalizálása ellenére gyakran jelentkeznek túlterheléses helyzetek például hálózathibák esetében, rossz méretezés vagy különleges események miatt, mint pl. katasztrófák, futballmérkőzések, népszerű tévé show-műsorok, földrengések. Az ilyen esetek kezelése céljából, a hálózatba túlterhelés menedzsment rendszert (overload control system) illesztnek, amely szükség esetén irányítja és korlátozza a jelzési üzenetek vagy adatcsomagok áramlását. (Adatcsomagok esetében ezeket a mechanizmusokat gyakran torlódás védelmi mechanizmusnak nevezik.) Jó szolgáltatásminőség és hálózatátviteli jellemzők elérése érdekében úgynevezett hívásszűrő szelepet alkalmaznak, amely valós időben szűr, anélkül, hogy késleltetést alkalmazna, azaz, anélkül, hogy sorba állítaná a *kéréseket*. Vannak olyan esetek, amelyekben megengedett a sorbanállás (queuing), de értekezésemben ezekkel az esetekkel nem foglalkoztam.

Új módszereket és algoritmusokat dolgoztam ki arra, hogyan szűrhetők a kérések és a csomagok, bizonyos követelmények szempontjából, és arra, hogy ez hogyan valósítható meg Internet Multimedia Subsystem, vagy bármely más hálózat esetében. (Referencia: szabadalmaim [P2], [P1] és [P3] és publikációm: [CP1-IARIA-InfoSys-2011]). A követelmények hasonlóak a Weighted Fair Queueing mechanizmusokéhoz, azonban itt a késleltetés nem megengedett. Matematikai leírást adok a rendszerek jobb megértése céljából és annak bizonyítására, hogy a feltalált és kifejlesztett módszerek kielégítik a követelményeket.

A követelmények szóbeli megfogalmazásai a következők:

- "A" követelmény (maximális átvitel korláttal): Egyetlen kérés sem utasítható vissza, amennyiben a rendszerben elegendő rendelkezésre álló kapacitás van a kiszolgálására, de egyetlen kérés sem engedélyezhető, amennyiben a rendszerben nincs elegendő rendelkezésre álló kapacitás a kiszolgálására.
- "B" követelmény (prioritási szintek kezelése): Mindegyik kéréshez prioritási szint rendelhető, és a magasabb prioritással rendelkező kérés az alacsonyabb prioritással rendelkező kárára engedélyezendő.
- "C" követelmény (átvitel megosztása forgalmi osztályok között): A kérések osztályokba sorolhatók, és az  $i$  forgalmi osztály számára a cél kapacitásának  $s_i$  részét biztosítani kell.

**5. Tézis** Új módszerek: ráta alapú hívásszűrés (Rate Based (RB) call gapping), torzított becslésen alapuló prioritás kezelés (BE), forgalmi osztályok fair kiszolgálása cél ráta alapján (GR) és prioritás emelés (PR) módszerrel. Együtt, vagy külön-külön használva a jelenlegi pl. Token Bucket hívásszűrés (TB) több szintű vízjeles prioritás kezelés (MW) mechanizmusokkal, széles skálájú követelményeknek megfelelő szabályozó szelepet konstruálhatunk. [CP1-IARIA-InfoSys-2011]

**Definition 6 (Ráta alapú hívásszűrés (Rate Based call gapping (RB)))**  
*Megmérjük az előzetes forgalmi rátát az elfogadás feltételével és ezt összehasonlítjuk a megengedett kapacitással. A visszautasításról és elfogadásról értelemszerűen döntünk.*

**Definition 7 (Torzított becslésen alapuló prioritás kezelés (BE))** [P1]  
*Olyan becslést kell alkalmazni a különböző szintű kérések bejövő rátájának mérésére, melyre igaz, hogy a torzítása kisebb, illetve nagyobb, aszerint, hogy a prioritási szint is kisebb, illetve nagyobb.*

**Definition 8 (Fair megosztás cél ráta alkalmazásával (GR))** *Osztályonként kell mérni az előzetes hívásfogadást és ennek megfelelően beállítani a kapacitás határokat.*

**Definition 9 (Fair megosztás prioritás emeléssel (PR))** [P1] *Osztályonként kell mérni az előzetes hívásfogadást és csökkenteni kell az adott osztályú kérés prioritási szintjét, ha túllépte a számára fenntartott kapacitást.*

Jópár tétellel és bizonyítással támasztottam alá a fentiek működőképességét, illetve mutattam meg a helyes működés korlátait. A fentiekből összeállított, legjobb karakterisztikájú hívás szűrési módszerek a következők.

### 2.3.1 Sorbanállás mentes hívásszűrési stratégia

**6. Tézis** Két hívás szűrési módszert javaslok, (ezek  $\gamma_g, \gamma_x$ ), melyek késleltetés mentesek és eleget tesznek a maximális, de korlátozott áteresztés, prioritás és forgalom osztályok közötti tetszőleges fair megosztás követelményeinek. Ezek közül,  $\gamma_x$  rendelkezik a legjobb átviteli karakterisztikával, mely jobb, mint a Token Bucket átviteli karakterisztikája. [CP1-IARIA-InfoSys-2011]

**Definition 10** ( $\gamma_g$  stratégia) *Tegyük fel, hogy  $t_n$  időpontban egy kérés érkezik a  $\{t_{n-1}, \hat{\rho}_i(t_{n-1}), \hat{a}_i(t_{n-1})\}$  és  $c(t_n)$  (maximális kapacitás) állapotú rendszerbe:*

1. *Határozzuk meg a prioritás-állandókat:  $T_j$ ;*
2. *frissítsük minden  $i$  osztályra a kérés érkezési rátát:  $\hat{r}_k(t_n) - t \chi_k(t_n) = 1$ -gyel, ha  $i = k$ , és 0-val egyébként;*
3. *minden  $i$  osztályra számítsuk ki az előzetes átviteli rátát:  $\hat{a}_k(t_n) - t \chi_k(t_n) = 1$ -gyel, ha  $i = k$ , és 0-val egyébként;*
4. *csakis az aktuális  $i$ -edig osztályra számítsuk ki a korlátozási szintet:  $g_i(t_n) - t$ ;*
5. *ha  $\hat{a}_i \leq g_i$  akkor elfogadjuk a kérést és  $a(t_n) := \alpha(t_n)$ , egyébként pedig visszautasítjuk a kérést és  $\hat{a}_i(t_n) - t \chi_k(t) = 0$ -val frissítjük ( $\chi_k(t) = 1$  helyett),  $\forall k(!)$ ;*
6. *a következő kérés érkezésekor 1-gyel folytatjuk.*

*Javasoljuk a  $\hat{\rho}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{a}_i$  értékek frissítését a következő szerint:*

$$\hat{\lambda}(t_n) := \frac{\chi(t_n)}{T_j} + \max\left\{0, \frac{T_j \hat{a}(t_{n-1}) - (t_n - t_{n-1}) \hat{a}(t_{n-1})}{T_j}\right\},$$

*ahol  $\hat{a}$  egy becslés lesz, ugyanaz, mint a javasolt intenzitás definíció, ami aszimptotikusan torzítatlan a  $\lambda(t)$  valós intenzitásra, ha  $T \rightarrow +\infty$ , és így helyettesíthető  $\hat{\rho}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{a}_i$ -vel, ahol  $\chi_i(t_{n-1}) = 1$  akkor és csakis akkor, ha a*

kérés az  $i$ -edik osztályba tartozik és 0 egyébként. Fontos megjegyezni, hogy a  $T_j$  paraméter mindig az adott prioritási szintnek megfelelő.

Bevezetjük az  $u(t)$  (elzetes elhasznált kapacitást) a prioritás kezelési "B" követelmény figyelembevételével a következőképpen:

$$\begin{aligned} u(t) &:= \sum_{\forall i} \min\{s_i c(t), \hat{\rho}_i(t)\} \\ &= \sum_{\hat{\rho}_i(t) \leq s_i c(t)} \hat{\rho}_i(t) + \sum_{s_i c(t) < \hat{\rho}_i(t)} s_i c(t) \end{aligned}$$

Tehát a maradék, szabad kapacitás a rendszerben  $c(t) - u(t)$ . Ezt oszthatjuk fel azon osztályok között, melyek bejövő rátája nagyobb, mint az, amennyit nekik garantálnunk kell  $\hat{\rho}_i(t) > s_i c(t)$ . Ezek után a célfüggvény lehet pl.

$$g_i(t) := \min\left\{\hat{\rho}_i(t), s_i c(t) + (\hat{\rho}_i(t) - s_i c(t)) \frac{c(t) - u(t)}{\rho - u(t)}\right\}.$$

A jobb átviteli karakterisztika érdekében a következő kiterjesztést javaslom:

**Definition 11** Ráta alapú hívásszűrés Token Bucket jellegű összesített átmeneti karakterisztikával.  $\gamma_x$ : Induljunk ki  $\gamma_g$ -ből, legyenek  $\hat{\rho}, \hat{\alpha}, \hat{a}, u, g_i$ , ahogyan fent is és legyen  $T_j(t) = W_j/r(t)$ . Itt  $W_j$  és  $b$  az eredeti, Token Bucket paraméterei. Minden lépésben kövessük a  $\gamma_g$  eljárást, kivéve a döntést. A döntésre a következő egyenletet használjuk:  $\frac{b(t_n)}{W_j} \hat{a}_i(t_n) \leq g_i(t_n)$ .

Ahogyan az 1. ábra (Figure 1) mutatja, mindhárom mechanizmus ( $\gamma_t(\text{TokenBucket}), \gamma_g, \gamma_x$ ) korlátozza az átengedett forgalmat. A Token Bucket megenged nagyobb csúcsokat is, melyek veszélyesek lehetne, míg  $\gamma_g$  túl konzervatív. A kettőt ötvöző  $\gamma_x$  adja a legjobb megoldást a feltett követelmények szempontjából.

A jelen példában 600 kéresemből a  $\gamma_t, \gamma_g, \gamma_x$  stratégiák 415, 386, 404 kérést engednek át.

### 2.3.2 Kiegészítő tézis: prioritás kezelés torzított becsléssel

**7. Tézis** A prioritás kezelés megoldható torzított becsléssel ráta alapú hívás engedélyezés esetén. A rekurzív intenzitás becslést alacsonyabb  $T$  paraméterrel kell számítani, nagyobb prioritású kérés esetén.

Először is fontos, hogy a rekurzív becslés torzítottsága negatív Poisson-folyamatra, azaz a következő igaz:

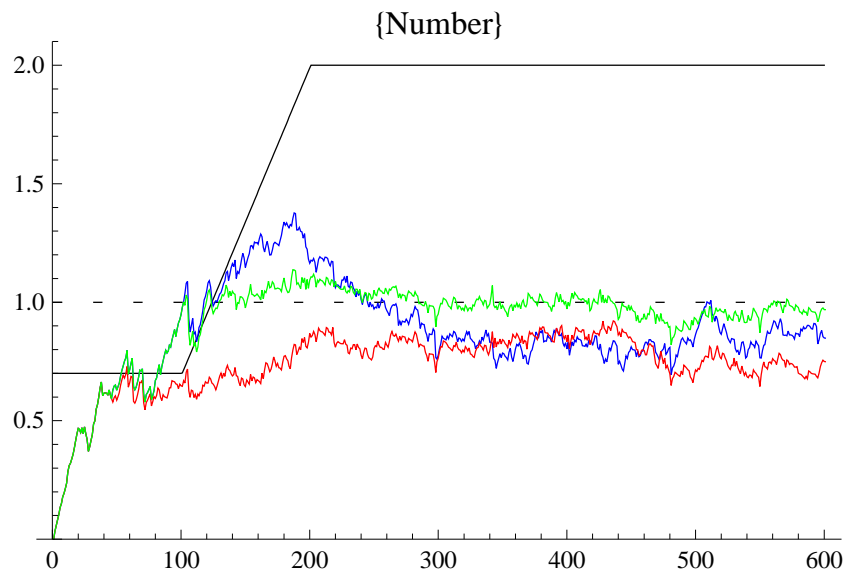


Figure 1: The new algorithm ( $\gamma_g$ ) on aggregate level. (Black: nominal offer rate, red: the token bucket's, blue:  $\gamma_g$ 's, green:  $\gamma_x$ 's throughput.)

**Theorem 3** *Poisson-folyamat esetén:*

$$\frac{1}{T(1 - F[T]) + E[\Delta t | \Delta t < T]} > \lambda.$$

**Theorem 4** *Az abszolút torzítottság magasabb kisebb  $T$ -re, így az alulbecslés  $T$ -ben szigorúan monoton csökken.*

$$\frac{1}{T(1 - F[T]) + E[\Delta t | \Delta t < T]} < \frac{1}{T'(1 - F[T']) + E[\Delta t | \Delta t < T']},$$

ha  $T < T'$ .

**Validation** A javasolt ráta alapú hívásengedélyeztetési módszert először *Mathematica* [5]-ban szimuláltam és hitelesítettem. A stratégiát a TISPAN (Telephony over IP and Signaling and Protocols for an Advanced Network) New Generation Networks sztenderdizáció kereteiben szabadalmaztattam és jelenleg az Ericsson megfelelő termékeiben aktívan használják.



## 2.4 Parameterbecslés *mátrix invertálást* használó módszerrel

Ebben a részben bizonyos típusú differenciálegyenletek paraméterbecsléséről lesz szó.

Az alapötlet a paraméterben lineáris rendszerekre működik. Vegyünk egy komplex kémiai rendszert az alábbi reakciólépésekkel leírva:

$$\sum_{m=1}^{N_c} \alpha(m, r) X(m) \rightarrow \sum_{m=1}^{N_c} \beta(m, r) X(m), r = 1, 2, \dots, N_k. \quad (5)$$

A megszokott tömeghatás kinetikai típusú rendszert egy Cauchy probléma írja le:

$$\begin{aligned} \dot{c}_m(t) &= \sum_{m=1}^{N_c} (\beta(m, r) - \alpha(m, r)) k(r) \\ &\quad \prod_{p=1}^{N_c} c_p^{\alpha(p, r)}(t) \\ c_m(0) &= c_m^0 \quad (m = 1, 2, \dots, N_c), \end{aligned} \quad (6)$$

ahol  $c_m(t) := [X(m)](t)$  ( $m = 1, 2, \dots, N_c$ ) az  $m$ -edik anyagfajta koncentrációja és  $k_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N_k$ ) a megfelelő reakciók sebességi állandója (5). Egyértelmű, hogy (6) felírható a következőképpen:

$$\dot{c}(t) = F(c(t))k \quad c(0) = c^0 \quad (7)$$

a  $c$ -re vonatkozó lineáris operátorral,  $F(c(t)) \in \mathbb{R}^{N_k} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c}$  ami a reakciók struktúráját képezi le, a reakcióknak megfelelően.

A tömeghatás kinetika garantálja a paraméterektől való lineáris függést a jobb oldalon, de nem szükséges feltétel. Ha a jobboldal inhomogén lineáris függvénye a paramétereknek, akkor is működik a módszer, kisebb módosításokkal. A (7) egyenlet általánosan a következőképpen írható:

$$c(t_n) - c^0 = \int_0^{t_n} F(c(s)) ds \cdot k + \int_0^{t_n} F_r(c(s)) ds.$$

**8. Tézis** Ha a mátrix  $(\int_0^{t_n} F(c(s))ds)^\top (\int_0^{t_n} F(c(s))ds)$  invertálható  $(\int_0^t F(c(s))ds)$  pszeudinverze mindig számolható), akkor a  $k$  paraméterre explicit egyenlet írható fel [J4-ANN-AMCS-2007]:

$$\hat{k} = \left( \left( \int_0^{t_n} F(c(s))ds \right)^\top \left( \int_0^{t_n} F(c(s))ds \right) \right)^{-1} \left( \int_0^{t_n} F(c(s))ds \right)^\top ((c(t_n) - c^0) - \int_0^{t_n} F_r(c(s))ds).$$

A *mátrix invertálásos* becslés eredeti ötlete a [Hangos et al. (1998)] cikkben már bevezetésre került, én ezt dolgoztam ki és alkalmaztam széles körben.

A *matrix invertálásos* módszer előnye, hogy csak az integrált kell jól számítani és onnan a becslés már nyilvánvaló. Az egyetlen gyenge pontja a mátrix inverziós lépés, az integrálás által generált numerikus hiba miatt. Éppen ezért számításokat végeztem a lehetséges hiba behatárolására.

#### 2.4.1 Korlátok a *mátrix invertálást* használó módszerben az integrál hibájára

**9. Tézis** Explicit formulával adható korlát a mérési hibára a *mátrix invertálást* használó módszer esetén.

Legyen egy autonóm rendszerünk:  $\dot{c}(t) = kf(c(t))$ ,  $c(0) = c_0$  (egy változóval az egyszerűség kedvéért) és méréseink  $(\tilde{c}(t_i) = c(t_i) + \xi(t_i), \xi(t_i) \sim N(0, \xi^2))$ . Tegyük fel, hogy  $f(c(t_i) + \xi(t_i)) = f(c(t_i)) + \xi(t_i) \sim N(c(t_i), \xi_c^2)$  és azt, hogy ezek páronként függetlenek vagyis, a hiba csak a mérőeszközből adódik. (Ez a legtöbb gyakorlati esetben igaz.)

Két szélsőséges stratégiát vizsgálok meg, amivel a model felépíthető. Az egyik lineáris regresszióhoz vezet, a másik az egylépéses, explicit paraméterbecsléshez.

- **Model #1.** Ebben a modelben összesen  $n$  darab mintát használunk, melyeket a következő egyenletekkel kapunk meg:

$$\tilde{c}^1(t_i) := \tilde{c}(0) + k \int_0^{t_i} f(\tilde{c}(s))ds,$$

feltéve, hogy  $m \in \mathbb{R}$  darab mérésünk van és  $m - n + 1 \leq i \leq m$ .

- **Model #2.** Készítsünk megint  $n$  mintát, de most a következő egyenletekkel:

$$\tilde{c}^2(t_i) := \tilde{c}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tilde{c}(s))ds.$$

A mért rendszer dimamikáját az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletekkel írhatjuk le (modellenként egy-egy egyenlet):

$$\tilde{c}^1 = \tilde{c}(0) + k \int_0^{t_i} f(c(s))ds + k \int_0^{t_i} \xi dW, i \in [m - n + 1, m]$$

$$\tilde{c}^1 = \tilde{c}(0) + k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(c(s))ds + k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi dW, i \in [1, n].$$

A megoldások pedig a következők:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{c}^1(t_i)] &= c_0 a^{kt_i}, VAR[\tilde{c}^1(t_i)] = k(e^{kt_i} - 1), \\ \mathbb{E}[\tilde{c}^1(t_i)] &= c_{t_{i-1}} a^{k(t_i - t_{i-1})}, VAR[\tilde{c}^1(t_i)] = k(e^{k(t_i - t_{i-1})} - 1). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a varianciák léteznek és legyen  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_f \Delta / (i - 1) = \xi_{\#}$  és  $\lim_{(t_i - t_{i-1}) \rightarrow +0} \xi_f \Delta / (i - 1) = \xi_{\Delta}$ . Ezeket a fentiekkel összevetve a következő korlátok adódnak az integrálás hibájára:

$$\begin{aligned} W_{1,\infty} &= V_{1,\infty} + \xi_{\Delta} = -k + \xi_{\#}, \\ v_{2,\min} + \xi_{\#} &\geq W_{2,\infty} = V_{2,\infty} + \xi_{\#} \leq v_{2,\max} + \xi_{\#}, \\ v_{1,\inf} + \xi_{\Delta} &< W_{1,0} = V_{1,0} + \xi_{\Delta} < v_{1,\sup} + \xi_{\Delta}, \\ W_{2,0} &= V_{2,0} + \xi_{\Delta} = 0. \end{aligned}$$

## 2.5 Átmeneti valószínűségek becslése folytonos idejű, diszkrét állapotterű sztochasztikus modellekben

**10. Tézis** Javaslok egy módszert, mellyel diszkrét állapotterű, folytonos idejű Markov-láncok átmenet valószínűségei becsülhetők. Az alapvető ötlet, hogy az állapotátmenetek között eltelt időt nem közvetlenül, hanem intenzitás becslésen keresztül használjuk. A létező módszerek vagy nem becsülik jól a paramétereket, vagy túl sok mérésre van szükségük, ami valamikor elméletileg sem kivitelezhető. Az általam itt bemutatott módszer kevés mérés esetén is jól becsül, illetve az általam javasolt rekurzív intenzitás becsléssel, vagy a Haar-Fisz transzformáción alapuló becsléssel alkalmazva pontos lesz. [J0-IEM-TECHM-2011]

**Definition 12** Legyen egy olyan diszkrét állapotterű rendszerünk, melyben összesen  $m \in \mathbb{R}$  féle állapotátmenet lehetséges. Azaz, csak korlátos számú másik állapot érhető el egy adott állapotból. Ez a korlát  $m$  és az átmenet típusokat az  $\mathbf{T}_j$  vektor jelöli,  $j = 1, \dots, m$ . A modellt a következő egyenlet írja le:

$$P_j(t) = \Delta t k_j f_j(\mathbf{s}(t)) + o(\Delta t), j = 1 \dots m, \quad (8)$$

ahol  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$  a megbecsülendő állapotátmenetek,  $f_j : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$  egy ismert leképezés ami az állapotoktól függővé teszi az állapotátmenet valószínűséget. Minden  $f_j$ -hez adott  $k_j$  rendelhető.

A fenti, (8) egyenletet a következőképpen írhatjuk:  $k_j \cong P_j(t)/(\Delta t f_j(\mathbf{s}(t))), j = 1, \dots, m$ . Az ötlet, hogy  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ -t az intenzitással becsüljük:  $\lambda(t_n) \simeq 1/(t_{n+1} - t_n)$ . Ez egy első momentum típusú becslés lesz, mert minden Markov modelben  $(t_{n+1} - t_n) \sim \text{Exp}[\lambda(t_n)]$ . A  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_m)$  valószínűségeket a relatív frekvenciáikkal közelítjük, ami maximum likelihood becslést jelent. A probléma itt az, hogy sok esetben az állapotok száma meghaladja a méréseink számát és így nem kapunk közvetlenül jó becslést  $P_j$ -re. Ennek a megoldására a következő becslést vezetjük be:

**Definition 13** [J0-IEM-TECHM-2011] Az  $\mathbf{s}(t_i)$  állapotok mérhetőek minden  $t_i$  időpillanatban. Legyen  $\mathbf{r}(t_i) = (r_1, r_2, \dots, r_m)$  definiálva a következő egyenlettel  $r_j(t_i) = \text{dist}^{-1}(\mathbf{s}(t_{i+1}) - (\mathbf{s}(t_i) + \mathbf{T}_j))$  ha az átmenet a  $j$ -edik típusú. Ekkor  $\mathbf{k}$  a következőképpen becsülhető:

$$\check{\mathbf{k}}_j = \left( \sum_{i=1}^n \frac{r_j(t_i) \check{\lambda}(t_i)}{f_j(\mathbf{s}(t_i))} \right) / \left( \sum_{i=1}^n r_j(t_i) \right), \quad (9)$$

vagyis, azon becslések átlaga, amikor a  $j$  típusú átmenet történt. A módszer flexibilis abban az értelemben, hogy  $\lambda$  bármilyen módszerrel becsülhető.

Ez az eljárás kiterjesztető minden olyan  $f_j(x, y)$  függvényre, mely az első argumentumában invertálható  $f^{-1}(f(x, y), y) = x$ .

Az 1. táblázat (Table 1) mutatja, hogy a javasolt  $\hat{\lambda}$  és az irodalomból tanult Haar-Fisz ranszformációra épülő módszerek a legjobbak az esetünkben.

A maximum likelihood becslés minden stacionárius Markov-lánc esetén alkalmazható, ha a megfelelő mennyiségű mérés a rendelkezésünkre áll. Ezzel vetem össze az általam javasolt módszert a következő néhány pontban.

- A javasolt módszer nem stacionárius Markov-láncre is működik;

orig. val.	$k_1$	$k_2$	$k_3$
“ $1/\Delta t$ ”	18.580 (13.333)	0.0168 (0.0092)	18.676 (4.9235)
$\lambda$	0.3706 (0.0001)	0.0008 (0.)	1.3377 (0.0072)
$\hat{\lambda}$	1.2431 (0.0763)	0.0011 (0.00007)	1.0674 (0.0379)
H-F	1.1213 (0.0375)	0.0013 (0.0001)	1.3594 (0.0853)

Table 1: A táblázatban a paraméterek különböző módszerekkel becsült értékei szerepelnek. A rendszer egy Volterra-Lotka model,  $k_1 = k_3 = 1$  és  $k_2 = 10^{-3}$  paraméterekkel szimulálva. Az adatokat két külön szimulációs módszer szolgáltatotta, 2% relatív véletlen hiba hozzáadásával. Az értékek kb. 100 becslés átlagát és zárójelben a becslés szórását adják.

- az állapotok számához képest kevés mérés is elegendő például százezres méretű állapotterre is elegendő százas nagyságrendű mérés, mert csak az állapotátmenetek típusával kell összemérhetőnek lenni;
- a módszer lelke a változó intenzitású Markov-folyamat (Wald-folyamat) intenzitásának becslése, amire az én módszerem jól alkalmazható.

### 3 Az eredmények alkalmazása és a további munka

A munkát egyik részről a telekommunikációs hálózatokban fellépő minőségi (Quality of Service) és jelzésforgalom szabályozási (signaling control) problémák. Az eredményeim egy részét felhasználtuk az Ericsson Magyarország Kft. kutatólaboratóriumának, Internet Multimedia Subsystem sztenderdizációs projektjében. Az általam javasolt hívásszűrési eljárás jobb, mint az eddig alkalmazottak és az irodalomban fellelhetőek az átviteli karakterisztika és más képességek szempontjából. Az eredmények egy részét megvalósították és alkalmazzák az Ericsson termékeiben.

Matematikai modelleket dolgoztam ki, hogy leírjam a hívásszűrési mechanizmusok viselkedését és feltárjam jópár fontos tulajdonsát. Egy ilyen például a prioritás kezeléssel kapcsolatos, ahol matematikailag bizonyítható, hogy az adott környezetben, adott feltételek mellett, prioritás kezelés csakis kihasználtság csökkenéssel oldható meg.

Másrészről differenciálegyenletek paramétereinek becslésének problémáját tanulmányoztam. Neurális hálózatokat alkalmaztam differenciálegyenletek paramétereinek becslésére és egy mátrix inverziós módszer továbbgondolásával, annak lehetőségire és tulajdonságaira vannak eredményeim.

A paraméterbecslés tehát az alkalmazott matematika érdeklődésének középpontjában áll. Pontfolyamatokat használnak a telekommunikációs jelzés- és adatforgalom leírására, de ugyanígy a fenti differenciálegyenleteknek megfelelő biológiai és kémiai modellek sztochasztikus vizsgálatára is. Egy olyan becslést javasoltam, ami időben változó intenzitású pontfolyamat intenzitásának becslésére, követésére alkalmas. A szokásos matematikai apparátust kiterjesztettem annak érdekében, hogy a javasolt eljárást érdemben tárgyalni lehessen.

Egy sereg nyitott kérdés maradt és vetődött fel. Érdekes lenne az intenzitás  $\mathbb{E}[N(t) - N(s)|F_s] = \mathbb{E}[\int_s^t \lambda(u)du]$  definíciójának anaógiájára egy  $\mathbb{E}[(N(t) - N(s))^2|F_s]$ -re vonatkozó azonosságot adni (persze  $s < t$ ). A közeljövőben az intenzitás becslésem predikciós tulajdonságait is meg szeretném vizsgálni, mert a kísérletek azt mutatják, hogy erre igencsak alkalmas.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindenkinek, aki segítséget nyújtott dolgozatom elkészítésében.

Köszönettel tartozom Imre Sándor Tanár úrnak, Fülöp Péternek (BME, Híradástechnikai Tanszék), Németh Gábornak, Kenesi Zsoltnak (Ericsson Magyarország Kutatólaboratórium), Paláncz Bélának (a neurális hálózati módszerrel kapcsolatos segítségéért), Ráth Baláznak (a sztochasztika alapjaival kapcsolatos segítségéért), Nagy Ilonának, Nagy Attilának, Koronka Gábornak (figyelmes átolvasásukért), Vladiszavljev Gergelynek (a szimulációk során nyújtott segítségéért), Siptár-Jovanovics Tímeának és Siptár Dánielnek (az angol nyelvhelyesség ellenőrzéséért).

Külön köszönettel tartozom témavezető tanáromnak, Tóth Jánosnak ösztönző, motiváló támogatásáért és útmutató tanácsaiért.

A kutatás kivitelezésében anyagi támogatást nyújtott az Oktatási és Kulturális Minisztérium NK 63066 (2007) és TS 49835 (2008) referenciaszámok alatt. A munkát részben támogatta a Nemzeti Fejlesztési terv által finanszírozott TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 számú kutatási projekt. A szabadalmaztatásban és nagyon sok eredmény publikálásában anyagi és szakmai segítséget nyújtott az Ericsson Magyarország Kft. és a High Speed Networks laboratórium.

## References

## Publications

### Tudományos folyóiratban megjelent cikkek

- [J0-IEM-TECHM-2011] **B.Kovács** An intensity estimation method for inhomogeneous point processes and its application in reaction kinetics and telecommunications *Technometrics*, submitted 2011
- [J1-CMFS-Algorithms] Péter Fülöp, **B.Kovács**, Sándor Imre. Mobility Management Algorithms for the Client-driven Mobility Frame System - Mobility from a Brand New Point of View *Mobile Information Systems* Number iiWAS/MoMM 2008 Special Issue, 2009. 313–337. DOI 10.3233/MIS-2009-0086, Ios Press
- [J2-IonChannels-MTA] Ilona Nagy, **B.Kovács**, János Tóth. Detailed Balance in Ion Channels: Application of Feinberg’s Theorem *Reaction Kinetics Cat. Letters* Volume 96, Number 2, pp. 263–267, 2009, Akadémiai Kiadó Budapest and Springer, Dordrecht.
- [J3-CMFS-Telecom] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. A Client-driven mobility frame system, – mobility management from a new point of view *Telecommunications* Volume LXIII, Number 10, 2008., pp.
- [J3b-CMFS-Hiradas\*] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Kliens vezérelt mobilitás, – mobilitás menedzsment új nézőpontból *Híradástechnika* Volume LXIII, Number 10, 2008. pp 28–35. *The Hungarian version of “A Client-driven mobility frame system, – mobility management from a new point of view”*
- [J4-ANN-AMCS-2007] **B.Kovács**, János Tóth. Estimating reaction rate constants with neural networks *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences* Volume 4, Number 1, 2007, ISSN 1305-5313, pp 7–11.
- [J5-MMM-Telecom] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Numerical analysis of mobility management methods *Telecommunications* Volume LXII, Number 7, 2007, pp 32–38.



[J5b-MMM-Hiradas\*] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Mobilitás-menedzsment algoritmusok numerikus vizsgálata *Híradástechnika* Volume LXII, Number 4, 2007, pp 47–53. *The Hungarian version of “Numerical analysis of mobility management methods”*

[J6-LTRACK-JOURNAL] **B.Kovács**, Máté Szalay, Sándor Imre. Modeling and quantitative analysis of LTRACK - A New Mobility Management Algorithm *Mobile Information Systems* Volume 2, Number 1, 2006, pp 21–50.

## Konferenciakiadványban megjelent munkáim

[CP1-IARIA-InfoSys-2011] **B.Kovács**. Weighted fair resource sharing without queuing delay between traffic classes *7th International Conference on Networking and Services (InfoSys, IARIA)*, 22–27 May, Venice, Italy 2011, accepted.

[CP2-IEEE-SoftCom-2009] **B.Kovács**. Mathematical remarks on Token Bucket *Software Telecommunications & Computer Networks*, SoftCom (IEEE) Conference, 24–26 Sept. 2009, in proc. pp151–155.

[MOMM 2008\*] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Mobility Management Algorithms for the Client-driven Mobility frame System In *Proc.*, pp 227–235, *MOMM 2008*, Linz, Austria 2008.11.26 *The conference proceedings version of “Mobility Management Algorithms for the Client-driven Mobility Frame System - Mobility from a Brand New Point of View”*

[Networks 2008\*] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. A Client-driven Mobility Management - Mobility from a New Point of View In *Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium, Networks 2008*, Budapest, Hungary 2008.10.01, in proc. pp 1–29 *The conference proceedings version of “A Client-driven Mobility Management - Mobility from a New Point of View”. It was selected for journal publication with significant extensions.*

[CP3-MOMM 2006] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Study on mobility management modeling methods In *Proc.*, *MOMM 2006*, Yogyakarta, Indonesia 2006.12.4.

- [HTE 2006\*] **B.Kovács**, Péter Fülöp. Study on mobility management modeling methods In *Proc., HTE Students Conference 2006*, Budapest, Hungary 2006.05. *Mostly included in CP3.*
- [MOMM 2005\*] **B.Kovács**, Máté Szalay, Sándor Imre. Modeling and quantitative analysis of LTRACK - Novel mobility management algorithm In *Proc., MOMM 2005*, Kuala Lumpur, Malaysia 2005.09.22. *Best paper award - students category. Mobile Information Systems invited the authors to publish an extended version of the article.*
- [CP4-HTE 2005] **B.Kovács**, Máté Szalay. Analysis and Parameter Optimization of LTRACK, an IP Mobility Management Algorithm management algorithm In *Proc., HTE Students Conference 2005*, Budapest, Hungary 2005.05.

## Válogatott poszterek és előadások

- [StatFiz 2011] **B.Kovács**. Átmenetvalószínűségi állandók becslése diszkrét sztochasztikus Markov-modellekben On *Statisztikus Fizikai Nap*, Budapest MTA, 2011.04.
- [HSN WS 2008] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. A Client-driven Mobility Management - Mobility from a New Point of View In *HSN Workshop, Poster*, Balatonkenese, Hungary 2008.05.
- [Colloq. Diffeq. 2007] **B.Kovács**, János Tóth. Parameter estimation of differential equations In *8th Colloquium on Qualitative Theory of Differential Equations*, Szeged, Hungary, 2007.06.27.
- [WASET CISE 2007] **B.Kovács**, János Tóth. Parameter estimation of differential equations In *Conference on Computing, Information Systems Science and Engineering*, Barcelona, Spain, 2007.04.25.–27.
- [HSN WS 2007] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Extended mobility management framework In *HSN Workshop, Poster*, Balatonkenese, Hungary 2007.05.
- [CISIM 2007] **B.Kovács**, Péter Fülöp, Sándor Imre. Extended mobility management framework In *Proc., International Conference: 6th Computer Information Systems and Industrial Management Applications (CISIM 2007)*, Elk, Poland 2007.06.28, accepted lecture

[MTA Rkin. 2006] **B.Kovács**, János Tóth. Módszerek reakcióállanók becslésére In *Előadás az MTA Reakciókinetikai munkabizottságának ülésén*, Gyönöstarján, 2006.11.03

[Math. Visual. 2003] **B.Kovács**, János Tóth. Neurális hálózatok alkalmazása differenciálegyenletek paramétereinek becslésére In *Matematikai és Vizualizációs Programcsomagok Alkalmazóinak Baráti Társasága*, Szegedi Tudományegyetem ÁOK Orvosi Informatikai Intézet 2003.11.28

## Szabadalmak

[P1] **B. Kovács**. Overload control in a quality-of-service aware telecommunications network WO/2010/009764, App. no.: PCT/EP2008/059693, Publication: 28.01.2010, filing date: 24.07.2008

[P2] **B. Kovács**, G. Németh, Zs. Kenesi. Enhanced token bucket mechanism with priority handling Patent: P26074, filed, under patent process

[P3] **B. Kovács**, G. Németh, Zs. Kenesi. System and method providing overload control in next generation networks US 2010/0220587 A1, 2 Sept, 2010 (filed: 27 feb 2009)

## Független hivatkozások a munkáimra

[1] Agustinus Borgy Waluyo, David Taniar, Wenny Rahayu and Bala Srinivasan (2011). "Mobile broadcast services with MIMO antennae in 4G wireless networks," World Wide Web, Issn: 1386-145X, 1–25.

[2] Gábor Szederkényi, Katalin Hangos (2011). "Finding complex balanced and detailed balanced realizations of chemical reaction networks," Journal of Mathematical Chemistry, Issn: 0259-9791, 1–17 (2011).

[3] Gábor Lente (2010). "The connection between the second law of thermodynamics and the principle of microscopic reversibility," Journal of Mathematical Chemistry, Volume: 47, Issue: 3, 1106–1111 (2010).

[4] Ronan J. Skehill, Sean McGrath (2007). "The application of fluid mobility modelling in wireless cellular networks," Mobile Information Systems, Volume: 3, Number: 2, 89–106 (2007).

## Hivatkozások más szerzők jelentős munkáira

- [Erlang (1917)] A.K. Erlang (1917). "Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges," *Post Office Electrical Engineer's Journal*, 10, 189–197.
- [Dempster et al.(1977)] Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. (1977). "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 39 (1): 1–38. JSTOR 2984875. MR0501537.
- [Ogata (1978)] Yosihiko Ogata (1978). "The asymptotic behavior of maximum likelihood estimators for stationary point processes," *Annals of Institute of Statistical and Mathematics*, 30 (1978), Part A, 243–261.
- [Crawford (1980)] Kenneth E. Crawford (1980). "Method of controlling call traffic in a communication system", U.S. patent, no. 4224479, 1980
- [Hangos et al. (1998)] K. M. Hangos, J. Tóth (1998). "Maximum likelihood estimation of reaction-rate constants," *Computers and Chemical Engineering*, vol. 12, pp. 135–139, 1998.
- [ITU-T H.248.11] H.248.11 extension specification: ITU-T recommendation H.248.11
- [5] *Mathematica*, Wolfram Research Inc. <http://www.wolfram.com>, Last Access: 19 Mar. 2011