Combinatorics of Borel ideals

A Ph.D. disszertáció tézisfüzete

Farkas Barnabás

MŰEGYETEM 1782

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
MATEMATIKA INTÉZET, ALGEBRA TANSZÉK

Témavezető: Prof. Soukup Lajos

RÉNYI ALFRÉD MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZET
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

2011

Tartalomjegyzék

1. Előzmények

1.1. Motiváció

Disszertációmban megszámlálható alaphalmazon adott Borel ideálok tulajdonságait vizsgáltam öt lazán kapcsolódó fejezetben.

Mindenekelőtt, egy kis motiváció. Mit jelent, hogy a természetes számok (ω) egy részhalmaza „kicsi”? Ez a kérdés vezet az ideál fogalmához: Egy $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega) = \{X : X \subseteq \omega\}$ halmazrendszer ideal ω-n ha tartalmazza a véges halmazokat, $\omega \notin \mathcal{I}$, $\subseteq$-leszálló ($A \subseteq B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$), és zárt az unióképzésre ($A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I}$). Egy-két klasszikus példa: a véges halmazok ideálja ω-n (Fin), a nulla sűrűségű halmazok ideálja:

$$\mathcal{Z} = \left\{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\right\},$$

és a „szummálható” halmazok ideálja:

$$\mathcal{I}_{1/n} = \left\{A \subseteq \omega : \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty\right\}.$$

Ezen ideálok és általánosításaik vizsgálata a végtelen kombinatorika és a forszolás elmélet központi témájává nőtte ki magát az elmúlt pár évben.

$\mathcal{P}(\omega)$-n sokféle struktúrát megadhatunk, ezek fényében ideálok különböző aspektusait vizsgálhatjuk:

(i) lengyel tér $\rightsquigarrow$ ideálok topologikus tulajdoságai és komplexitása;

(ii) mérték tér $\rightsquigarrow$ ideálok mérhetősége és mértéke;

(iii) Abel-csoport $\rightsquigarrow$ ideálok mint részcsoportok;

(iv) Boole-algebra $\rightsquigarrow$ faktor algebrák és invariánsaik;

(v) előrendezés halmaz ($\subseteq^*$) $\rightsquigarrow$ ideálok csillag-invariánsai.

Továbbá érdemes megemlíteni még egy érdekes kutatási irányt:

(vi) sorozatok konvergenciájának általánosítása: $\mathcal{I}$-konvergencia.

Például Fin és $\mathcal{I}_{1/n}$ F_σ ideálok, $\mathcal{Z}$ egy $F_{\sigma\delta}$ ideál, továbbá $\mathcal{Z}$ és $\mathcal{I}_{1/n}$ magas (vagyis $[\omega]^\omega$-ben sűrű) P-ideálok (vagyis $(\mathcal{I}_{1/n}, \subseteq^*)$ és $(\mathcal{Z}, \subseteq^*)$ σ-irányítottak). A statisztikus konvergencia pedig pont a $\mathcal{Z}$-konvergencia.

Analitikus és / vagy (magas) P-ideálokról igen sok eredményt ismerünk már.

Miért analitikus ideálok? Mert az analitikusság egy kellően általános definiálhatósági szint a leíró halmazelméletben, továbbá forszolásos konstrukciók esetében sokszor szükségünk van definiálható objektumaink abszolútságára.

Miért P-ideálok? Mert a P-ideálok a σ-ideálok (például egy mérték tér nulla mértékű részhalmazai) analógiái megszámlálható alaphalmazon.

Mazur és Solecki karakterizációs tételeit (lásd [27] és [30]) rendszeresen alkalmazzuk: Adott $\mathcal{I}$ ideál ω-n. Ekkor $\mathcal{I}$ egy F_σ ideál pontosan akkor, ha

$$\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\vartheta) = \{A \subseteq \omega : \vartheta(A) < \infty\};$$

és $\mathcal{I}$ egy analitikus P-ideál pontosan akkor, ha

$$\mathcal{I} = \mathrm{Exh}(\vartheta) = \left\{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \vartheta(A \setminus n) = 0\right\}$$

egy alulról félig folytonos ϑ félmértékkel ω-n.

1.2. További példák

Definiálunk egy-két klasszikus ideált.

Szummálható ideálok. Legyen $h : \omega \to [0, \infty)$ egy olyan függvény, melyre $\sum_{n\in\omega} h(n) = \infty$. A *h által generált szummálható ideál*:

$$\mathcal{I}_h = \left\{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} h(n) < \infty\right\}.$$

Sűrűség ideálok. Legyen $(P_n)_{n\in\omega}$ páronként diszjunkt véges halmazok egy sorozata ω-n és legyen $\vec{\mu} = (\mu_n)_{n\in\omega}$ mértékek egy sorozat, melyekre μ_n tartója P_n és $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(P_n) > 0$. A *$\vec{\mu}$ által generált sűrűség ideál*:

$$\mathcal{Z}_{\vec{\mu}} = \{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cap P_n) = 0\}.$$

Pár magas F_σ ideál:

(1) Magas szummálható ideálok.

(2)

$$\mathcal{ED} = \{A \subseteq \omega\times\omega : \exists\, m \in \omega\ \forall^\infty\, n \in \omega\ |(A)_n| \leq m\} = \left\{A \subseteq \omega\times\omega : \limsup_{n\to\infty} |(A)_n| < \infty\right\}$$

ahol $(A)_n = \{k \in \omega : (n,k) \in A\}$, továbbá legyen $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}} = \mathcal{ED} \restriction \Delta$ ahol $\Delta = \{(n,m) \in \omega \times \omega : m \leq n\}$.

(3) A *van der Waerden ideál:*

$$\mathcal{W} = \{A \subseteq \omega : A \text{ does not contain arbitrary long arithmetic progressions}\}.$$

Szemerédi híres tétele szerint $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$ (lásd [33]). Ennek erősítése, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{I}_{1/n}$ egy még mindig nyitott Erdős probléma (\$3000-ért).

Pár magas $F_{\sigma\delta}$ ideál:

(1) Magas sűrűség ideálok.

(2) A $\mathbb{Q}$ sehol sem sűrű részhalmazai:

$$\mathrm{Nwd} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset\}.$$

Pár magas $F_{\sigma\delta\sigma}$ (nem P-)ideál:

(1) A Conv ideált a $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ halmaz $[0,1]$-ben konvergens részhalmazai generálják, vagyis

$$\mathrm{Conv} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : |A \text{ torlódási pontjai } (\mathbb{R}\text{-ben})| < \omega\}.$$

(2) Fin saját magával képzett Fubini szorzata:

$$\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall^\infty\, n \in \omega\ |(A)_n| < \omega\}.$$

Pár nem magas ideál:

(1) Egy fontos F_σ ideál:

$$\mathrm{Fin} \otimes \{\emptyset\} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall^\infty\, n \in \omega\ (A)_n = \emptyset\},$$

(2) és $F_{\sigma\delta}$ párja:

$$\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall\, n \in \omega\ |(A)_n| < \omega\}.$$

Ideálok Fubini szorzata. Eddigi három példát említettünk Fubini szorzatra. Általában, ha $\mathcal{I}$ és $\mathcal{J}$ ideálok ω-n, akkor *Fubini szorzatuk*:

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n : (A)_n \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}\}.$$

AD családok által generált ideálok. Legyen $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ egy végtelen majdnem-diszjunkt halmazrendszer. Ekkor az általa generált $\langle \mathcal{A} \rangle_{\mathrm{id}}$ ideál egy nem P-ideál, ami pontosan akkor magas, ha $\mathcal{A}$ egy MAD. Ha $\mathcal{A}$ MAD, akkor $\langle \mathcal{A} \rangle_{\mathrm{id}}$ nem analitikus (lásd [26]), de első-kategóriájú.

1.3. Módszerek

I. Forszolás.

A forszolás az egyik legalapvetőbb és leghasznosabb módszer relatív konzisztencia tétek bizonyítására. Ezek „ha ZFC konzisztens, akkor ZFC $+\Phi$” vagy röviden „Con(ZFC) esetén Con(ZFC $+\Phi$)” alakú metatételek ahol Φ a halmazelmélet nyelvének egy mondata. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy Φ (relatív) konzisztens ZFC-vel.

A forszolási technikák vizsgálata a halmazelmélet egyik központi kutatási területe már mintegy 50 éve. Nem csak a relatív konzisztencia tételek miatt, hanem mert maga a módszer sok új típusú problémát vetett fel (lásd [25], [23], [5] és [19]).

II. Leíró halmazelmélet és abszolútság.

Amikor Borel halmazokkal dolgozunk a halmazelmélet egy tranzitív modelljében elengedhetetlenül szükségünk van a leíró halmazelméleti technikák illetve a abszolútsági eredmények (lásd [23], [32], és [24]) alkalmazására. Például: Borel-kódok, Mostowski Abszolútsági tétele ($\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$ tulajdonságokra), és Shoenfield Abszolútsági tétele ($\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_2$ tulajdonságokra).

III. Számosság invariánsok és Galois-Tukey kapcsolatok.

Első megközelítésben, számosság invariánsnak nevezünk egy elsőrendben definiálható (általában) nem megszámlálható számosságot, ami kisebb vagy egyenlő, mint $\mathfrak{c} = 2^\omega$. Sokukat relációk „nemkorlátossági” és „dominálási” számaként kapjuk ($\mathfrak{b}(\mathcal{R})$ és $\mathfrak{d}(\mathcal{R})$), továbbá a közöttük fennálló egyenlőtlenségek bizonyításában a relációk közötti GT-kapcsolatok megtalálása játsza a főszerepet (lásd [6]).

Például a híres Cichoń diagram egy elég mély kapcsolatot mutat $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, a valósak első-kategóriájú részhalmazainak σ-ideálja ($\mathcal{M}$), és a Lebesgue nulla mértékű halmazok σ-ideálja ($\mathcal{N}$) között (egy nyílt a-ból b-be azt jeleni, hogy $a \le b$):

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

A Cichoń diagramban szereplő egyenlőtlenségek egytől egyig GT-kapcsolatokból következnek:

$$\begin{tikzcd}
(2^\omega, \in, \mathcal{N}) \arrow[r] & (2^\omega, \in, \mathcal{M})^\perp \arrow[r] & (\mathcal{M}, \subseteq, \mathcal{M}) \arrow[r] & (\mathcal{N}, \subseteq, \mathcal{N}) \\
 & (\omega^\omega, \le^*, \omega^\omega)^\perp \arrow[u] \arrow[r] & (\omega^\omega, \le^*, \omega^\omega) \arrow[u] & \\
(\mathcal{N}, \subseteq, \mathcal{N})^\perp \arrow[uu] \arrow[r] & (\mathcal{M}, \subseteq, \mathcal{M})^\perp \arrow[u] \arrow[r] & (2^\omega, \in, \mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & (2^\omega, \in, \mathcal{N})^\perp \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

IV. Ideálok előrendezései.

Az ideálokon értelmezett klasszikus Katětov-, Katětov-Blass-, Rudin-Keisler-, és Rudin-Blass-rendezések mind tekinthetők a megszámlálható diszkrét tér ultrafilterekkel reprezentált Čech-Stone kompaktifikációján értelmezett Rudin-Keisler-rendezés általánosításának.

Ezeknek az előrendezéseknek az algebrai és kombinatorikus tulajdonságait pár éve igen mélyen kutatják (lásd [12], [21], és [28]). Számunka igen fontos, hogy a Borel ideálokon ezek az előrendezések Σ^1_2 tulajdonságok így abszolútak az olyan $M \subseteq N$ tranzitív modellek között, melyekre $\omega_1^N \subseteq M$ (ilyenek például a forszolásos bővítések).

A Katětov-rendezés felhasználásával Hrušák és Zapletal egy elég általános esetben jellemezte ideálok forszolás-lerombolhatatlanságát (lásd [22]): Legyen I egy σ-ideál 2^ω-n (vagy ω^ω-n), és legyen $\mathcal{J}$ egy magas ideál ω-n. Tegyük fel továbbá, hogy a $\mathbb{P}_I = \mathrm{Borel}(2^\omega)\setminus I$ kényszerképzet proper és nevei folytonosan olvashatók. Ekkor

$$\mathcal{J}\ \mathbb{P}_I\text{-lerombolhatalan} \iff \mathcal{J} \not\leq_K \mathrm{tr}(I) \restriction X \text{ minden } X \in \mathrm{tr}(I)^+\text{-re.}$$

2. Tézis: Idealizált majdnem-diszjunkt rendszerek

2.1. Ideálok majdnem-diszjunktsági száma

A jól-ismert majdnem-diszjunktsági szám, $\mathfrak{a}$ természetesen általánosítható ideálokra: Egy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+$ halmazrendszer $\mathcal{I}$-*majdnem-diszjunkt* ($\mathcal{I}$-AD), ha minden $A \cap B \in \mathcal{I}$ esetén $\{A, B\} \in [\mathcal{A}]^2$. Az $\mathcal{A}$ végtelen $\mathcal{I}$-AD rendszer $\mathcal{I}$-*MAD*, ha minden $X \in \mathcal{I}^+$-hez létezik egy $A \in \mathcal{A}$, hogy $X \cap A \in \mathcal{I}^+$; vagyis $\mathcal{A}$ $\subseteq$-maximális az $\mathcal{I}$-AD rendszerek között. Legyen $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ az $\mathcal{I}$-MAD rendszerek számosságának minimuma, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathrm{Fin})$.

Például könnyen megmutatható, hogy $\mathfrak{a}(\mathrm{Fin} \otimes \{\emptyset\}) = \mathfrak{a}$.

Tudjuk, hogy $\mathfrak{a} > \omega$, és könnyen látható, hogy ez általában igaz F_σ ideálokra is. Általában azonban ez nem igaz:

Állítás. (lásd [16]) $\mathfrak{a}(\mathcal{Z}_{\vec{\mu}}) = \omega$ *minden* $\mathcal{Z}_{\vec{\mu}}$ *magas sűrűség ideálra.*

Farah egy tétele pontosan karakterizálja azokat az analitikus P-ideálokat amikhez létezik megszámlálható $\mathcal{I}$-MAD rendszer ([12, Theorem 5.11.1] átfogalmazása): Egy $\mathcal{I}$ analitikus P-ideálra $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) > \omega$ pontosan akkor, ha $\mathcal{I}$ F_σ.

Felhasználva az első kategóriájú ideálok jellemzését (lásd [34], angolul [3, Theorem 4.1.2]) tudjuk, hogy minden első-kategóriájú $\mathcal{I}$ ideálhoz létezik kontinuum számosságú $\mathcal{I}$-MAD rendszer. Ezekre az ideálokra legyen $\bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{I})$ a nem megszámlálható $\mathcal{I}$-MAD rendszerek számosságainak minimuma. Például $\mathfrak{a}(\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin}) = \omega$ és $\bar{\mathfrak{a}}(\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin}) = \mathfrak{a}$.

Analitikus P-ideálok esetében találtunk egy általános alsó korlátot $\bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{I})$-re:

Tétel. (lásd [16]) $\mathfrak{b} \leq \bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{I})$ *minden* $\mathcal{I}$ *analitikus P-ideálra.*

Ez az alsó korlát szigorú abban az értelemben, hogy már F_σ ideálokra sem igaz általában: Brendle bebizonyította (lásd [8]), hogy $\mathfrak{a}(\mathcal{ED}_{\text{fin}}) < \mathfrak{b}$ konzisztens ZFC-vel.

Speciális esetekben még két alsó korlátot találtam $\bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{I})$-re:

Állítás. (lásd [15]) $\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}(\text{Fin} \otimes \text{Fin})$*;* $\mathfrak{a}(\text{Nwd}) = \omega$*, és* $\mathsf{add}(\mathcal{M}) \le \bar{\mathfrak{a}}(\text{Nwd})$.

Ideálok majdnem-diszjunktsági számai közötti egyenlőtlenségek bizonyítására egy egyszerű módszer $e : \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I} \to \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{J}$ reguláris beágyazás keresése. Ekkor nyilván $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) \ge \mathfrak{a}(\mathcal{J})$ és $\bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}) \ge \bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{J})$. Hogyan keressünk ilyen beágyazást? A legegyszerűbb, ha egy olyan $f : \omega \to \omega$ függvényt keresünk, melyre

$$f^{-1}[\,\cdot\,] : \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I} \to \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{J} \quad \text{egy reguláris beágyazás.}$$

Ha van ilyen f, akkor ezt $\mathcal{I} \le^{\mathrm{r}}_{\mathrm{RK}} \mathcal{J}$-vel jelöljük. Például $\text{Fin} \le^{r}_{RK} \mathcal{J}$, ha $\mathcal{J} = \mathcal{Z}_{\vec{\mu}}, \mathcal{ED}, \mathcal{ED}_{\text{fin}}$, $\mathcal{W}$, $\text{Fin} \otimes \text{Fin}, \text{Fin} \otimes \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \otimes \text{Fin}$. Tehát ezekre az ideálokra speciálisan $\bar{\mathfrak{a}}(\mathcal{J}) \le \mathfrak{a}$.

2.2. Forszolás-lerombolhatatlan $\mathcal{I}$-MAD-ok

Kunen (lásd [25, Ch.VIII, Theorem 2.3]) CH-ból konstruált egy Cohen-lerombolhatatlan MAD-ot. Ezt később több forszolásra általánosították és sok hasonló eredmény született melyekben a feltétel tipikusan az, hogy egy számosság invariáns egyenlő $\mathfrak{c}$-vel.

Ezt a fogalmat általánosíthatjuk $\mathcal{I}$-MAD-okra: Legyen $\mathbb{P}$ egy kényszerképzet, $\mathcal{I}$ egy Borel ideál, és $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{I}$-MAD. Ekkor $\mathcal{A}$ $\mathbb{P}$-*lerombolhatatlan* ha $\Vdash_{\mathbb{P}}$„$\mathcal{A}$ $\mathcal{I}$-MAD."

A megszámlálható $\mathcal{I}$-MAD-ok nem túl érdekesek, mert a „$\mathcal{I}$ egy Borel ideál és $\mathcal{A}$ egy megszámlálható $\mathcal{I}$-MAD" tulajdonság Π^1_1, így ezek a rendszerek minden $\mathbb{P}$-re nézve $\mathbb{P}$-lerombolhatatlanok.

Sajnos a Borel ideálokon a $\le^{\mathrm{r}}_{\mathrm{RK}}$ előrendezés Σ^1_4-nek tűnik, ezért bevezettem ennek egy erősítését, melyben azt garantálom, hogy a reguláris beágyazásnál szükséges pseudo-projekciók „kiszámíthatók" legyenek:

Definíció. (lásd [15]) Legyenek $\mathcal{I}$ és $\mathcal{J}$ Borel ideálok. Egy $f : \omega \to \omega$ függvény *Borel-reguláris beágyazást generál*, ha van egy olyan $F : 2^\omega \to 2^\omega$ Borel-mérhető függvény, melyre

(a) f tanúsítja, hogy $\mathcal{I} \le_{\mathrm{RK}} \mathcal{J}$, és $\forall\, X \in \mathcal{J}^+\ F(X) \in \mathcal{I}^+$;

(b) $\forall\, X \in \mathcal{J}^+\ \forall\, Z \in (\mathcal{I} \restriction F(X))^+\ f^{-1}[Z] \cap X \in \mathcal{J}^+$.

Ha van ilyen f (és F), akkor ezt $\mathcal{I} \le^{\mathrm{B\text{-}r}}_{\mathrm{RK}} \mathcal{J}$-vel jelöljük.

Ez az előrendezés már Σ^1_2 a Borel ideálokon, így abszolút minden $M \subseteq N$ tranzitív modell között, melyekre $\omega_1^N \subseteq M$. Speciálisan, ha $\mathcal{I}$ és $\mathcal{J}$ Borel ideálok, f tanusítja, hogy $\mathcal{I} \le^{\mathrm{B\text{-}r}}_{\mathrm{RK}} \mathcal{J}$, $\mathbb{P}$ egy kényszerképzet, és $\mathcal{A}$ egy $\mathbb{P}$-lerombolhatatlan $\mathcal{I}$-MAD, akkor $\{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\}$ egy $\mathbb{P}$-lerombolhatatlan $\mathcal{J}$-MAD.

Bár per pillanat nem tudom, hogy $\text{Fin} \le^{\mathrm{B\text{-}r}}_{\mathrm{RK}} \mathcal{J}$ igaz-e minden F_σ ideálra vagy minden analitikus P-ideálra, Kunen bizonyításának módosításával tudunk Cohen-lerombolhatatlan $\mathcal{J}$-MAD-okat konstruálni ezen ideálokhoz.

Tétel. (lásd [16]) *Tegyük fel* CH*-t és legyen $\mathcal{I}$ egy F_σ ideál vagy egy analitikus P-ideál. Ekkor létezik egy nem megszámlálható Cohen-lerombolhatatlan $\mathcal{I}$-MAD.*

Sacks-lerombolhatatlan MAD-ok konstrukcióját (lásd [6]) is sikerült általánosítanom:

Tétel. (lásd [15]) *Tegyük fel* CH*-t és legyen $\mathcal{I}$ egy F_σ ideál vagy egy analitikus P-ideál, továbbá legyen $\mathbb{P}$ egy ω_1 számosságú ω^ω-korlátos proper kényszerképzet. Ekkor létezik nem megszámlálható $\mathbb{P}$-lerombolhatatlan $\mathcal{I}$-MAD.*

2.3. $\mathcal{I}$-AD rendszerek forszolás-lerombolhatatlan bővítései

[18] eredményei felvetették a következő kérdést (Soukup L.): Igaz, hogy minden AD rendszer Cohen-lerombolhatatlan MAD rendszerré bővíthető egy ccc forszolás után? Erre Kunen ötletének felhasználásával sikerült általános pozitív választ adnom (speciális esetben lásd [13]).

Tétel. (lásd [15]) *Legyen $\mathbb{F}$ egy kényszerképzet, $\mathcal{I}$ egy F_σ ideál vagy egy analitikus P-ideál, és $\mathcal{A}$ egy végtelen $\mathcal{I}$-AD rendszer. Ekkor egy ccc forszolás után $\mathcal{A}$ kibővíthető $\mathbb{F}$-lerombolhatatlan $\mathcal{I}$-MAD rendszerré.*

3. Tézis: A bővített Cichoń diagram

3.1. $\mathcal{R}$-korlátosság és $\mathcal{R}$-dominálás

Ha létezik Borel GT-kapcsolt $\mathcal{R}_1$ és $\mathcal{R}_2$ között, akkor ezt $\mathcal{R}_1 \preceq^{\mathrm{B}}_{\mathrm{GT}} \mathcal{R}_2$-vel jelöljük. Kényszerképzetek általános korlátossági és dominálási tulajdonságait a következőképpen definiálhatjuk:

Definíció. (lásd [16]) Legyen $\mathcal{R} = (A, R, B)$ egy Borel reláció, és legyenek $V \subseteq W$ tranzitív modellek. Ekkor a (V, W) bővítés

$\mathcal{R}$-korlátos, ha
$$\forall\, a \in A \cap W\ \exists\, b \in B \cap V\ \langle a, b\rangle \in R;$$

$\mathcal{R}$-domináló, ha
$$\exists\, b \in B \cap W\ \forall\, a \in A \cap V\ \langle a, b\rangle \in R.$$

Egy $\mathbb{P}$ kényszerképzet *$\mathcal{R}$-korlátos* (hasonlóan *$\mathcal{R}$-domináló*), ha

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{„}(V, V[\dot{G}])\ \mathcal{R}\text{-korlátos } (\mathcal{R}\text{-domináló}).\text{''}$$

A definícióból triviálisan következik, hogy ha $V \models \mathcal{R}_1 \preceq^{B}_{GT} \mathcal{R}_2$ és (V, W) egy $\mathcal{R}_2$-korlátos / -domináló bővítés, akkor (V, W) $\mathcal{R}_1$-korlátos / -domináló is.

Kényszerképzetek igen sok ismert tulajdonsága definiálható $\mathcal{R}$-korlátosságként illetve $\mathcal{R}$-dominálásként egy megfelelő $\mathcal{R}$-rel. Egy-két példa:

- $\mathbb{P}$ ω^ω-korlátos $\iff$ $\mathbb{P}$ $(\omega^\omega, \leq^*, \omega^\omega)$-korlátos;

- $\mathbb{P}$ ad domináló valóst $\iff$ $\mathbb{P}$ $(\omega^\omega, \leq^*, \omega^\omega)$-domináló;
- $\mathbb{P}$ Sacks tulajdonságú $\iff$ $\mathbb{P}$ $(\omega^\omega, \sqsubseteq^*, \mathrm{Slm})$-korlátos;
- $\mathbb{P}$ ad $\omega^\omega \cap V$-t domináló szlalomot $\iff$ $\mathbb{P}$ $(\omega^\omega, \sqsubseteq^*, \mathrm{Slm})$-domináló;
- $\mathbb{P}$ ad Cohen valóst $\iff$ $\mathbb{P}$ $(2^\omega, \in, \mathcal{M})^\perp$-domináló;
- $\Vdash_{\mathbb{P}} 2^\omega \cap V \in \mathcal{M}$ $\iff$ $\mathbb{P}$ $(2^\omega, \in, \mathcal{M})$-domináló;
- $\mathcal{I}$ $\mathbb{P}$-lerombolhatatlan $\iff$ $\mathbb{P}$ $([\omega]^\omega, R_\infty, \mathcal{I})$-korlátos (ahol $\langle X, A\rangle \in R_\infty$, ha $|X \cap A| = \omega$).

3.2. Csillag-invariánsok

σ-ideálok additívitása, uniformitása, fedési száma, és kofinalítása általánosítható magas ideálokra, ezek az úgynevezett csillag-invariánsok: $\mathrm{add}^*(\mathcal{I})$, $\mathrm{non}^*(\mathcal{I})$, $\mathrm{cov}^*(\mathcal{I})$, és $\mathrm{cof}^*(\mathcal{I})$.

Disszertációmban a Borel GT-kapcsolatok általános nyelvét felhasználva beláttam néhány ilyen kapcsolatot a csillag-invariánsok definiáló relációi és $\mathcal{M}$ illetve $\mathcal{N}$ klasszikus additívitását, uniformitását, fedési számát, és kofinalítását definiáló relációk között. Ezen kapcsolatok az invariánsok közötti egyenlőtlenségekre illetve a kényszerképzetek korlátossági és dominálási tulajdonságai közötti implikációkra vonatkozó ismert(?) következményeit részletesen összefoglaltam.

A bemutatott bizonyítások listája:

- Ha $\mathcal{I}$ egy analitikus P-ideál, akkor $(\mathcal{I}, \subseteq^*, \mathcal{I}) \preceq^{\mathrm{B}}_{\mathrm{GT}} (\omega^\omega, \sqsubseteq^*, \mathrm{Slm})$.
- Ha $\mathcal{I}_h$ egy magas szummálható ideál, akkor $(\mathcal{I}, \subseteq^*, \mathcal{I}) \equiv^{\mathrm{B}}_{\mathrm{GT}} (\omega^\omega, \sqsubseteq^*, \mathrm{Slm})$.
- Ha $\mathcal{I}$ egy magas analitikus P-ideál, akkor $(\omega^\omega, \leq^*, \omega^\omega) \preceq^{\mathrm{B}}_{\mathrm{GT}} (\mathcal{I}, \subseteq^*, \mathcal{I})$.
- Ha $\mathcal{I}$ egy magas analitikus P-ideál, akkor $([\omega]^\omega, R_\infty, \mathcal{I}) \preceq^{\mathrm{B}}_{\mathrm{GT}} (\omega^\omega, \in, \mathcal{M})^\perp$.
- Ha $\mathcal{I}_h$ egy magas szummálható ideál, akkor $(2^\omega, \in, \mathcal{N}) \preceq^{\mathrm{B}}_{\mathrm{GT}} ([\omega]^\omega, R_\infty, \mathcal{I}_h)$.

Annak bizonyításához, hogy $(\omega^\omega, \leq^*, \omega^\omega)$ és $(\mathcal{I}, \subseteq^*, \mathcal{I})$ nem (Borel) GT-ekvivalensek semelyik magas analitikus P-ideál esetében, beláttuk a következő tételt:

Tétel. (lásd [16]) *Legyen $\mathcal{I}$ egy magas analitikus P-ideál. Ekkor nincsen σ-centrált $(\mathcal{I}, \subseteq^*, \mathcal{I})$-domináló kényszerképzet.*

Továbbá egy alkalmazásként beláttuk a következő tételt:

Tétel. (lásd [16]) *$V^{\mathbb{C}_{\omega_1}}$-ben minden magas analitikus P-ideál duális filtere tartalmaz tornyot.*

A következő diagramban összefoglalom a bizonyított Borel GT-kapcsolatokat ($\mathcal{J}$ egy magas analitikus P-ideál):

$$\begin{tikzcd}
(2^\omega,\in,\mathcal{N}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\text{(t.s.)}"] & & (2^\omega,\in,\mathcal{M})^\perp \arrow[r] & (\mathcal{M},\subseteq,\mathcal{M}) \arrow[rr] & & (\mathcal{N},\subseteq,\mathcal{N}) \\
& \boxed{([\omega]^\omega,R_\infty,\mathcal{J})} \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \boxed{(\mathcal{J},\subseteq^*,\mathcal{J})} \arrow[ur, "(*)"] & \\
& & (\omega^\omega,\leq^*,\omega^\omega)^\perp \arrow[r] \arrow[uu] & (\omega^\omega,\leq^*,\omega^\omega) \arrow[uu] \arrow[ur] & & \\
& \boxed{(\mathcal{J},\subseteq^*,\mathcal{J})^\perp} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \boxed{([\omega]^\omega,R_\infty,\mathcal{J})^\perp} \arrow[uu] \arrow[dr, "\text{(t.s.)}"] & \\
(\mathcal{N},\subseteq,\mathcal{N})^\perp \arrow[uuuu] \arrow[ur, "(*)"] \arrow[rr] & & (\mathcal{M},\subseteq,\mathcal{M})^\perp \arrow[uu] \arrow[r] & (2^\omega,\in,\mathcal{M}) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & (2^\omega,\in,\mathcal{N})^\perp \arrow[uuuu]
\end{tikzcd}$$

A (t.s.)-sel ellátott nyilak magas szummálható ideálokra vonatkoznak, a ($*$)-gal ellátottak pedig azt jelentik, hogy az adott magas analitikus P-ideálokra vonatkozó Borel GT-kapcsolat magas szummálható ideálok esetében Borel GT-ekvivalencia.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{cov}(\mathcal{N}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\text{(t.s.)}"] & & \operatorname{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \operatorname{cof}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \operatorname{cof}(\mathcal{N}) \\
& \boxed{\operatorname{cov}^*(\mathcal{J})} \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \boxed{\operatorname{cof}^*(\mathcal{J})} \arrow[ur, "(\sharp)"] & \\
& & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[uu] & \mathfrak{d} \arrow[uu] \arrow[ur] & & \\
& \boxed{\operatorname{add}^*(\mathcal{J})} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \boxed{\operatorname{non}^*(\mathcal{J})} \arrow[uu] \arrow[dr, "\text{(t.s.)}"] & \\
\operatorname{add}(\mathcal{N}) \arrow[uuuu] \arrow[ur, "(\sharp)"] \arrow[rr] & & \operatorname{add}(\mathcal{M}) \arrow[uu] \arrow[r] & \operatorname{cov}(\mathcal{M}) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \operatorname{non}(\mathcal{N}) \arrow[uuuu]
\end{tikzcd}$$

Ahol a (t.s.) jelzésű nyilak ismét csak szummálható ideálokra vonatkoznak, a ($\sharp$) jelzésűek pedig amellett, hogy minden magas analitikus P-ideálra egyenlőtlenséget adnak, magas szummálható ideálokra egyenlőséget jelnetenek.

$(\omega^\omega,\leq^*)$ klasszikus nemkorlátossági és dominálási száma könnyen általánosítható ideálokra a $\leq_\mathcal{J}$ előrendezés bevezetésével.

Tétel. (lásd [16]) *Ha* $\mathcal{I} \leq_{\text{RB}} \mathcal{J}$, *akkor* $(\omega^\omega, \leq_{\mathcal{I}}, \omega^\omega) \equiv^{\text{B}}_{\text{GT}} (\omega^\omega, \leq_{\mathcal{J}}, \omega^\omega)$.

Következmény. *Ha* $\mathcal{I} \leq_{\text{RB}} \mathcal{J}$, *akkor* $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{J})$ *és* $\mathfrak{d}(\mathcal{I}) = \mathfrak{d}(\mathcal{J})$. *Speciálisan, ha* $\mathcal{I}$ *első-kategóriájú, akkor* $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$ *és* $\mathfrak{d}(\mathcal{I}) = \mathfrak{d}$.

4. Tézis: Ideálok fedési tulajdonságai

4.1. A $\mathcal{J}$-fedési tulajdonság

Elekes M. bebizonyította (lásd [11]) hogy ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy σ-véges mérték tér és $(A_n)_{n\in\omega}$ egy $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, mely μ-m.m. x-et végtelen vastagon fed, akkor van egy nulla sűrűségű $M \subseteq \omega$, hogy a $(A_n)_{n\in M}$ sorozat is μ-m.m. x-et végtelen vastagon fed.

Ennek felhasználásával Elekes egy érdekes új bizonyítást adott $\mathcal{Z}$ random-lerombolhatatlanságára. Azonnal felmerült ezen eredmények általánosításának kérdése.

Ezek vizsgálatához bevezettük a következő általános fogalmat:

Definíció. (lásd [1]) Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ egy σ-algebra X-en, és $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy ideál. Az $(\mathcal{A}, I)$ pár *$\mathcal{J}$-fedési tulajdonságú* ha minden I-m.m. x-et végtelen vastagon fedő $\mathcal{A}$-beli $(A_n)_{n\in\omega}$ sorozat esetén, létezik egy $S \in \mathcal{J}$, hogy $(A_n)_{n\in S}$ is I-m.m. x-et végtelen vastagon fed.

Például $(\text{Borel}(\mathbb{R}), \mathcal{N})$ nem $\mathcal{I}_{1/n}$-fedési tulajdonságú, és nincsen olyan $\mathcal{J}$ ideál ω-n, hogy $(\text{Borel}(\omega^\omega), I)$ $\mathcal{J}$-fedési tulajdonságú, ha $I = [\omega^\omega]^{\leq\omega}$, NWD (a sehol sem sűrű halmazok ideálja), vagy $\mathcal{K}_\sigma$ (a kompakt halmazok által generált σ-ideál).

Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{J}_0 \leq_{\text{KB}} \mathcal{J}_1$ és $(\mathcal{A}, I)$ $\mathcal{J}_0$-fedési tuéajdonságú, akkor $(\mathcal{A}, I)$ $\mathcal{J}_1$-fedési tulajdonságú is.

A következő tétel Elekes lerombolhatatlansági tételének természetes általánosítása:

Tétel. (lásd [1]) *Legyen X egy lengyel tér, I egy σ-ideál X-en, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}_I$ proper. Ha* $(\text{Borel}(X), I)$ *$\mathcal{J}$-fedési tulajdonságú, akkor $\mathcal{J}$ $\mathbb{P}_I$-lerombolhatatlan.*

4.2. A kategória eset

Ha X egy lengyel tér, akkor jelölje $\mathcal{M}(X)$ az X-ben első-kategóriájú halmazok σ-ideálját.

Tétel. (lásd [1]) *A* $(\text{Borel}(X), \mathcal{M}(X))$ *pár $\mathcal{ED}_{\text{fin}}$-fedési tulajdonságú minden X lengyel tér esetén.*

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{ED}_{\text{fin}} \leq_{\text{KB}} \mathcal{J}$ teljesül például minden $\mathcal{J}$ magas analitikus P-ideál esetén.

Ideálok forszolás-lerombolhatatlanságából nem feltétlenül következik a megfelelő fedési tulajdonság, mert például $\text{Fin} \otimes \text{Fin}$ és $\mathcal{ED}$ is Cohen-lerombolhatatlan ideálok, de $(\text{Borel}(\omega^\omega), \mathcal{M})$ nem $\text{Fin} \otimes \text{Fin}$- vagy $\mathcal{ED}$-fedési tulajdonságú.

Egy speciális esetben beláttuk, hogy a Katětov-Blass-rendezés nem elég a fedési tulajdonságok karakterizálásához:

Tétel. (lásd [1]) *Tegyük fel, hogy* $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$ *és* $|\mathcal{A}| \leq \mathfrak{c}$. *Ekkor nincsen* $\leq_{\mathrm{KB}}$*-legkisebb eleme*

$$\{\mathcal{J} : (\mathcal{A}, I) \ \mathcal{J}\text{-fedési tulajdonságú}\}\text{-nak}.$$

$\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$ nélkül ugyanezt kapjuk egy egyszerű forszolási konstrukcióval:

Tétel. (lásd [1]) ω_1 *Cohen valós hozzáadása után van egy* $\mathcal{J}$ *ideál, hogy* $\mathcal{ED}_{\mathrm{fin}} \not\leq_{\mathrm{KB}} \mathcal{J}$ *(speciálisan,* $\mathcal{Z} \not\leq_{\mathrm{KB}} \mathcal{J}$*) de* $(\mathrm{Borel}(2^\omega), \mathcal{N})$ *és* $(\mathrm{Borel}(2^\omega), \mathcal{M})$ *is* $\mathcal{J}$*-fedési tulajdonságú.*

4.3. Amikor a $\mathcal{J}$-fedési tulajdonság „erősen” hamis

Tétel. (lásd [1]) *Legyen* I *egy eltolás invariáns ccc* σ*-ideál* $\mathbb{R}$*-en, mely kielégíti a következő feltételt:*

$$\mathbb{Q} + A \in I^* \text{ minden } A \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R}) \setminus I \text{ esetén}. \tag{$\sharp$}$$

Ekkor ha $\mathcal{J}$ *egy P-ideál* ω*-n, és* $(\mathrm{Borel}(\mathbb{R}), I)$ *nem* $\mathcal{J}$*-fedési tulajdonságú, akkor létezik* $\mathbb{R}$*-nek egy végtelen vastag* $(A_n)_{n\in\omega}$ *fedése Borel halmazokkal, melyre* $\limsup_{n\in S} A_n \in I$ *minden* $S \in \mathcal{J}$ *esetén.*

A ($\sharp$) feltételt az úgynevezett Steinhaus tulajdonsághoz fűzi szoros kapcsolat (lásd [2]), például $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ és $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ is kielégítik ($\sharp$)-ot.

4.4. $(\mathcal{P}(\omega), \mathcal{I})$ fedési tulajdonságai

Legyen $\mathcal{I}$ és $\mathcal{J}$ ideálok ω-n, $\mathcal{J}$ magas. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}$ *$\mathcal{J}$-fedési tulajdonságú*, ha $(\mathcal{P}(\omega), \mathcal{I})$ $\mathcal{J}$-fedési tulajdonságú.

Használni fogjuk a $\mathrm{non}^*(\mathcal{I}) > \omega$ feltevés következő gyengítését: az $\mathcal{J}$ ideál *gyengén ω-eltaláló*, ha minden $[\omega]^\omega$-beli $(X_n)_{n\in\omega}$ sorozathoz létezik $A \in \mathcal{J}$, hogy a $\{n \in \omega : |X_n \cap A| = \omega\}$ halmaz végtelen. Könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{J}$ pontosan akkor gyengén ω-eltaláló, ha $\mathcal{J} \not\leq_{\mathrm{KB}} \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$.

Kiderült, hogy a $\mathcal{J}$-fedési tulajdonság karakterizálásában az érdekes eset az, ha $\mathcal{J}$ gyengén ω-eltaláló, de nem ω-eltaláló, és hogy ezekben az esetekben van egy $\mathcal{J}_0$ magas ideál, hogy (izomorfia erejéig) $\mathcal{J}$-t tartalmazza $\mathcal{J}_0 \otimes \mathrm{Fin}$ (és minden ilyen alakú ideál gyengén ω-eltaláló, de nem ω-eltaláló).

Az $\mathcal{J}$-(ultra)filterek fogalmának (lásd [17] és J. Flašková's más publikációit) sikerült pontosan meghatároznunk mely ideálok $\mathcal{J}_0 \otimes \mathrm{Fin}$-fedési tulajdonságúak.

Tétel. (lásd [1]) *Legyen* $\mathcal{J}_0$ *egy magas ideál. Ekkor* $\mathcal{I}$ *pontosan akkor* $\mathcal{J}_0 \otimes \mathrm{Fin}$*-fedési tulajdonságú, ha* $\mathcal{I}^*$ *egy* $\mathcal{J}_0$*-filter.*

5. Tézis: A Hechler tétel változatai

5.1. Hechler eredeti tétele és két változata

Hechler eredeti tétele a következő állítás (lásd [20] és [9]): Legyen $(Q,\leq)$ egy σ-irányított parciálisan rendezett halmaz. Ekkor egy ccc generikus bővítésben $(\omega^\omega,\leq^*)$ egy kofinális részhalmaza rendezés-izomorf $(Q,\leq)$-vel.

Ennek a tételnek van egy igen fontos alkalmazása, nevezetesen, hogy tényleg nem tudunk semmi többet $\mathfrak{b}$ és $\mathfrak{d}$ kapcsolatáról, mint a triviális $\omega < \mathrm{cf}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d}) \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

[31]-ban Soukup L. felvetette, hogy Hechler tétele igaz-e klasszikus σ-ideálokra parciálisan rendezve a tartalmazással. T. Bartoszyński, M.R. Burke, és M. Kada a következő pozitív válaszokat adták (lásd [4] és [10]): Legyen $(Q,\leq)$ egy σ-irányított parciálisan rendezett halmaz. Ekkor léteznek $\mathbb{P}_0$ és $\mathbb{P}_1$ ccc kényszerképzetek, hogy $V^{\mathbb{P}_0}$-ban $(\mathcal{M},\subseteq)$ egy kofinális részhalmaza rendezés-izomorf $(Q,\leq)$-vel és $V^{\mathbb{P}_1}$-ben $(\mathcal{N},\subseteq)$ egy kofinális részhalmaza rendezés-izomorf $(Q,\leq)$-vel.

5.2. Hechler tétele magas analitikus P-ideálokra

[10] modelljének felhasználásával beláttam a Hechler tétel következő változatát:

Tétel. (lásd [14]) *Legyen $(Q,\leq)$ egy σ-irányított parciálisan rendezett halmaz. Ekkor egy ccc generikus bővítésben minden alapmodellben kódolt $\mathcal{I}$ magas analitikus P-ideálra $(\mathcal{I},\subseteq^*)$ egy kofinális részhalmaza rendezés-izomorf $(Q,\leq)$-vel.*

6. Tézis: $\mathfrak{p}$ új általánosításai

6.1. A $\mathfrak{p}_{\sqsubseteq}(\mathcal{I})$ számosság

$\mathfrak{p}$ definíciójában Fin helyett tekinthetünk más ideálokat is. Ezt már elég sokféleképpen megtették különböző cikkekben. Mi egy új általánosítást vizsgáltunk meg.

Definíció. (lásd [7]) Egy az ideálokon adott $\sqsubseteq$ reláció esetén az $\mathcal{I}$ ideál $\sqsubseteq$-*metszet száma*: $\mathfrak{p}_{\sqsubseteq}(\mathcal{I}) = \min\{\chi(\mathcal{J})\colon \mathcal{J} \not\sqsubseteq \mathcal{I}\}$, ha van olyan $\mathcal{J}$, hogy$\mathcal{J} \not\sqsubseteq \mathcal{I}$.

Mi a *Katětov-metszet számmal* ($\mathfrak{p}_{\mathrm{K}}(\mathcal{I})$), a *Katětov-Blass-metszet számmal* ($\mathfrak{p}_{\mathrm{KB}}(\mathcal{I})$), és az *egy-egy-metszet számmal* ($\mathfrak{p}_{1\text{-}1}(\mathcal{I})$) foglalkoztunk részletesebben.

Állítás. (lásd [7]) $\mathfrak{p}_{\mathrm{K}}(\mathcal{I}) \leq \kappa$ *pontosan akkor teljesül minden ideálra, ha* $2^\kappa > 2^\omega$.

Beláttuk, hogy a $\forall\ \mathcal{I}\ \mathfrak{p}_{\mathrm{KB}}(\mathcal{I}) \leq \omega_1$ feltevésből még nem következik, hogy $2^{\omega_1} > 2^\omega$:

Tétel. (lásd [7]) ZFC*-vel konzisztens, hogy* $2^{\omega_1} = 2^\omega$ *tetszőlegesen nagy és a Katětov-Blass-rendezés nem felfelé irányított az* ω_1 *karakterű filterken. Speciálisan* $\mathfrak{p}_{\mathrm{KB}}(\mathcal{F}) \leq \omega_1$ *minden filterre.*

Egy egyszerű alsó korlátot adtunk $\mathfrak{p}_{\text{KB}}(\mathcal{I})$-ra, ha $\mathcal{I}$ első-kategóriájú:

Állítás. (lásd [7]) *Ha $\mathcal{I}$ első-kategóriájú, akkor $\mathfrak{p}_{\text{KB}}(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{b}$.*

Beláttuk, hogy az ideálra és a rendezésre vonatkozó feltételek szükségesek ebben az állításban:

Tétel. (lásd [7]) *Tegyük fel* GCH*-t. Ekkor $V^{\mathbb{C}_{\omega_2}}$-ben teljesülnek a következők:*

(a) *van egy $\mathcal{F}$ filter, melyre $\mathfrak{p}_{\text{1-1}}(\mathcal{F}) = \omega_2$;*

(b) *van egy első-kategóriájú $\mathcal{G}$ filter, melyre $\mathfrak{p}_{\text{K}}(\mathcal{G}) = \omega_2$;*

(c) *$\mathfrak{p}_{\text{K}}(\mathcal{I}) = \omega_1$ minden F_σ ideálra és minden analitikus P-ideálra.*

6.2. A konvex Fréchet-Urysohn tulajdonság

$\mathfrak{p}$ definiálható topologikus kontextusban is: a legkisebb κ, melyre létezik κ súlyú (lokálisan) megszámlálható (akár teljesen reguláris vagy normális) tér, ami nem Fréchet-Urysohn (FU) tulajdonságú. Ez a tulajdonság természetesen általánosítható az $\mathcal{I}$-konvergencia felhasználásával, és kapjuk az $\mathcal{I}$-FU tulajdonságot.

Tétel. (lásd [7]) *$\mathfrak{p}_{\text{K}}(\mathcal{I})$ a legkisebb lehetséges súlya egy megszámlálható nem $\mathcal{I}$-FU térnek.*

$\mathfrak{p}_{\text{K}}(\mathcal{Z})$-re adtunk még egy karakterizációt. Tudjuk, hogy egy teljesen reguláris tér tekinthető a rajta értelmezett Borel valószínűségi mértékek gyenge* konvergenciával ellátott $P(X)$ terében egy zárt altérnek.

Definíció. (lásd [7]) Az X tér kielégíti a *konvex Fréchet-Urysohn feltételt*, ha minden $A \subseteq X$ és $x \in \overline{A}$ esetén van A-n értelmezett véges tartojú valószínűségi mértékeknek egy sorozata, mely (gyenge*) konvergál δ_x-hez.

Felhasználva Niederreiter a véges tartójú valószínűségi mértékek (gyenge*) limeszeire vonatkozó karakterizációs tételét (lásd [29]) beláttuk a következőt:

Tétel. (lásd [7]) *Legyen X teljesen reguláris. Ekkor X pontosan akkor elégíti ki a konvex FU feltételt, ha X kielégíti a $\mathcal{Z}$-FU feltételt.*

6.3. MAD rendszerek ideálokba permutálhatósága

$\mathfrak{p}$-hez hasonlóan $\mathfrak{a}$ is általánosítható relációkra, például definiálhatjuk $\mathfrak{a}_{\text{1-1}}(\mathcal{I})$-t:

Definíció. (lásd [7]) Legyen $\mathcal{I}$ egy ideál ω-n. Ekkor egy majdnem-diszjunkt $\mathcal{A}$ rendszer $\mathcal{I}$-*maximális*, ha $\langle \mathcal{A} \rangle_{\text{id}} \not\leq_{\text{1-1}} \mathcal{I}$.

Állítás. (lásd [7]) $\text{add}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$ *esetén van $\mathcal{I}$-maximális MAD.*

Tétel. (lásd [7]) *Legyen $\mathcal{I}$ egy magas F_σ ideál vagy egy magas analitikus P-ideál. Ekkor* MA(σ-centered)*-ből következik, hogy van $\mathcal{I}$-maximális MAD.*

Hivatkozások

[1] M. Balcerzak, B. Farkas, S. Głąb: *Covering properties of ideals*, submitted to J. Symbolic Logic.

[2] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, T. Natkaniec: *On Smital properties*, Topology Appl. **158** (2011), pages 2066-2075.

[3] T. Bartoszynski, H. Judah: *Set Theory: On the Structure of the Real Line*, A.K. Peters, 1995.

[4] T. Bartoszynski, M. Kada: *Hechler's theorem for the meager ideal*, Topology Appl. **146-147** (2005), pages 429-435.

[5] J. Baumgartner: *Iterated forcing*, in Surveys in set theory, editor: A. Mathias, London Mathematical Society Lecture Notes **87**, pages 1-59, Cambridge University Press 1983.

[6] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of Set Theory, editors: M. Foreman, M. Magidor, and A. Kanamori, Springer Netherlands, 2010, pages 395-489.

[7] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas: *Cardinal coefficients associated to certain orders on ideals*, to appear in Arch. Math. Logic.

[8] J. Brendle: *Cardinal invariants of analytic quotients*, slides for ESI workshop on large cardinals and descriptive set theory, Vienna, June 14-27, 2009.

[9] M. R. Burke: *A proof of Hechler's theorem on embedding $\aleph_1$-directed sets cofinally into* $(\omega^\omega, <^*)$, Arch. Math. Logic **36** (1997), pages 399-403.

[10] M. R. Burke, M. Kada: *Hechler's theorem for the null ideal*, Arch. Math. Logic **43** (2004), pages 703-722.

[11] M. Elekes: *A covering theorem and the random-indestructibility of the density zero ideal*, to appear in Real Anal. Exchange.

[12] I. Farah: *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Memoirs of the American Mathematical Society **148**, no. 702, 2000.

[13] B. Farkas: *Forcing indestructible extensions of almost disjoint families*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **51** (2010), Proceedings of Winter School 2010, pages 9-12.

[14] B. Farkas: *Hechler's theorem for tall analytic P-ideals*, J. Symbolic Logic **76** (2011), no. 2, pages 729-736.

[15] B. Farkas: *Idealized MADness*, in preparation.

[16] B. Farkas, L. Soukup: *More on cardinal invariants of analytic P-ideals*, Comment. Math. Univ. Carolin. **50** (2009), no. 2, pages 281-295.

[17] J. Flašková: *Ultrafilters and small sets*, PhD thesis, Charles University, Czech Republic, 2006.

[18] S. Fuchino, S. Geschke, L. Soukup: *How to drive our families mad*, to appear in Arch. Math. Logic.

[19] M. Goldstern: *Tools for your forcing construction*, Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991), Israel Math. Conf. Proc. **6**, pages 305-360, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[20] S.H. Hechler: *On the existence of certain cofinal subsets of* ${}^{\omega}\omega$, Axiomatic set theory, editor: T. Jech, Amer. Math. Soc. (1974), pages 155-173.

[21] M. Hrušák: *Combinatorics of filters and ideals*, Contemp. Math. **533** (2011), pages 29-69.

[22] M. Hrušák, J. Zapletal: *Forcing with qoutients*, Arch. Math. Logic **47** (2008), pages 719-739.

[23] T. Jech: *Set theory / The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[24] A. S. Kechris: *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[25] K. Kunen: *Set theory / An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **102**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1980.

[26] A. R. D. Mathias: *Happy families*, Ann. of Math. Logic **12** (1977), pages 59-111.

[27] K. Mazur: F_σ *ideals and* $\omega_1\omega_1^*$*-gaps in the Boolean algebra* $\mathcal{P}(\omega)/I$, Fund. Math. **138** (1991), pages 103-111.

[28] D. Meza-Alcántara: *Ideals and filters on countable sets*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma México, México, 2009.

[29] H. Niederreiter: *On the existence of uniformly distributed sequences in compact spaces*, Compositio Math. **25** (1972), pages 93-99.

[30] S. Solecki: *Analytic P-ideals and their applications*, Ann. Pure Appl. Logic **99** (1999), pages 51-72.

[31] L. Soukup: *Pcf theory and cardinal invariants of the reals*, to appear in Comment. Math. Univ. Carolin.

[32] S. M. Srivastava: *A course on Borel sets*, Grad. Texts in Math. **180**, Springer-Verlag, New York 1998.

[33] E. Szemerédi: *On Sets of Integers Containing No k Elements in Arithmetic Progression*, Acta Arith. **27** (1975), pages 199-245.

[34] M. Talagrand: *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*, Studia Mathematica **67** (1980), no. 1, pages 13-43.