



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék



KOSSA Attila

**Egzakt feszültségszámítási módszerek
rugalmas-képlékeny anyagmodellekhez**

PhD téziszfüzet

Budapest, 2011.

Témavezető: Dr. SZABÓ László

Bevezetés

A mérnöki tudományok művelésének egyik létfontosságú alapja a gondosan kidolgozott mechanikai elméleti háttér. Ennek szerves részét képezi az anyag deformációjának matematikai modellezésével foglalkozó tudományág. A szilárd testek alakváltozásának leírására alkalmazott elméletek különös fontossággal bírnak a gépészmérnöki és az építőmérnöki gyakorlatban.

A testre ható terhelések és ennek hatására bekövetkező deformáció kapcsolatának leírásához kulcsfontosságú a feszültség- és alakváltozás-mező közötti kapcsolatot definiáló anyagtörvény alkalmazása. A legegyszerűbb a Hooke-törvény, ami tisztán lineárisan rugalmas anyagi viselkedést feltételez. Ez az anyagtörvény azonban csak korlátozott esetekben használható, amikor az alkalmazott terhelés az anyag deformációja közötti kapcsolat lineáris modellezésével is még a mérnöki pontosság határain belül kielégítő eredményt kaphatunk. Az anyag képlékeny deformációjának figyelembevételével jutunk el a rugalmas-képlékeny anyagtörvényekhez, melyek elméleti alapjait a képlékenységtan tudományág tárgyalja. Attól függően, hogy a képlékeny alakváltozás során fellépő fizikai folyamatokat milyen mélységben modellezzük, számos rugalmas-képlékeny anyagtörvény áll rendelkezésünkre. A mérnöki gyakorlat számára legfontosabbakat szinte az összes kereskedelmi végelem szoftver alapmodellként tartalmazza. Ezen alapmodellek csoportjába tartoznak a von Mises-féle és a Drucker–Prager-féle képlékenységi feltételre épülő rugalmas-képlékeny anyagtörvények is.

A von Mises-féle képlékenységi feltételt főként fémekhez javasolt anyagtörvényekben használjuk, ahol a testre ható hidrosztatikus feszültségi állapot elhanyagolható mértékben befolyásolja a képlékeny anyagi viselkedést. A hidrosztatikus feszültségnek a képlékeny deformációra gyakorolt hatásának egy lehetséges figyelembevételével juthatunk el a Drucker–Prager-féle képlékenységi feltételhez, amit főként talajszerű anyagok, beton valamint egyes polimerek esetén alkalmazunk.

A képlékeny anyagi viselkedés pontosabb leírását kapjuk a keményedési jelenségek modellezésével, melyeket rendszerint két csoportba

sorolhatunk: izotrop és kinematikai jellegű keményedés. Ezek kombinálásával a tényleges fizikai folyamat jobban modellezhető.

További fontos összetevője egy rugalmas-képlékeny anyagmodellnek a folyási törvény megválasztása, ami lehet nem kapcsolt illetve kapcsolt, attól függően, hogy a képlékeny alakváltozás-növekményt egy képlékenységi potenciálfüggvény vagy pedig a képlékenységi felületet leíró függvény gradiense segítségével számítjuk.

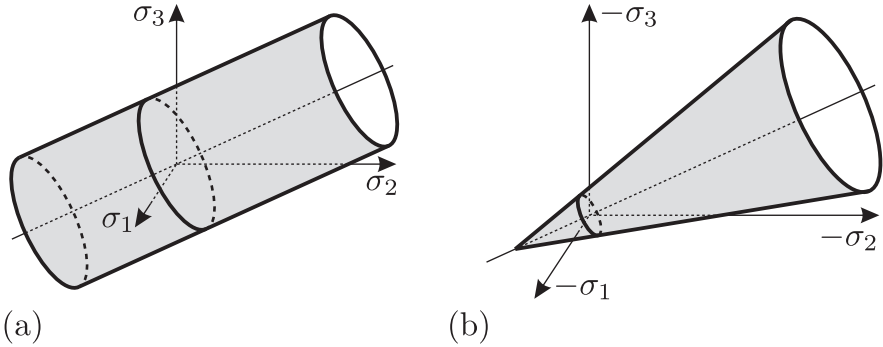
A rugalmas-képlékeny számítási feladatok osztályozásának egy lehetséges módja az alábbi felbontás: a) feszültségmező számítása előírt alakváltozásmező esetén; b) alakváltozásmező meghatározása adott feszültségmező esetén. Ezen számítási feladatok csak kis hányadához létezik tisztán analitikus megoldás, rendszerint olyan esetekben, amikor a vizsgált geometria és az alkalmazott terhelés is viszonylag egyszerű. A legtöbb esetben azonban összetett 3 dimenziós geometria, valamint bonyolult terhelések jellemzik az adott feladatot, mely problémák matematikai leírása olyan peremérték-feladat formájában jelentkezik, melyre az analitikus megoldás előállítás gyakorlatilag reménytelen. Ezen peremérték-feladatok hatékony megoldásának egy jól bevált numerikus eszköze a végeselemes programok alkalmazása. A rugalmas-képlékeny feladatok számításához használt végeselemes programok rendszerint az ismeretlen elmozdulásmezőre épülő numerikus módszerek, melyek során a végeselemeken belül, az integrálási pontokban szükséges számítanunk egy megadott alakváltozás-növekményhez tartozó feszültségnövekményt az alkalmazott anyagmodellnek megfelelően. Az eredmények pontossága nagymértékben függ attól, hogy milyen feszültségszámítási eljárást alkalmazunk a feszültségnövekmények meghatározására. Számos numerikus technika terjedt el ennek a feladatnak az elvégzésére, de a nagyobb számítási pontosság iránti igény miatt az egzakt megoldások előállítása továbbra is a képlékenységtani kutatások részét képezik. A végeselemes számítások hatékonyságában a globális egyensúlyi egyenlet megoldásánál használt érintő merevségi mátrixnak is döntő szerepe van. Új feszültségszámító eljárások kidolgozása esetén fontos, hogy az algoritmushoz tartozó ún. konzisztens érintő merevségi tenzort is előállítsuk annak érdekében, hogy a globális nemlineáris egyenletrendszer megoldásánál kvadratikus konvergenciát biztosítsunk.

Célkitűzések

Jelen munka fő célja egzakt feszültség és alakváltozás megoldásokat előállítani két széleskörben alkalmazott növekményes alakú rugalmas-képlékeny anyag törvényhez, melyek jellemzőit összefoglalóan az 1. táblázat ismereteti. A vizsgált anyagmodellekhez tartozó képlékenységi felületeket az 1. ábra szemlélteti a főfeszültségi koordináta-rendszerben.

1. táblázat. A vizsgált anyagmodellek jellemzői

	1. anyagmodell	2. anyagmodell
képlékenységi feltétel	von Mises	Drucker–Prager
folyási törvény	kapcsolt	nem kapcsolt
keményedési törvény	kombinált lineáris	lineáris izotrop



1. ábra. A képlékenységi felületek szemléltetése a főfeszültségi koordináta-rendszerben. (a) von Mises-féle képlékenységi felület (b) Drucker–Prager-féle képlékenységi felület.

A vizsgált anyagmodellekhez tartozó növekményes alakú konstitutív egyenletek az alábbi alakban adhatóak meg:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{D}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}},} \quad (1)$$

melynek inverz alakja

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}.} \quad (2)$$

A fenti egyenletekben szereplő negyedrendű \mathcal{D}^{ep} és \mathcal{C}^{ep} tenzorok a két anyagmodell esetén az alábbi alakúak:

1. anyagmodell:

$$\mathcal{D}^{\text{ep}} = \mathcal{D}^{\text{e}} - \frac{\mathcal{D}^{\text{e}} : \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} : \mathcal{D}^{\text{e}}}{2G + h}, \quad (3)$$

$$\mathcal{C}^{\text{ep}} = \mathcal{C}^{\text{e}} + \frac{1}{h} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \quad (4)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}. \quad (5)$$

2. anyagmodell:

$$\mathcal{D}^{\text{ep}} = \mathcal{D}^{\text{e}} - \frac{\mathcal{D}^{\text{e}} : \mathbf{Q} \otimes \mathbf{N} : \mathcal{D}^{\text{e}}}{\tilde{h}}, \quad (6)$$

$$\mathcal{C}^{\text{ep}} = \mathcal{C}^{\text{e}} + \frac{1}{j} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{N}, \quad (7)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{2} \|\mathbf{s}\|} + \alpha \boldsymbol{\delta}, \quad \text{és} \quad \mathbf{Q} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{2} \|\mathbf{s}\|} + \beta \boldsymbol{\delta}. \quad (8)$$

A fenti kifejezésekben: \mathcal{D}^{e} jelenti a negyedrendű rugalmas érintő tenzort, melynek inverze a negyedrendű \mathcal{C}^{e} tenzor; \mathbf{s} a deviátoros feszültségi tenzor; $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{s} - \alpha \boldsymbol{\delta}$ jelöli a relatív feszültségi tenzort, ahol α a képlékenységi felület középének elmozdulását megadó feszültségi tenzor; $\boldsymbol{\delta}$ jelenti a másodrendű egységtenzort; továbbá a G , h , \tilde{h} , j , α , β paraméterek pedig anyagi állandók.

A dolgozat célja egzakt megoldást előállítani az (1) differenciálegyenlethez mindkét anyagmodellre, abban az esetben, ha ismert az alakváltozási mező és feltételezzük, hogy az alakváltozási sebesség konstans. Ennek a megoldásnak kulcsfontosságú szerepe van a végeselemes alkalmazás során, ahol a feszültség számítási eljárás során elfogadott közelítés, hogy az alakváltozás-növekményen belül az alakváltozási sebességet állandónak tekintjük. További cél teljes körű numerikus feszültség számító eljárás kidolgozása mindkét anyagmodell esetén, biztosítva a végeselemes alkalmazási lehetőséget. Az eddig ismertetett célokon felül, az új feszültség számító algoritmusokhoz tartozó negyedrendű konzisztens érintőtenzorok előállítása is az elvégzendő feladatok részét képezi.

További célkitűzés az inverz alakú (2) anyagegyenlet megoldása az alakváltozásra, előírt feszültségmező esetén, abban az esetben ha a feszültségsebesség állandó.

Tézisek

1. tézis

Előállítottam a Mises-féle képlékenységi feltételre épülő rugalmas-képlékeny anyagmodell konstitutív egyenletének a feszültségmezőre vonatkozó megoldását, kombinált lineáris keményedés esetén, kapcsolt folyási törvény alkalmazásával.

Meghatároztam a feszültség és alakváltozás kapcsolatát leíró differenciálegyenlet-rendszer egzakt megoldását ismert alakváltozásmező esetén, konstans alakváltozási sebesség feltételezése mellett. A feszültségmezőre kapott megoldás figyelembe veszi mind a lineáris kinematikai, mind a lineáris izotrop jellegű keményedési törvényeket. Az alkalmazott megoldási technika a deviátor síkokban értelmezett szög jellegű változó bevezetésére épül. Előállítottam ezen szög változását leíró differenciálegyenlet megoldását a nemteljes bétafüggvény felhasználásával.

■ A tézishez kapcsolódó publikációk: [2], [1], [3], [6], [9].

2. tézis

Teljes körű numerikus feszültségszámítási algoritmust dolgoztam ki az 1. tézisbeli rugalmas-képlékeny anyagmodellhez megadva az algoritmushoz tartozó konzisztens érintőtenzor explicit alakú kifejezését is.

Az 1. tézisben megfogalmazott egzakt feszültségmegoldásra alapozva numerikus feszültségszámító eljárást dolgoztam ki, amely egyszerűen beépíthető végeelemes programokba. Az általános terhelési eset mellett az arányos terhelés esetére érvényes feszültségszámító formulákat is megadtam. A kidolgozott algoritmus tartalmazza az összes lehetséges terhelési esetre vonatkozó megoldásokat, amik a számítások során előfordulhatnak. Kidolgoztam továbbá egy hatékony numerikus számítási eljárást a megoldásokban előforduló nemteljes bétafüggvény inverzének számítására. A feszültségszámító algoritmushoz kapcsolódóan előállítottam az ún. konzisztens érintőtenzort is, ami a végeelemes számítások során nélkülözhetetlen a megfelelő konvergencia biztosításához. A teljes numerikus feszültségszámító eljárást, a konzisztens érintőtenzor

megadásával együtt, beépítettem az ABAQUS kereskedelmi végeselemes programrendszerbe, a szoftver által biztosított felhasználói anyag törvényen keresztül, FORTRAN 77 programozási környezetben. A módszer alkalmazhatóságát és hatékonyságát teszt példákön végzett számításokkal igazoltam.

■ A tézishez kapcsolódó publikációk: [2], [3], [4].

3. tézis

Előállítottam a Mises-féle képlékenységi feltételre épülő rugalmas-képlékeny anyagmodell konstitutív egyenletének az alakváltozásmezőre vonatkozó megoldását kombinált lineáris keményedés esetén, kapcsolt folyási törvény alkalmazásával.

Előállítottam az 1. tézisbeli anyag törvényt definiáló feszültség-alakváltozás kapcsolati egyenlet inverz alakjának az alakváltozásmezőre vonatkozó megoldását abban az esetben, amikor a független változó az előírt feszültségmező. Az így bemutatott megoldás konstans feszültségsebesség feltételezése mellett érvényes, figyelembe véve az izotrop és kinematikai jellegű keményedési mechanizmusokat. Az új megoldási séma a deviátor síkokban értelmez egy szög jellegű változót, melynek változását leíró függvényt a nemteljes bétafüggvény alkalmazásával határoztam meg.

■ A tézishez kapcsolódó publikációk: [2], [1], [9].

4. tézis

Meghatároztam a Drucker–Prager-féle képlékenységi feltételen alapuló rugalmas-képlékeny anyagmodell konstitutív egyenletének a feszültségmezőre vonatkozó megoldását lineáris izotrop keményedés esetén, nem kapcsolt folyási törvény alkalmazásával.

Előállítottam a feszültség és alakváltozás kapcsolatát leíró differenciálegyenlet-rendszer egzakt megoldását lineárisan változó alakváltozásmező esetén. A feszültségmezőre kapott megoldás lineáris izotrop keményedési törvény alkalmazása esetén érvényes. Az alkalmazott megoldási technika a deviátor síkokban értelmezett szög jellegű változó bevezetésére épül. Ezen szög változását leíró differenciálegyenlet megoldását

a nemteljes bétafüggvény felhasználásával adtam meg. Kidolgoztam a feszültségmezőre vonatkozó megoldást a deviátoros értelemben arányos terhelés esetére, valamint megoldást állítottam elő a vizsgált folyási felület esetén ismert szingularitási problémára is.

■ A tézishez kapcsolódó publikációk: [5], [10], [12].

5. tézis

A 4. tézisbeli egzakt feszültségmegoldásra alapozva teljes körű numerikus feszültségszámító algoritmust dolgoztam ki, előállítva az algoritmushoz tartozó konzisztens érintőtenzor explicit alakú számítását is.

Előállítottam a 4. tézisbeli egzakt feszültségmegoldáshoz tartozó numerikus feszültségszámító eljárást, ami az új megoldásnak a végeeselemes programokban való felhasználásához szükséges. Az általános terhelési esetre vonatkozó formulák ismertetése mellett, a deviátoros értelemben arányos terhelésre vonatkozó összefüggéseket is közöltem. A folyási felület szinguláris pontjához tartozó megoldásokat is meghatároztam. Kidolgoztam továbbá egy feltételt a folyási felület csúcsában lévő feszültségállapot esetén annak eldöntésére, hogy az új feszültségállapot milyen feltételek teljesülése esetén képes elhagyni ezt a pontot. A numerikus feszültségszámító formulák linearizálásával előállítottam az algoritmushoz kapcsolódó konzisztens érintőtenzor explicit alakú kifejezését, ami kulcsfontosságú a végeeselemes alkalmazás esetén.

■ A tézishez kapcsolódó publikációk: [5], [10], [12].

6. tézis

Megadtam a Drucker–Prager-féle képlékenységi feltételre épülő rugalmas-képlékeny anyagmodell konstitutív egyenletének az alakváltozásmezőre vonatkozó megoldását lineáris izotrop keményedés és kapcsolt folyási törvény alkalmazása esetén.

Előállítottam az 4. tézisbeli anyagmodell inverz alakú alakváltozás-feszültség kapcsolati egyenletének az alakváltozásmezőre vonatkozó megoldását, amennyiben a független változó az előírt feszültségmező. Az így előállított megoldás konstans feszültségsebesség feltételezése mellett érvényes, figyelembe véve a lineáris izotrop jellegű keményedési törvényt.

Az új megoldási technika a deviátoros síkokban értelmezett szög jellegű változó bevezetésére épül, melynek segítségével a megoldást explicit alakú kifejezés formájában állítottam elő.

■ A téziszhez kapcsolódó publikációk: [5], [10], [12].

Alkalmazások

A dolgozatban bemutatott egzakt feszültség- és alakváltozás megoldások lehetőséget biztosítanak rugalmas-képlékeny feladatok esetén referenciamegoldások előállítására. A közölt feszültségszámító algoritmusok továbbá beépíthetőek végeselemes programokba, ahol a nagyobb számítási pontosság elérése cél. A módszerek alkalmazhatóságát a publikációkra történt eddigi hivatkozások igazolják.

A [2] publikációra történt hivatkozások:

- Brannon, R. M., Leelavanichkul, S.: 2010. A multi-stage return algorithm for solving the classical damage component of constitutive models for rocks, ceramics, and other rock-like media. *International Journal of Fracture* **163**, 133–149. (IF = 1,043).
- Kaliszky S., Lógó J., Merczel D. B.: 2011. Softening and Hardening Constitutive Models and Their Application to the Analysis of Bar Structures. *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal* **39**, 334–345. (IF = 0,472).
- Narvaez-Tovar, C. A., Lopez-Vaca, O. R., Garzon-Alvarado, D. A.: 2011. Modelo de endurecimiento isotrópico con esquema de integración explícita para biomateriales y su aplicación a la expansión de stents. *Revista Cubana de Investigaciones Biomédicas* **30**, 104–123.
- Rezaiee-Pajand, M., Sharifian, M.: 2011. A novel formulation for integrating nonlinear kinematic hardening Drucker–Prager’s yield condition. *European Journal of Mechanics / A Solids* **31**, 163–178. (IF = 1,414).

Publikációk

Folyóiratcikkek:

- [1] Kossa A.: 2007. Integration method for constitutive equation of von Mises elastoplasticity with linear hardening. *Periodica Polytechnica - Mechanical Engineering* **51**, 71–75.
- [2] Kossa A., Szabó L.: 2009. Exact integration of the von Mises elastoplasticity model with combined linear isotropic-kinematic hardening. *International Journal of Plasticity* **25**, 1083–1106. (*IF* = 4,791).
- [3] Kossa A.: 2009. Rugalmas-képlékeny testek anyagegyenleteinek egzakt integrálási módszerei. *Építés-Építészettudomány* **37**, 241–264.
- [4] Kossa A., Szabó L.: 2010. Numerical implementation of a novel accurate stress integration scheme of the von Mises elastoplasticity model with combined linear hardening. *Finite Elements in Analysis and Design* **46**, 391–400. (*IF* = 1,030).
- [5] Szabó, L., Kossa, A.: 2012. A new exact integration method for the Drucker–Prager elastoplastic model with linear isotropic hardening. *International Journal of Solids and Structures* **49**, 170–190. (*IF* = 1.677).

Konferenciatickek:

- [6] Kossa A., Szabó L.: 2009. Computational aspects of the integration of von Mises elastoplasticity model with combined hardening. *Computational Plasticity X: Fundamentals and Applications*, 2009. szeptember 2-4., Barcelona, Spanyolország.

Konferencia előadások:

- [7] Kossa A., Szabó L.: 2006. Logarithmic stress rate in single crystal elastoplasticity. *6th European Solid Mechanics Conference*, 2006. augusztus 28. - szeptember 1., Budapest, Magyarország.
- [8] Kossa A., Szabó L.: 2006. Using logarithmic stress rate in computational single crystal elastoplasticity. *35th Solid Mechanics Conference*, 2006. szeptember 4-8., Krakko, Lengyelország.
- [9] Kossa A., Szabó L.: 2007. Rugalmas-képlékeny testek konstitutív egyenleteinek integrálása lineáris izotróp és kinematikai keményedés esetén. *X. Magyar Mechanikai Konferencia*, 2007. augusztus 27-29., Miskolc, Magyarország.
- [10] Kossa A.: 2011. Egzakt feszültségszámító eljárás a Drucker-Prager-féle rugalmas-képlékeny anyagmodellre izotrop keményedés esetén. *XI. Magyar Mechanikai Konferencia*, 2011. augusztus 29-31., Miskolc, Magyarország.

Egyéb előadások:

- [11] Kossa A.: 2007. Véges rugalmas-képlékeny anyagmodellek numerikus vizsgálata. *Mechanika Szeminárium, BME Műszaki Mechanikai Tanszék*. 2007. május 10.
- [12] Kossa A., Szabó L.: 2010. Exact stress update procedure for the hardening Drucker–Prager material model. *Seminar at Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Arizona*, Egyesült Államok, 2010. szeptember 9.