

CSOPORTREPREZENTÁCIÓK AZ
ÖSSZEFONÓDOTTSÁG-ELMÉLETBEN
PhD tézisfüzet

VRANA PÉTER

Témavezető: DR. LÉVAY PÉTER

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
ELMÉLETI FIZIKA TANSZÉK
(2011)

Előzmények

Az összefonódottság a kvantummechanika egyik megkülönböztető jegye. Az összefonódott állapotok olyan korrelációkat mutatnak, amelyet nem lehet lokális klasszikus valószínűségi elméletekkel magyarázni, és ezek teszik lehetővé, hogy túlszárnyaljuk a klasszikus információfeldolgozási protokollok teljesítőképességét. A kvantuminformáció-elmélet egyik legfontosabb megoldatlan problémája az inekvivalens módon összefonódott állapotok klasszifikációja. Az összefonódottság kvantifikálása pedig lehetővé tenné, hogy jobban megértsük azt mint erőforrást.

A nemlokális tulajdonságokat olyan függvények segítségével tanulmányozhatjuk, amelyek invariánsak lokális invertálható transzformációkra nézve, tehát olyanokra, amelyek az összetett kvantumrendszer kölcsönhatásmentes időfejlődését írják le. Az ilyen függvényeket ezen a területen összefonódottsági mértékeknek hívjuk. Több megközelítés lehetséges, az egyik esetben az egyes részrendszerek Hilbert-terein ható unitér transzformációk szorzatait tekintjük (ezt hívjuk lokális unitér csoportnak). Ennek a csoportnak az egyik előnye az, hogy elegendő a valós polinom invariánsok keresése ahhoz, hogy az ekvivalenciaosztályokat szétválasztó halmazhoz jussunk. Egyes esetekben azonban az általános lineáris csoportok szorzatait (amelyet a sztochasztikus lokális operációk és klasszikus kommunikáció csoportjának hívunk) tekintve egyszerűbb szerkezethez jutunk, és egyes egyszerű esetekben a teljes klasszifikációt sikerült megtalálni. Figyelemre méltó példák a két részrendszerből álló rendszerek, valamint a három és négy qubit esete.

Habár a kvantuminformáció-elmélet hagyományosan a megkülönböztethető részrendszerekből álló rendszerekkel foglalkozott, értelmes bozonikus és fermionikus részecskéket tartalmazó rendszerekkel is foglalkozni. Ebben az esetben a kölcsönhatás nélküli időfejlődések azok, amelyeket tisztán egyrészecske-operátorokból felépülő Hamilton-operátorok generálnak, ami azt jelenti, hogy az azonos fajta részecskéken ugyanaz a lineáris transzformáció hat. Túl azon, hogy a kvantummechanika alapjait tekintve fontos kérdés, az azonos részecskék összefonódottsága a soktest-rendszerekben alapvető fontosságú.

A megkülönböztethető részrendszerek esetéhez képest jóval kevesebbet tudunk ezen a területen. A néhány eredmény egyike a két kétállapotú bozon valamint a két négyállapotú fermion rendszerek összefonódott állapotainak klasszifikációja. Érdekes, hogy ez a két eset hasonló egymáshoz és a két megkülönböztethető qubit esetéhez. Ezen hasonlóság okait és lehetséges alkalmazásait még nem vizsgálták részletesen.

Célkitűzések

A dolgozat első részében a megkülönböztethető részrendszereket tartalmazó kvantumrendszerek összefonódottságát vizsgálom. A célom az volt, hogy tanulmányozzam a lokális unitér csoportok valamint a részrendszereken ható speciális lineáris csoportok szorzatainak hatása alatt invariáns polinomok algebráit. Az előbbi az összefonódott állapotok finomabb klasszifikációjához vezet, míg az utóbbi szintén fizikailag értelmes transzformációkból áll, és egy durvább klasszifikációhoz vezet, ami egyszerűbb orbitstruktúrát eredményezhet. Mindkét esetben két fő irány lehetséges, amelyek különböző jellegű adatokat eredményeznek. Egyrészt új invariánsokat szeretnénk találni, amelyek explicit és könnyen számítható formulákkal adóttak. Másrészt meg szeretnénk adni az invariánsok algebrájának egy prezentációját generátorok és relációk formájában, vagy megtalálni az elsődleges és másodlagos invariánsokat. Ez lehetővé teszi, hogy az állapotban lévő összes nemlokális információt kinyerjük invariáns függvények egy minimális halmazát használva.

A második részben azonos részecskéket tartalmazó kvantummechanikai rendszerek összefonódottságát vizsgálom. Ezen a területen néhány speciális esetet vizsgáltak, és néhány esetben megoldották a klasszifikációt. Az invariánsok, amelyekkel ezen a területen találkozunk, gyakran hasonlítanak a megkülönböztethető részrendszerek esetében megtalálható invariánsokhoz. A célom az azonos és megkülönböztethető részrendszerekből álló kvantumrendszerek összefonódottsági mértékei közötti kapcsolat feltárása volt. Egyfelől azt remélhetjük, hogy így új invariánsokat azonosíthatunk megkülönböztethető részrendszereket tartalmazó rendszerekhez, amelyek speciális esetei fermionikus vagy bozonikus összefonódottsági mértékeknek, és egyszerűbben kifejezhetők az azonos részecskék segítségével. Másfelől a megkülönböztethető részrendszerek esetéből már ismert invariánsok fermionikus vagy bozonikus általánosításait találhatjuk meg.

Új tudományos eredmények

- I. Megadtam az összes negyedfokú lokális unitér invariáns valós polinomot többrészecskés kvantumrendszerekre tetszőleges véges dimenziós egyrészecske-állapotterekkel. A Schur-Weyl-dualitást felhasználva, ami egy szoros kapcsolat a szimmetrikus és általános lineáris (és így az unitér) csoportok reprezentációelmélete között, sikerült analóg invariánsokat találnom a polinomalgebra minden páros fokszámú homogén alterében. A negyedfokú invariánsok közül azonosítottam a permutációs szimmetriával is rendelkezőket. [4]

- II. Bevezettem egy algebrát a különböző dimenziójú állapottérrel rendelkező kvantumrendszerek lokális unitér invariáns algebrainak fontos tulajdonságainak megértéséhez. Ez az algebra az összes k részecskés megkülönböztethető részrendszerekből álló összetett kvantumrendszerek lokális unitér invariáns valós polinomjaiból álló fokszámozott algebraik azon algebra homomorfizmusokkal megadott inverz limeszeként állítható elő, amelyeket a kisebb Hilbert-terek nagyobbakba való (lokális unitér-ekvivariáns) beágyazásai indukálnak. Az algebra ezen sorozata rendelkezik egy bizonyos stabilizációs tulajdonsággal: az inverz limesz minden eleme reprezentálódik a konstrukcióban résztvevő algebraik valamelyikében. [4]
- III. Új levezetést adtam a valós polinom invariánsok algebrajának homogén altereinek stabil dimenziójára vonatkozó formulának, és az inverz limesz megfelelő homogén altere dimenziójaként értelmeztem azt. Az inverz limesz Hilbert-sorát (azaz a formális hatványsort, amelynek együtthatói a fenti stabil dimenziók) felírtam végtelen szorzat alakban, aminek segítségével a következő sejtést tudtam megfogalmazni: A k részecskés kvantumrendszerek valós polinom invariánsainak algebrajának inverz limesze szabad, és egy algebrailag független generátorrendszerben a $2m$ fokú generátorok száma megegyezik a $k - 1$ generátorú szabad csoport m indexű részcsoportjai konjugáltosztályainak számával. [4]
- IV. A stabil dimenzió formulájára vonatkozó levezetésem egy módosításával egy a kevert állapotok lokális unitér csoport hatása szerinti m fokú homogén invariánsai terének dimenzióját megadó egzakt formulához jutottam. Ebben az esetben is van egy hasonló stabilizációs tulajdonság, és a kevert állapotú esetben kapott inverz limesz izomorf az eggyel több részrendszerhez tartozó tiszta esetben kapott inverz limeszsel. Egy izomorfizmust indukál a hozzáadott részrendszeren vett parciális trace.
- V. A Freudenthal-konstrukció segítségével sikerült megtalálni a következő kvantumrendszerek összefonódott állapotainak ekvivalenciaosztályait a sztochasztikus lokális operációk és klasszikus kommunikáció csoportja szerint: három fermion hatdimenziós egyrészecske-állapottérrel, egy qubit és két fermion négydimenziós egyrészecske-állapottérrel, három qubit (ez korábban is ismert volt), egy qubit és két bozonikus qubit, három bozonikus qubit. A konstrukció egy negyedfokú invariánst eredményez, amely általánosítása a $2 \times 2 \times 2$ -es hipermátrix Cayley-féle hiperdeterminánsának. A orbitszerkezet minden esetben a három qubit esettel rokon. [1, 2]

- VI. Amellett érveltem, hogy ez a hasonlóság a különféle, de azonos részecske-számú kvantumrendszerek között általános jelenség. A lokális transzformációk különféle csoportjai közötti valamint azok reprezentációi közötti kapcsolat segítségével precízen megfogalmaztam ezt a megfeleltetést, amely a különböző kvantumrendszerek ekvivalenciaosztályait és összefonódottsági mértékeit hozza kapcsolatba. [2]
- VII. Bemutattam egy módszert, amelynek segítségével több fermionot tartalmazó rendszerek lokális unitér invariánsait találhatjuk meg, és olyan alakban fejezhetjük ki, amely független az egyrészecske-állapottér dimenziójától. Az így kapott legegyszerűbb invariánsok között megtalálhatjuk a (fenti megfeleltetés szerinti) megfelelőit néhány ismert megkülönböztethető részrendszereket tartalmazó kvantumrendszer állapotain értelmezett invariánsoknak. Azt is megállapítottam, hogy minden sztochasztikus lokális operációk és klasszikus kommunikáció szerint invariáns polinomhoz található egy ilyen módon konstruált lokális unitér invariáns, ami viszont automatikusan általánosítható nagyobb egyrészecske-állapotterekre. [3]

Hivatkozások

- [1] P. Lévy, P. Vrana, *Three fermions with six single particle states can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A **78**, 022329 (2008)
- [2] P. Vrana, P. Lévy, *Special entangled quantum systems and the Freudenthal construction*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** 285308 (2009)
- [3] P. Vrana, *Local unitary invariants for multipartite quantum systems*, J. Phys. A: Math. Theor **44** 115302 (2011)
- [4] P. Vrana, *On the algebra of local unitary invariants of pure and mixed quantum states*, J. Phys. A: Math. Theor (elfogadva) (2011)