



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

PhD Tézisfüzet

---

**VONTATOTT KEREKEK DINAMIKÁJA**  
– Nemlineáris elmélet és kísérletek –

---

*Szerző:*  
TAKÁCS Dénes

*Témavezető:*  
Dr. STÉPÁN Gábor

Budapest, 2010.



---

## Bevezetés

*A kerék az emberiség egyik legrégebbi és legfontosabb találmánya. Évezredekig fejlődött, míg mai alakját elérte. A legjelentősebb előrelépést John Boyd Dunlop munkája jelentette 1887-ben, aki elkészítette az első pneumatikus gumibroncsot, hogy megszabaduljon a fejfájástól, amit fia kerékpárjának zaja okozott a macskaköves úton.<sup>1</sup> Ekkor Dunlop még nem sejtette, hogy találmánya mennyi „fejfájást” fog okozni a jövő mérnökeinek...*

A közúti járművek majd mindegyike pneumatikus gumibroncsokon gördül, így mozgásuk elsődlegesen a talajról a kerekek által a járműre közvetített erőktől függ. Mivel a gumibroncs tulajdonságai erősen befolyásolják a jármű kormányozhatóságát és stabilitását, ezért a gumibroncsok viselkedését és a kerék-talaj kapcsolatot leíró modellek fejlesztése, pontosítása alapvető feladat a járműdinamikában. Ezek a modellek feltétlenül szükségesek a járműdinamikai numerikus szimulációkhoz, hogy megmagyarázzuk a korábban tapasztalt mozgásokat vagy előrejelezzük járműveink lehetséges viselkedését. A gumibroncs mechanikai modelljei emellett kulcsszerepet játszanak a járművek szabályozó rendszereinek fejlesztésében, mint az ABS, EPS, stb. rendszerek esetén.

Járműveink bizonyos rezgései a kerékdinamika kérdésköréhez kötődnek. Munkámban, az egyik legfigyelemfelkeltőbb dinamikai jelenséget, a vontatott kerekek oldalirányú rezgéseit – azaz a kerékszítálást vagy más néven simmit – vizsgáltam. A kerékszítálás jelenségét bárki megtapasztalhatja a bevásárló kocsik tolása vagy a kerekes bőröndök vontatása közben. A kerékszítálás általában biztonsági kockázatot jelent és kiküszöbölése a tervezési fázisban komoly problémát okoz a mérnököknek. Ez a rezgésfajta jelentkezik repülőgépek futóművein, motorkerékpárok és személygépkocsik első kerekein, valamint nyerges vontatók és csuklós buszok hátsó kerekein.

A vontatott kerekek szítálását okozhatja a vontatórúd felfüggesztésének és a kapcsolódó járműszerkezetnek a rugalmassága, a keréken lévő gumibroncs rugalmassága illetve ezek valamely kombinációja. A kerékszítálás vizsgálatát egyrésztől nehezíti az, hogy a jármű önmagában egy összetett dinamikai rendszert alkot számos alacsony frekvenciájú lengésképpel, melyek mindegyike meghatározó lehet a dinamikai tulajdonságok tekintetében, figyelembe véve a lehetséges különböző futási sebességeket és egyéb mechanikai feltételeket. A vizsgálat nehézségei másrésztől a kerék-talaj kapcsolatot leíró modellekből illetve azok bonyolultságából is eredeztethetők.

---

<sup>1</sup>Annak ellenére, hogy többnyire Dunlopot tartják számon a pneumatikus gumibroncs felfedezőjeként, érdemes megjegyezni, hogy Robert William Thomson 1846-ban, több mint negyven évvel Dunlop előtt szabadalmaztatta saját „Légies kerekeit”.

---

---

## Célkitűzések

A több szabadságfokú mechanikai modellek analitikus vizsgálata általában nem lehetséges. Ráadásul, az ilyen összetett rendszerek kis paraméterváltoztatás hatására nagyon eltérő viselkedést mutathatnak, ami jelentősen nehezíti a választott mechanikai modell kísérleti úton való igazolását. Ez a probléma még komolyabb lehet, ha a nemlinearitások alapvetően befolyásolják a jármű viselkedését. Egy összetett rendszer azonban gyakran egyszerűsíthető, amennyiben a meghatározó lengéseképek megfelelően kerülnek kiválasztásra. Ilyenkor a rendszer leírható egy egyszerű, általában analitikusan is kezelhető kis szabadságfokú mechanikai modellel, amely képes lényegileg megragadni és megmagyarázni a gyakorlatban megfigyelt releváns rezgéseket.

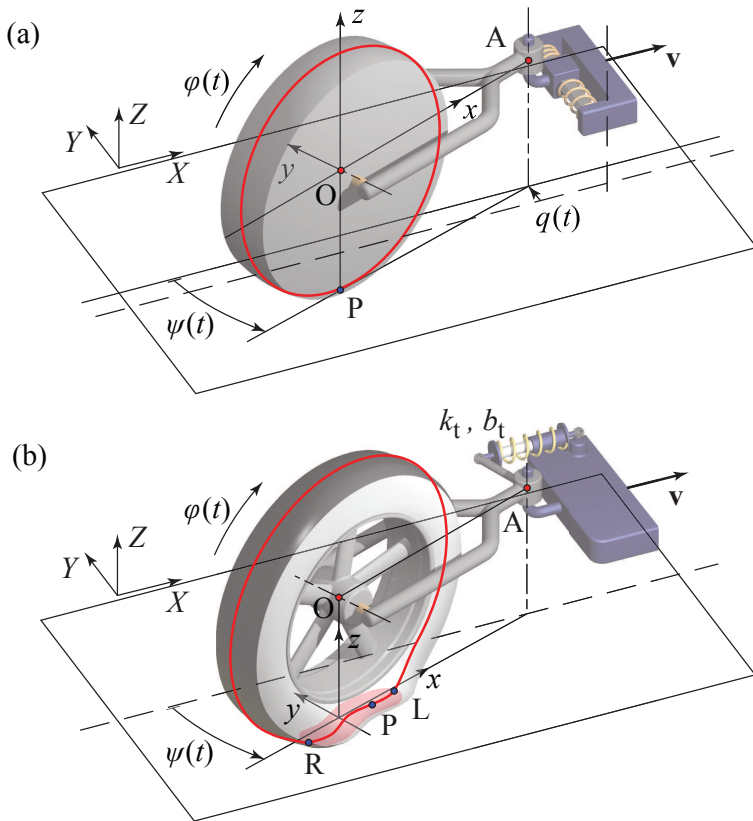
Kutatásom céljával a vontatott kerekek olyan kis szabadságfokú mechanikai modelljeinek megalkotását és analizisét tűztem ki, amelyek kevés paraméter segítségével írják le a kerékszitálás jól ismert tulajdonságait. Ennek megfelelően, az egyenesvonalú gördülés lineáris stabilitását vizsgáltam a vontatási sebesség és vontatási hossz paraméterek széles tartományában, és azonosítottam az úgynevezett stabilitási térképek lineárisan instabil szigeteit. Ezekre az eredményekre építve, a gondosan kialakított mechanikai és matematikai modellekben elméleti és kísérleti módszerekkel bizonyítani kívántam a szubkritikus Hopf bifurkáció és a kváziperiodikus rezgések létezését.

## Mechanikai modellek

Két alapvetően különböző kis szabadságfokú mechanikai modellt vizsgáltam különböző módszerekkel. Az első modell egy merev kerékből és rugalmas felfüggesztésből épül fel (ld. 1.a. ábra). Ezt a modellt analitikus és numerikus eljárásokkal elemeztem különös figyelmet fordítva a rendszer nemlineáris dinamikájára. Az itt meghatározott matematikai modell egy erősen nemlineáris három dimenziós közönséges differenciálegyenlet-rendszer, ami számos stabil és instabil határciklust – periodikus mozgást – tartalmaz, melyek bistabilitást és izolált bifurkációs görbéket eredményeznek műszakilag reális paramétertartományokban.

A másik modell egy merev felfüggesztéssel vontatott rugalmas gumiabroncsot tartalmaz (ld. 1.b. ábra). A gumikerék oldalirányú deformációját az egzakt feszített húr gumiabroncs modell segítségével írtam le. A peremfeltételek helyes megválasztásával a gumiabroncs relaxációs hosszát is figyelembe vettem a többi megszokott kerék paraméter mellett, mint amilyenek például a fajlagos merevség és csillapítás. A modell mozgásegyenlete ez esetben egy másodrendű integro-differenciálegyenlet (IDE), míg a gördülést leíró kinematikai kényszer egy paricális differenciálegyenlet (PDE) formájában adódik. A deformációs függvény haladó hullám megoldásának segítségével

---



1. ábra. Mechanikai modellek: (a) merev kerék modell, (b) rugalmas gumiabroncs modell.

az IDE-PDE rendszert megoszló időkésést tartalmazó késleltetett differenciálegyenletre transzformáltam. A késleltetett differenciálegyenlet stabilitási térképét meghatároztam, melyből kiderül, hogy az egyenesvonalú gördülés 1 és 2 kodimenziós Hopf bifurkációkon keresztül veszti el stabilitását ahogy a paramétereket (például a vontatási sebességet és a vontatási hosszt) változtatjuk. Az eredmények fizikai jelentése, hogy a rendszerben öngerjesztett periodikus és kváziperiodikus rezgések lépnek fel. Az említett paraméterek síkjában megrajzolt stabilitási térképeket analitikus úton határoztam meg, majd azokat numerikus szimulációkkal és részletes laboratóriumi kísérletekkel ellenőriztem, hogy igazoljam az időkésleltetett gumiabroncs modell memória hatásának jelentőségét.

---

# Tézisek

## 1. Tézis

A vontatott merev kerék egy kis szabadságfokú mechanikai modelljének bevezetése és elemzése után, számításaimmal bizonyítottam, hogy a vontatott merev kerék egyenesvonalú stacionárius gördülése akkor, és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha

$$L > L_{\text{cr}}(V) = \frac{V(1 - 4\zeta^2 - 2\zeta\kappa V)}{2\zeta + \kappa V},$$

pozitív dimenziótlan  $L$  vontatási hossz,  $V$  vontatási sebesség,  $\zeta$  relatív csillapítás és  $\kappa$  tehetetlenségi paraméter esetén.

Elvégeztem a csillapított rendszer Központi Sokaság redukcióját, és zárt alakban meghatároztam a lineáris stabilitási határhoz tartozó Hopf bifurkáció típusát. Bemutattam, hogy instabil öngerjesztett rezgések léteznek a stabil egyenesvonalú gördüléshez tartozó stacionárius mozgás körül, amennyiben a relatív csillapítás kisebb, mint egy kritikus érték. Egy műszakilag elfogadható pontosságú felső becslést határoztam meg a kritikus csillapítás értékére, és megmutattam, hogy az egyenesvonalú gördülés stabilitásvesztése kis amplitúdójú stabil rezgésekhez vezet, ha

$$\zeta > \frac{\sqrt{\kappa^2 V^2 + 2} - \kappa V}{4},$$

pozitív paraméterek esetén. Ezzel a közelítéssel biztosítható, hogy az ilyen paraméterekkel tervezett rendszer esetén kis amplitúdójú rezgések jelezzék a lehetséges stabilitásvesztést. Az analitikus eredményeket numerikus bifurkáció követő eljárásokkal ellenőriztem a nyílt forráskódú AUTO97 szoftver alkalmazásával.

A tézishoz tartozó levezetések és számítások a disszertáció 3. Fejezetében található.

Kapcsolódó publikációk: [3, 4, 19].

## 2. Tézis

A vontatott merev kerék kis szabadságfokú modelljének globális vizsgálata numerikus bifurkáció követéssel a lokális bifurkáció elmélet érvényességét tartományán kívüli eredményeket is mutatott. Az elméleti Hopf bifurkációs ponthoz csatlakozó periodikus pályák fold bifurkációját azonosítottam, amely igazolta a stabil nagy amplitúdójú rezgések létezését a szubkritikus Hopf ponthoz kapcsolt instabil öngerjesztett rezgések körül, azokon „kívül”.

---

A periodikus pályák bifurkációs görbéinek szétválását – egy úgynevezett izolát – azonosítottam bizonyos numerikusan meghatározott kritikus paraméter értékeknél. A rendszer nemlineáris viselkedésének szemléltetésére bifurkációs diagramot készítettem a vontatási sebesség és a vontatási hossz által kifejezített paramétersíkban, amelyben azonosítottam a vontatott kerék bistabil paraméter tartományát, ahol a stabil egyenesvonalú gördülés és a nagy amplitúdójú stabil rezgés egyaránt létezik.

A bistabil tartomány létezése új, alapvetően fontos információt szolgáltat a gördüléssel rendelkező rendszerek tervezéséhez, hiszen a lineáris stabilitási vizsgálat, a lokális bifurkáció elmélet, a numerikus szimulációk és a kísérletek egyike sem képes előrejelezni azon veszélyes rezgések létezését, melyek csak kis valószínűséggel jelentkeznek nagy perturbációk hatására.

A tézishez tartozó részletes magyarázatok és számítások a disszertáció 3. Fejezetében található.

Kapcsolódó publikációk: [3, 4, 19].

### 3. Tézis

Alkalmaztam a vontatott rugalmas kerék egy kis szabadságfokú mechanikai modelljét, amelyben a gumibroncsot mint rugalmasan ágyazott feszített hűrt vettem figyelembe. A modell mozgásegyenleteit a kerék-talaj kontakt tartomány haladó hullám próbamegoldásának segítségével készített differenciálegyenletté transzformáltam. Lineáris stabilitási térképeket készítettem a vontatási sebesség és a vontatási hossz által kifejezített paramétersíkban.

Megmutattam, hogy a vontatott gumikerék instabil paramétertartományai csökkenthetők a csillapítás növelésével, míg a gumibroncs nagyobb relaxációs hossza felnyújtja az instabil tartományok méretét.

Nagy vontatási sebességek esetén egy alapvetően fontos stabilitási határt azonosítottam a

$$l_{cr} = a + \sigma$$

kritikus vontatási hosszánál, ahol  $a$  a letapadt felület félhossza és  $\sigma$  a gumikerék relaxációs hossza.

Kváziperiodikus rezgések létezését bizonyítottam, és a műszaki szempontból legmeghatározóbb kváziperiodikus rezgést a stabilitási térkép legnagyobb vontatási sebességhez tartozó dupla Hopf bifurkációs pontjánál azonosítottam. Amennyiben ezen kváziperiodikus rezgés létezik, akkor az a

$$0.2a < l < 0.5a \quad \text{és} \quad af_n < v < 3af_n$$

paramétertartományban található, ahol  $f_n$  az álló rendszer sajátfrekvenciája Hertzben.

Egy meghatározó jelentőségű instabil sziget létezhet nagy vontatási hosszok ( $l > l_{\text{cr}}$ ) esetén a

$$2af_n \leq v \leq 4af_n$$

sebességtartomány közelében.

A tézishez tartozó számítások a disszertáció 4. Fejezetében található.  
Kapcsolódó publikációk: [3, 5, 6, 9, 17, 20].

## 4. Tézis

A kormánymechanizmus és kormánylengésfojtó hatásainak elemzése során bizonyítottam, hogy a vontató csapnál elhelyezett torziós rugó megszüntetheti a dupla Hopf bifurkációt, azaz öngerjesztett kváziperiodikus rezgés nem léphet fel. Megmutattam azt is, hogy a gumikerék csillapításának hatása stabilitási szempontból előnyösebb, mint a vontató csapnál elhelyezett torziós csillapító elemé.

Bizonyítottam, hogy a vizsgált modell esetén még egy tolt gumiabroncsos kerék is mutathat lineárisan stabil egyenesvonalú gördülést nagy sebességtartományban, ha megfelelő torziós merevséget és csillapítást alkalmazunk a vontató csapnál. Kimutattam, hogy a gumiabroncs megoszló csillapítása sebességfüggő statikus (nyereg-csomó) stabilitási határt eredményez még vontatott kerék esetén is.

A tézishez tartozó magyarázatok a disszertáció 4. Fejezetében található.  
Kapcsolódó publikációk: [2, 15, 16].

## 5. Tézis

Egy futópad átalakításával laboratóriumi berendezést terveztem és építettem, melynek segítségével a vontatott gumiabroncsos kerék szitáló mozgását kísérleti úton vizsgálhattam. A műszaki szempontból legfontosabb, elmélet által előrejelzett stabilitási határt és az ahhoz tartozó öngerjesztett rezgések frekvenciáit mérésekkel azonosítottam széles sebességtartományban, a letapadt felület félhosszának és a gumiabroncs relaxációs hosszának összegénél rövidebb vontatási hosszokra ( $l < a + \sigma$ ).

A késleltetett gumikerék modell memória hatását igazoltam a vontatott kerék különböző sebességgel való gördülése közben végrehajtott kísérleti modális analízissel is. Az ütési kísérletek tisztán igazolták a kis vontatási hosszok esetén ( $l < a + \sigma$ ) létező három különböző komplex, majdnem zérus valós résszel rendelkező karakterisztikus gyökpárokhoz tartozó három frekvencia görbét. Nagy vontatási hosszokra ( $l > a + \sigma$ ) egyetlen frekvencia görbét azonosítottam a kísérletek során, amely tökéletesen követi a meghatározó



---

karakterisztikus gyökpár komplex síkon történő képzetes tengely menti változását.

A téziszhez tartozó levezetések és ábrák a disszertáció 5. Fejezetében található.

Kapcsolódó publikációk: [6, 10, 11, 18, 15].

## 6. Tézis

A rendszer nemlineáris viselkedését numerikus szimulációkkal vizsgáltam, ahol mind a geometriai nemlinearitásokat, mind a Coulomb súrlódást figyelembe vettem. A szimulációs programban az érintkezési felület részleges csúszásának modellezéséhez a csillapított feszített húr egyenleteit úgy alkalmaztam, mint egy a kerék lengéseihez képest gyors időléptékű dinamikai jelenséget. A kísérletileg megfigyelt tranzienst és állandósult állapotbeli rezgéseket összehasonlítottam ezen szimulációs eredményekkel, és jó egyezését állapítottam meg.

A késleltetett gumikerék modell memória hatásának létezését megerősítettem kis amplitúdójú tranzienst és nagy amplitúdójú kifejlődött kváziperiodikus rezgések kísérleti elemzésével. A stabilitási térképek elméleti dupla Hopf bifurkációs pontjainak közelében mért és szimulált vizesés diagramokon magyaráztam meg a nemlineáris rezgések spektrumaiban található csúcok fejlődését, időbeli változásait. Ezzel igazoltam, hogy műszaki szempontból kielégítő az érintkezési tartomány részleges csúszását leíró gyors és lassú időléptékre épülő közelítés.

A téziszhez tartozó levezetések a disszertáció 5. Fejezetében található.

Kapcsolódó publikációk: [6, 8, 13, 21].

## 7. Tézis

Kísérleti eljárást dolgoztam ki a gumiabroncs hátsó érintkezési pontja hőmérséklet növekedésének, valamint a futópad teljesítményigény növekedésének mérésére; ezek a vontatott kerék gördülési ellenállás változása miatt következhetnek be bizonyos sebességeknél. A mérések segítségével bizonyítottam a stabilitási térképek által nagy vontatási hosszokra ( $l > a + \sigma$ ) előrejelzett lineárisan instabil szigetek fizikai létezését. Ezen tartományokban az öngerjesztett rezgések amplitúdója a mikrocsúszásoknak köszönhetően olyan kicsiny, hogy azok nem különböztethetők meg a rendszerben lévő háttérzajtól. Méréseimmel azt is bizonyítottam, hogy a késleltetett gumikerék modell memória hatása alapvetően fontos bizonyos sebességtartományokban még nagy vontatási hosszok esetén is, ahol egyébként a szitáló mozgás önmagában rejtve marad, de kulcs fontosságú szerepet játszik a megnövekedett gumiabroncs hő-

---

mérsékletben, a megnövekedett gördülési ellenállásban, a gyorsabb kopásban, valamint az ABS rendszerek rosszabb hatékonyságában.

A tézishez tartozó mérési eredmények a disszertáció 5. Fejezetében található.

## Publikációk

### Folyóiratcikkek

- [1] Stépán, G., Takács, D.: 2006, Balancing with distributed reflex delay, *Journal of Computational and Applied Mechanics* **7**(1), 91–99.
- [2] Takács, D., Stépán, G.: 2007, Stability of towed wheels with elastic steering mechanism and shimmy damper, *Periodica Polytechnica* **51**(2), 99–103.
- [3] Stépán, G., Takács, D.: 2008, Kerekek rezgései: Stabilitás és időkésés, *Informatika* **10**(1), 49–59.
- [4] Takács, D., Stépán, G., Hogan, S. J.: 2008, Isolated large amplitude periodic motions of towed rigid wheels, *Nonlinear Dynamics* **52**(1-2), 27–34. (IF=1.295).
- [5] Takács, D., Orosz, G., Stépán, G.: 2009, Delay effects in shimmy dynamics of wheels with stretched string-like tyres, *European Journal of Mechanics A/Solids* **28**, 516–525. (IF=1.815).
- [6] Takács, D., Stépán, G.: 2009, Experiments on quasiperiodic wheel shimmy, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **4**(3), 031007. (IF=0.557).

### Konferencia kiadványban megjelent cikkek

- [7] Stépán, G., Takács, D.: 2004, Dynamics of balancing, in I. Bojtár (ed.), *Proceedings of First Hungarian Conference on Biomechanics*, Budapest, pp. 415–422.
  - [8] Takács, D., Stépán, G.: 2006, Theoretical and experimental investigation of tyre dynamics, *Proceedings Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 6 of 1, WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, Weinheim, pp. 847–848.
  - [9] Takács, D., Stépán, G.: 2006, Dynamic contact problem of rolling elastic wheels, *Proceedings of ICGF 2006, International Conference on*
-

---

*Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace ICNPAA 2006*, Budapest, pp. 1–8.

- [10] Takács, D., Stépán, G.: 2006, Experimental study of quasi-periodic oscillations of towed wheels, *Proceedings of 5th Conference on Mechanical Engineering GÉPÉSZET 2006*, Budapest, pp. 1–5.
- [11] Takács, D., Stépán, G.: 2006, Theoretical and experimental study of large amplitude shimmy of tyres, *Proceedings of 10th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2006*, Budapest, pp. 315–319.
- [12] Szabó, B., Takács, D., Stépán, G.: 2006, Vehicle model for an automatic parking control system, *Proceedings of 10th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2006*, Budapest, pp. 549–555.
- [13] Takács, D., Stépán, G.: 2007, Experiments on quasi-periodic wheel shimmy, *Proceedings of ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference ASME IDETC/CIE 2007*, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 1–8. paper no. DETC2007-35336.
- [14] Szabó, B., Takács, D.: 2008, Vehicle model design and vehicle motion analysis for an automatized parking manoeuvre, *Proceedings of 6th Conference on Mechanical Engineering GÉPÉSZET 2008*, Budapest, pp. 1–7.
- [15] Takács, D., Stépán, G.: 2010, Experimental modal analysis of towed elastic tyres during rolling, in P. G. Thomsen and H. True (eds), *Non-smooth problems in vehicle systems dynamics*, Springer, Dordrecht, pp. 149–159.
- [16] Takács, D., Stépán, G.: 2010, Comparison of time delayed tyre models, *Proceedings of the IFAC TDS 2010, Workshop on Time Delay Systems*, Praha, Czech Republic, pp. 1–6. paper no. FP-TD-116.

## Egyéb konferenciák

- [17] Stépán, G., Takács, D.: 2005, Wheel shimmy caused by distributed delays, *8th SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, SIAM DS05*, Salt Lake City, Utah.
  - [18] Takács, D., Stépán, G.: 2005, Experimental study of the shimmy motion of wheels, *22nd Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics, DAS 2005*, Parma, Italy.
-

- [19] Takács, D., Stépán, G., Hogan, S. J.: 2006, Bifurcations of a towed rigid wheel, *6th European Solid Mechanics Conference, ESMC 2006*, Budapest.
  - [20] Orosz, G., Takács, D., Stépán, G.: 2007, The dynamics of wheel shimmy with delay and tyre relaxation length, *6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, ICIAM 2007*, Zurich.
  - [21] Takács, D., Stépán, G.: 2007, Experimental study of quasi-periodic vibrations of wheels, *10th Hungarian Mechanical Conference, MAMEK 2007*, Miskolc.
-